МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

кафедра физики открытых систем
наименование кафедры

Реализация методов построения сечения Пуанкаре потоковых динамических систем и их применение для анализа поведения систем, демонстрирующих хаотическую динамику
наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 4041 группы

направления 09.03.02 «Информационные системы и технологии»
код и наименование направления

института физики
наименование факультета

Ивановой Светланы Юрьевны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. ____________ Д.В. Савин
должность, ученая степень, уч. звание — подпись, дата — Инициалы Фамилия

Зав. кафедрой физики открытых систем
полное наименование кафедры
д.ф.-м.н., профессор ____________ А.А. Короновский
должность, ученая степень, уч. звание — подпись, дата — Инициалы Фамилия

Саратов 2021

Введение

Системы с хаотической динамикой являются популярным объектом исследования, в частности, в приложении к задачам создания и модернизации схем передачи информации [1-3]. Одним из инструментов, существенно облегчающих анализ поведения таких систем путём сведения анализа динамики потоковой системы к анализу динамики дискретного отображения, является процедура построения сечения Пуанкаре [4]. Корректная численная реализация такой процедуры является в связи с этим важной задачей при исследовании хаотических систем.

Целью дипломной работы является освоение метода корректного построения сечения Пуанкаре для трёхмерной нелинейной системы дифференциальных уравнений.

Задачами дипломной работы являются:

- краткий обзор базовой информации о поведении дискретных отображений и методах визуализации их динамики;
- реализация различных методов сечения Пуанкаре в среде разработки Lazarus и применение освоенных процедур к модельной системе с хаотическим поведением - системе Рёсслера;
- сравнение полученных результатов для различных методов;
- визуализация динамики системы Рёсслера и полученного для него отображения в различных режимах.

Работа состоит из трёх разделов. В первом разделе приводятся основные сведения об удвоениях периода в дискретных отображениях и построении бифуркационного дерева. Во втором разделе вводится процедура сечения Пуанкаре и описываются основные методы реализации этой процедуры. В третьем разделе приводятся результаты применения различных методов построения сечения Пуанкаре к системе Рёсслера и проводится сравнение полученных разными методами результатов.

1. Удвоения периода в дискретных отображениях и бифуркационное дерево

Бифуркационное дерево представляет собой зависимость возможных дискретных значений динамической переменной на аттракторе от параметра. Оно демонстрирует бифуркации удвоения периода. Условием реализации такой бифуркации является обращение мультипликатора μ в –1. В этом случае устойчивая точка расщепляется на две ветви. На бифуркационном дереве хорошо видны моменты удвоений периода, в которых дерево расщепляется на две ветви, хаотический режим и различные «окна» периодических режимов в хаосе. Окна периодичности возникают, когда хаотический режим переходит в периодический.

2. Сечение Пуанкаре

Сечение Пуанкаре удобно использовать для демонстрации структуры аттракторов. Процедура построения сечения заключается в определении последовательности точек, в которых траектория системы пересекает некоторую секущую поверхность в определённом направлении. Рассмотрим процедуру немного подробнее на примере трёхмерной потоковой системы с переменными x, y и z

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} = f_3(x, y, z) \end{cases} \quad (1)$$

Выберем в качестве секущей поверхности некоторую плоскость, задаваемую уравнением y=0 — и будем рассматривать точки, соответствующие движению траектории из области отрицательных значений переменной y в область её положительных значений. Соответственно, определённое таким образом сечение будет задавать дискретное отображение в плоскости (x, z).

Для решения уравнений системы между пересечениями секущей поверхности можно применять метод Рунге-Кутты.

При решении дифференциального уравнения каким-либо численным методом результатом решения является дискретный набор точек, при этом никак не гарантируется попадание одной из точек непосредственно на секущую поверхность.

В таком случае необходимо каким-либо образом дополнительно рассчитать координаты точки пересечения решения с секущей поверхностью. Рассмотрим различные методы решения этой проблемы, начиная с самых простых.

Простейший метод сечения Пуанкаре

Простейший метод построения сечения состоит в том, что на плоскость (x, z) ставится точка полученного численным методом приближенного решения в том случае, если значение y сменило знак с отрицательного на положительный. Такой метод, очевидно, будет приводить к большой погрешности.

Сечение Пуанкаре со средней точкой

Такое сечение строится по тому же принципу, что и простейшее сечение Пуанкаре — с использованием уже полученных в процессе решения уравнения численным методом точек приближенного решения. При этом производится интерполяция функции решения по двум соседним точкам, т. е. на график ставятся усредненные точки $\frac{x+x_1}{2}$, $\frac{y+y_1}{2}$, $\frac{z+z_1}{2}$, где (x, y, z) и (x_1, y_1, z_1) — координаты двух соседних точек приближенного решения, лежащих по разные стороны от секущей поверхности.

Развивая эту идею дальше, можно уточнять координату точки пересечения интерполированной функции решения с секущей поверхностью либо проводить интерполяция функцией более высокого порядка. Такие методы, однако, приведут к усложнению рабочих формул и — во втором случае — к необходимости использования большего числа точек приближенного решения, не решая при этом проблемы уменьшения порядка погрешности по сравнению с погрешностью приближенного решения дифференциального уравнения [1].

Метод Эно

Для построения сечения Пуанкаре методом Эно [4] дополним систему уравнений (1) соотношением

$$H(x,y,z) = \frac{\partial S}{\partial x} f_1(x,y,z) + \frac{\partial S}{\partial y} f_2(x,y,z) + \frac{\partial S}{\partial z} f_3(x,y,z) \ (2),$$

где $S\ (x, y, z)$ – функция, которой задается секущая плоскость.

В нашем случае функция S имеет вид S=y, тогда уравнение (2) будет иметь вид

$$H(x, y, z) = f_2(x, y, z) \quad (3),$$

так как остальные слагаемые становятся равными 0.

Перепишем уравнения системы (1), заменив дифференцирование по времени на дифференцирование по S:

$$\frac{dx}{dS} = \frac{f_1(x,y,z)}{H(x,y,z)} \quad (4),$$

$$\frac{dy}{dS} = \frac{f_2(x,y,z)}{H(x,y,z)} \quad (5),$$

$$\frac{dz}{dS} = \frac{f_3(x,y,z)}{H(x,y,z)} \quad (6),$$

$$\frac{dt}{dS} = \frac{1}{H(x,y,z)} \quad (7),$$

Если на некотором шаге интегрирования значение y<0, а следующее уже больше 0, сделаем один шаг метода Рунге-Кутты, используя новые функции (4)-(7) и $h = -y$.

Рассмотрим модификацию этого метода.

Сечение Пуанкаре методом Такера

Метод Такера [5] заключается в том, что мы одну из зависимых переменных в исходной системе преобразуем в независимую переменную на всем промежутке интегрирования системы. Для этого на каждом шаге будем определять доминирующую координату $\hat{\imath}$, исходя из условия

$$|f_{\hat{\imath}}(x)| = \max_{i=1,\dots,n} \{|f_i(x)|\} \quad (8).$$

Далее запишем новую систему уравнений:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{f_1(x,y,z)}{f_{\hat{\imath}}(x,y,z)}, \\ y' &= \frac{f_2(x,y,z)}{f_{\hat{\imath}}(x,y,z)}, \qquad (9) \\ z' &= \frac{f_3(x,y,z)}{f_{\hat{\imath}}(x,y,z)}, \\ t' &= \frac{1}{f_{\hat{\imath}}(x,y,z)}. \end{aligned}$$

Затем решаем эту систему методом Рунге-Кутты с некоторым шагом h. Если y<0 и $|y|$<=h, выбираем y в качестве доминирующей координаты и делаем шаг, равный y. В таком случае следующая точка приближенного решения окажется на секущей поверхности.

3. Применение методов построения сечения Пуанкаре к системе Рёсслера и сравнение результатов

Система Ресслера - это нелинейная динамическая система дифференциальных уравнений, которая задаётся следующей системой уравнений [4]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + (x - r)z \end{cases} \quad (10),$$

где x, y ,z- динамические переменные, a, b, r- параметры.

3.1 Сравнение простейшего сечения Пуанкаре, сечения Пуанкаре методом Эно и сечение Пуанкаре со средней точкой

Ниже приведены результаты моделирования системы Рёсслера и применения различных методов построения сечения Пуанкаре в различных режимах: точки сечения Пуанкаре (Рисунки 1, 3) и проекции фазовых портретов (Рисунки 2,4). На проекциях фазовых портретов переходный процесс изображен зелёным цветом, аттрактор — фиолетовым.

При значении параметров a=0.25, b=0.2, r=3 наблюдается система Ресслера с циклом периода 2.

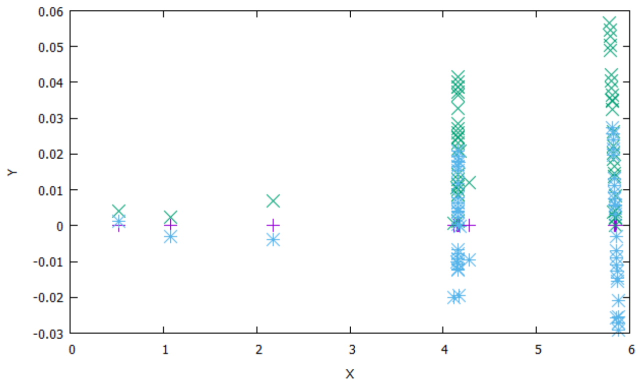

Рисунок 1 - Сечение Пуанкаре со средней точкой (синий), сечение Пуанкаре методом Эно (фиолетовый) и сечение Пуанкаре простейшим методом (зеленый) в плоскостях *(x,y)*, *(x,z)* при значении параметров a=0.25, b=0.2, r=3 .

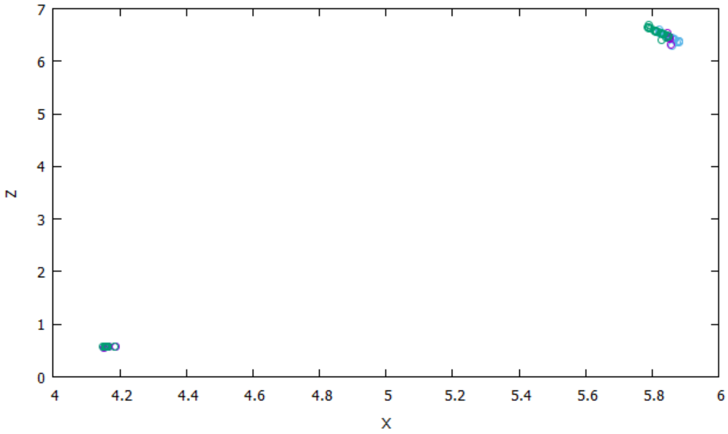

Рисунок 1 (продолжение) .

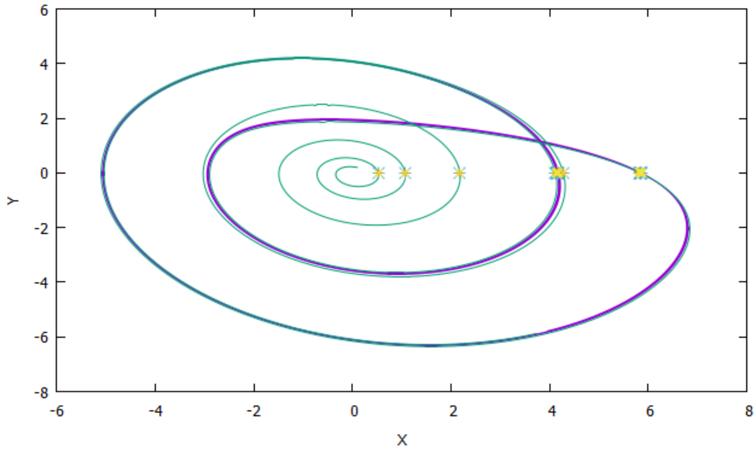

Рисунок 2 - Проекция фазового портрета с сечением Пуанкаре со средней точкой (желтый), сечением Пуанкаре методом Эно (синий) и сечением Пуанкаре простейшим методом (оранжевый) в плоскостях *(x,y)* при значении параметров *a=0.25, b=0.2, r=3.*

При значении параметров *a=0.2, b=0.2, r=4.2* наблюдается система Ресслера с циклом периода 16.

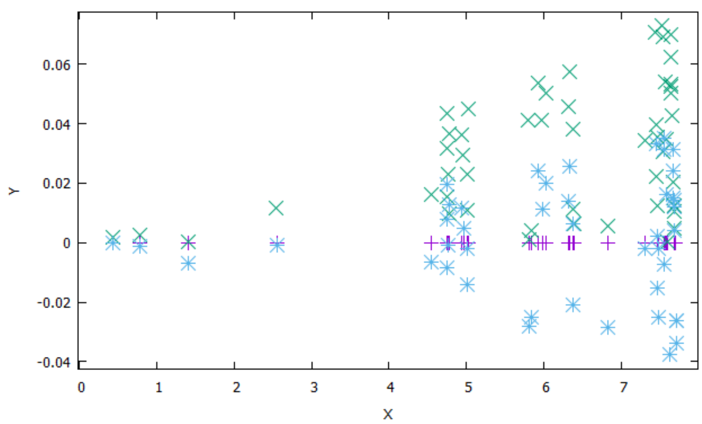

Рисунок 3 - Сечение Пуанкаре со средней точкой (синий), сечение Пуанкаре методом Эно (фиолетовый) и сечение Пуанкаре простейшим методом (зеленый) в плоскостях *(x,y), (x,z)* при значении параметров *a=0.2, b=0.2, r=4.2.*

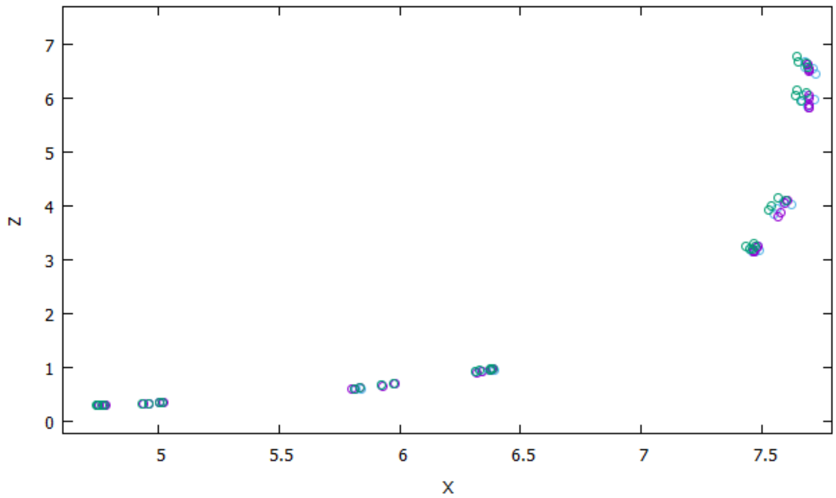

Рисунок 3 (продолжение).

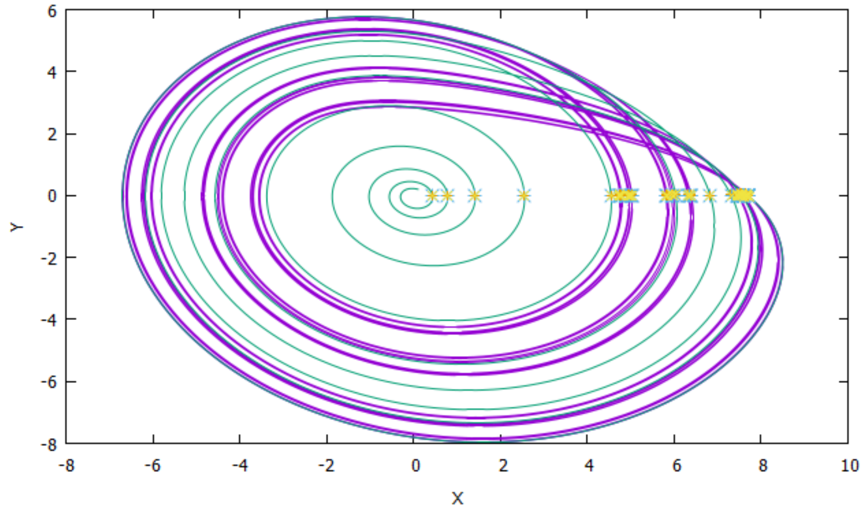

Рисунок 4 - Проекция фазового портрета с сечением Пуанкаре со средней точкой (желтый), сечением Пуанкаре методом Эно (синий) и сечением Пуанкаре простейшим методом (оранжевый) в плоскостях *(x,y)*, при значении параметров *a=0.2, b=0.2, r=4.2.*

На рисунках с сечениями Пуанкаре, построенными тремя разными методами, хорошо видно, что точки обычного сечения Пуанкаре и сечения со средней точкой разбросаны по всей плоскости, в отличие от точек, полученных методом Эно. Это связано с тем, что на плоскостях (*x*, *y*) и (*y*, *z*) *y* определяется с большой погрешностью. На плоскости (*x*, *z*) также заметно, что точки разных методов не совпадают. Таким образом, можно сделать вывод, что метод Эно более точен по сравнению с двумя другими.

3.2 Сравнение сечения Пуанкаре методом Эно с сечением Пуанкаре методом Такера

Построим также сечение Пуанкаре методом Такера и сравним результаты с полученными ранее методом Эно.

При значении параметров $a=0.25$, $b=0.2$, $r=3$ наблюдается система Ресслера с периодом-2.

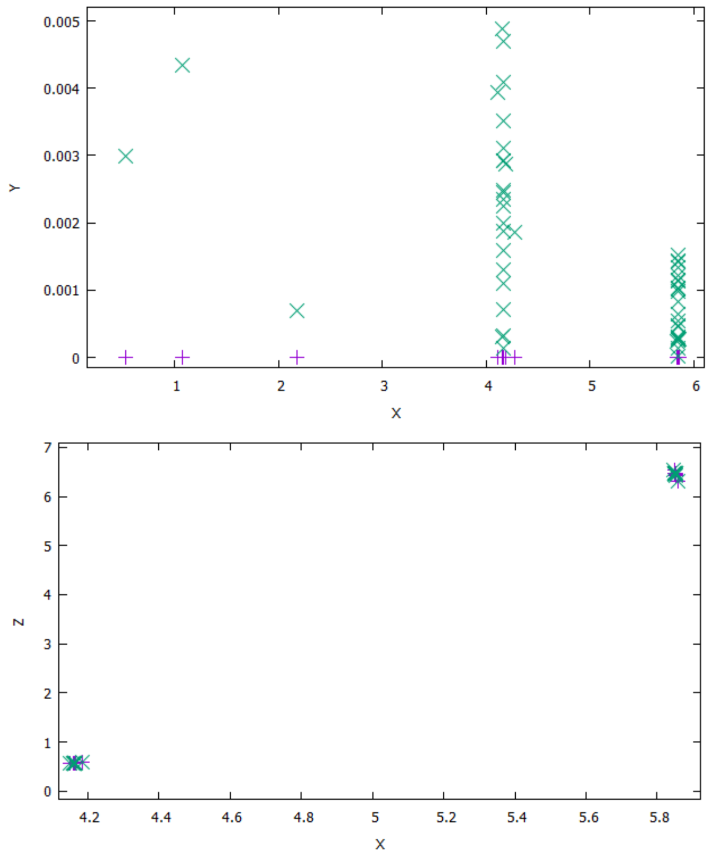

Рисунок 5 - Сечение Пуанкаре методом Такера (зеленый) и сечение Пуанкаре методом Эно (фиолетовый) в плоскостях *(x,y)*, *(x,z)* при значении параметров $a=0.25$, $b=0.2$, $r=3$.

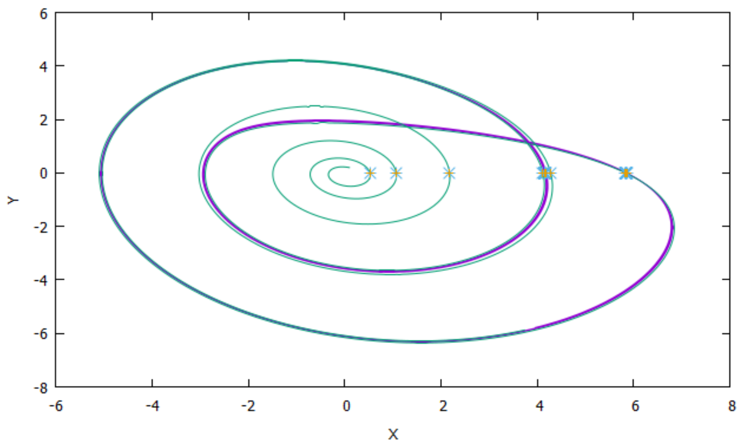

Рисунок 6 - Проекция фазового портрета с сечением Пуанкаре методом Такера (оранжевый) и сечением Пуанкаре методом Эно (синий) на плоскости *(x,y)*, при значении параметров $a=0.25$, $b=0.2$, $r=3$.

При значении параметров *a=0.2, b=0.2, r=4.2* наблюдается системаРесслера с периодом-16.

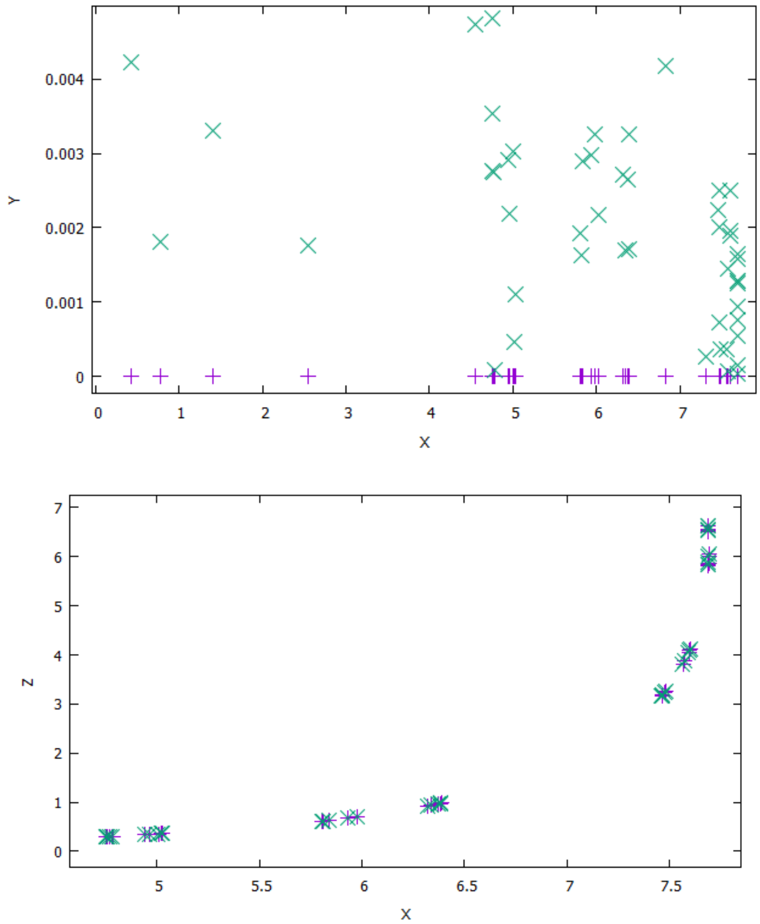

Рисунок 7 - Сечение Пуанкаре методом Такера (зеленый) и сечение Пуанкаре методом Эно (фиолетовый) в плоскостях *(x,y), (x,z),* при значении параметров *a=0.2, b=0.2, r=4.2.*

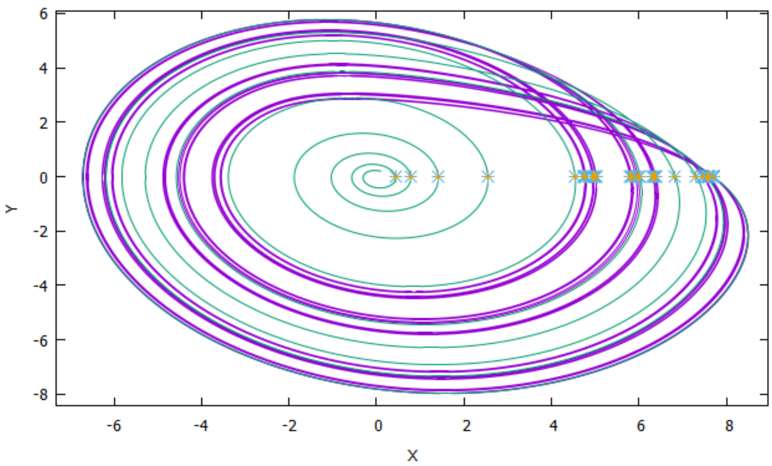

Рисунок 8 - Проекция фазового портрета с сечением Пуанкаре методом Такера (оранжевый) и сечением Пуанкаре методом Эно (синий) на плоскости *(x,y)* при значении параметров *a=0.2, b=0.2, r=4.2.*

Изучив рисунки с сечениями Пуанкаре методом Такера и методом Эно, можем сделать вывод, что в наших экспериментах первый метод дал менее точные результаты.

Для определения точности работы методов, посчитаем среднее квадратичное отклонение значения y от секущей в различных периодических режимах, данные приведены в Таблице 1.

Таблица 1 - Среднее квадратичное отклонение значения y.

Периоды системы Ресслера	2	16
Метод со средней точкой	0.0151283	0.0192635
Простейший метод	0.0158821	0.0211589
Метод Эно	0	0
Метод Такера	0.001317	0.0216240

3.3 Бифуркационное дерево системы Ресслера

Выбрав из рассматривавшихся методов наиболее точный, по данным наших экспериментов — метод Эно — построим с его использованием бифуркационное дерево системы Рёсслера в сечении Пуанкаре.

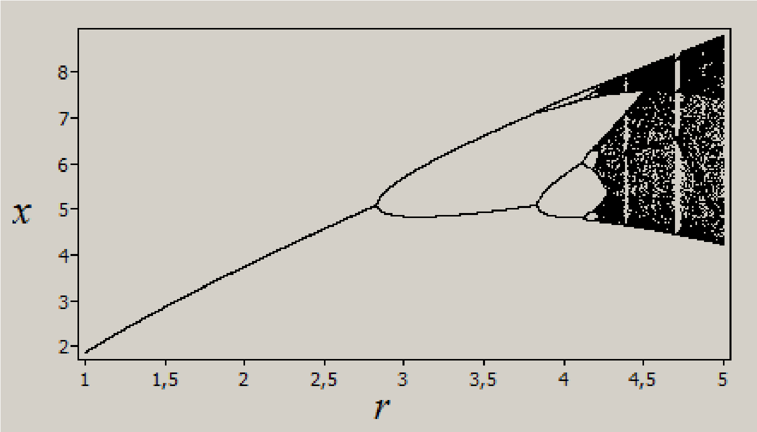

Рисунок 19 - Бифуркационное дерево системы (10) при значениях параметров a=0.2, b=0.2.

На бифуркационном дереве наблюдаются моменты удвоений периода, в которые дерево расщепляется на две ветви, при увеличении параметр r происходит переход к хаотическому режиму.

Заключение

В данной дипломной работе были изучены различные методы построения сечения Пуанкаре (простейшее сечение Пуанкаре, сечение Пуанкаре методом Эно, сечение Пуанкаре со средней точкой и сечение Пуанкаре методом Такера) реализованные на примере системы с хаотической динамикой – системы Ресслера при различных значениях управляющих параметров. Рассмотрены проекции аттракторов в различных режимах. Сделан вывод о том, что метод Эно даёт наиболее точные результаты. Построено бифуркационное дерево, показывающее моменты удвоений периода. Программы созданы в среде разработке Lazarus, данные визуализированы с помощью программы Gnuplot.

Список литературы

1. Lau, F.C.M. Chaos-Based Digital Communication Systems: Operating Principles, Analysis Methods, and Performance Evaluation / F.C.M. Lau, C.K. Tse. - Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. - 228 p.
2. Дмитриев, А.С. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи / А.С. Дмитриев, А.И. Панас. - М.: Издательство Физикоматематической литературы, 2002. – 252 с.
3. Короновский, А.А. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации. / А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов // УФН. - 2009. – Т. 179, №12, - С. 1281-1310
4. Кузнецов, С.П. Динамический хаос / С.П. Кузнецов. – М. : Изд-во ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 295 с.
5. Tucker, W. Computing accurate Poincaré maps. / W. Tucker // Physica D. – 2002 – V. 171 – P. 127–137.