

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра Дифференциальных уравнений и математической
экономики

Сглаживание значений временных рядов

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 441 группы

направление 09.03.03 — Прикладная информатика

механико-математического факультета

Олейник Маргариты Альбертовны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент

А.Ю.Трынин

Заведующий кафедрой
зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор

С.И.Дудов

Саратов 2021

Введение. Актуальность темы. Экономика занимает одно из важнейших мест в жизни общества. Всё в ней находится в постоянном движении, в непрерывном развитии: изменяются фазы цикла, конъюнктура, доходы, происходят сдвиги в спросе и предложении. Большая часть подобных экономических явлений не может быть изучена без привлечения математики, ведь ее язык помогает сформулировать и проверить гипотезы о многих сложных экономических явлениях.

В данной работе будет рассматриваться сегмент экономической науки, а именно рынок ценных бумаг. Актуальность данного исследования заключается в том, что в настоящее время ценные бумаги активно используются в различных экономических процессах, и кроме того также выполняют ряд важных функций.

Особую значимость в современных условиях становления российского фондового рынка приобретают исследования по моделированию прогноза котировок ценных бумаг. Внедрение моделирования способно помочь спрогнозировать участникам рынка его перспективы, тенденции развития рыночных составляющих, а также предупредить о возможных кризисных явлениях на данном рынке. Именно здесь применение математики является крайне необходимым, ведь с ее помощью можно решить задачу численной обработки котировок.

Целью исследования является синк-аппроксимация котировок ценных бумаг. В соответствии с поставленной целью решены следующие задачи:

1. Подробно изучить теорию интерполяции и аппроксимации функций, а также дать необходимые понятия аппроксимации синками;
2. Дать основные понятия о ценных бумагах и котировках;
3. Создать программный продукт, с помощью которого можно исследовать погрешность в определенном узле классического и модифицированного операторов sinc-аппроксимаций непрерывной на отрезке $[0, \pi]$ функции;
4. Реализовать численный эксперимент на «реальных данных» с помощью созданного программного продукта и исследовать погрешности классического и модифицированного операторов sinc-аппроксимаций функции котировок ценных бумаг;

5. В результате исследования построить графики численной реализации экспериментов, на основе которых делается вывод о меньшей состоятельности классического оператора синк-приближений.

Объектом исследования является возможность аппроксимировать значения котировок в некоторый момент времени с помощью созданного программного продукта.

Предметом исследования является синк-аппроксимация и ее применение для анализа данных о котировках.

Основное содержание работы. Данную работу можно разделить на четыре блока.

Первый блок «Теория интерполяции» состоит из нескольких частей, в которых описываются основные понятия, определения, методы и проблемы интерполяции функций.

Теория интерполирования имеет большую сферу применения, в которую входит отыскание способов решения интегральных и дифференциальных уравнений, исследование и построение квадратурных формул численного интегрирования. Интерполяция - это способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

В вычислительной практике наиболее часто приходится иметь дело с функциями, которые заданы таблично: в узлах $x_0, x_1, \dots, x_n \subset [a, b]$ известны значения некоторой функции $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. Требуется же составить представление о значении этой функции в точке, не входящей в число узлов. В этом случае строят функцию $g(\cdot)$, совпадающую с $f(\cdot)$ в узлах x_0, x_1, \dots, x_n и более простую в вычислительном плане, чем $f(\cdot)$. Построение такой функции - это и есть задача интерполирования.

Второй блок «Теория аппроксимации функций» состоит из нескольких частей, в которых описываются основные понятия, определения и проблемы аппроксимации, происходит постепенный переход к синк-аппроксимации.

Значительное внимание в математическом анализе уделено задаче приближения или иначе аппроксимации различного рода функций. Ее основной целью является построение приближенной функции, которая бы наиболее близко проходила около исследуемых точек или около данной непрерывной функции. Существует множество различных методов аппроксимации, и вы-

бор наиболее оптимального варианта зависит от целого ряда факторов. Более того, такие разделы математики, как численные методы анализа и теория приближения функций полностью посвящены изучению аппроксимации.

Во время развития области цифровой обработки и кодирования сигналов, широкое распространение получил метод sinc-приближений, применение которого было задействовано в теореме отсчётов. Актуальность задачи моделирования сигналов повлекла за собой необходимость улучшения способов аппроксимирования функций, изучения свойств аппроксимации и сравнения полученных результатов между собой. Впервые же sinc-приближения стали известны научному сообществу благодаря работам Плейна в качестве инструмента приближённого вычисления корней многочленов.

В рамках рассмотрения данной темы Э. Т. Уиттекер и Э. Борель независимо друг от друга вводят понятие кардинальной функции, являющейся классическим оператором sinc-аппроксимаций.

Кардинальная функция, суженная с оси на отрезок $[0, \pi]$, имеет вид:

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \sin(nx)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad (1)$$

Исследование sinc-аппроксимаций продолжается в течение многих лет. На текущий момент использование приближения синками функций, которые убывают по экспоненте на бесконечности, но при этом являются аналитическими на действительной оси, немало освещено в науке. Данный метод успешно используется при построении различных численных методов математической физики и приближения функций одной и нескольких переменных. Помимо этого, этот способ приближения используется в теории всплесков и теории квадратурных формул.

Было установлено, что между sinc-приближениями и интерполяционными процессами Лагранжа, построенными по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля, имеется тесная связь. Именно поэтому появились работы, посвященные исследованию аналогов теорем отсчёта для операторов Лагранжа по узлам из спектра таких задач.

Во многих литературе sinc-приближения часто рассматриваются на всей числовой оси. В этом случае для многих классов функций sinc-аппроксимации позволяют приближать функции с высокой точностью. Если же рассматривать ограниченный интервал, то возникают различного рода погрешности.

А.Ю.Трыниним было проведено исследование, благодаря которому выявлена возможность определения наличия или отсутствия аппроксимативной сходимости в точке конкретно значений операторов. Для самой же приближаемой функции при этом нет необходимости ни в чём, кроме непрерывности на отрезке $[0, \pi]$. Вместе с тем, информация о ней может быть ограничена лишь ее значением в узле $\frac{k\pi}{n}$, который принадлежит окрестности точки, для которой и исследуются аппроксимативные свойства.

Третий блок «Ценные бумаги» состоит из нескольких частей, в которых описываются основные понятия, приводятся виды ценных бумаг, классификация, а также рассказывается о котировках.

Ценная бумага - это особый товар, который обязует юридическое лицо, выпустившее от своего имени данную ценную бумагу, выплачивать доход на вложенный капитал её держателю или возратить его через определенный срок. Также можно сказать, что ценная бумага – документ, удостоверяющий, с соблюдением установленной формы и обязательных реквизитов, имущественные права, осуществление или передача которых возможны только при его предъявлении.

Вместе с передачей этой бумаги конкретному лицу будут переходить все удостоверяемые ею права в совокупности. Ценная бумага в системе экономических отношений выступает как титул собственности. Это означает, что она может представлять как производительный капитал (имущество предприятия, которое приходится на одну акцию), так и быть отдельно стоящей сферой вложения ссудного капитала (эмиссия облигаций под конкретный инвестиционный проект). Ценные бумаги способны в какой-то степени могут выступать заменителем денег или средством кредита - вместо погашения долга в денежной форме могут быть переданы эти бумаги на сумму долга. Существование особых договорных отношений, разных систем расчётов, а также различие имущественных прав объясняют многообразие их видов.

Ценные бумаги возникают путем эмиссии. Под эмиссией понимают выпуск ценных бумаг и их размещение среди держателей. Выпускать их могут государство, органы власти, юридические и физические лица.

В качестве основных свойств ценных бумаг можно выделить следующие:

- Ликвидность-способность актива быстро продаваться.
- Обращаемость-возможность выступать в качестве платежного средства или товара.
- Срочность-протяженность во времени связанных ими экономических отношений.
- Риск-вероятность потерь, связанных с инвестициями в активы.
- Доступность на рынке- возможность совершать покупки или продажи, т. е. легальность совершаемых сделок.

Степень обладания некоторыми признаками вроде ликвидности и риска зависит от рынка в целом, а также номинальной, рыночной стоимости конкретного актива. В зависимости от вида ценной бумаги ликвидность может меняться от срока обращения или формы взыскания. На всём этом и основаны торги, когда различными действиями и манипуляциями пытаются добиться роста или падения цены выбранных активов.

Таким образом, при помощи ценных бумаг достаточно гибко перераспределяются капиталы и денежные средства между субъектами рынка, отраслями экономики, регионами и странами. При их помощи капитал сосредотачивается в наиболее выгодных для вложения сферах. Используя чеки и векселя, можно сократить издержки обращения. Одну из самых главных позиций ценные бумаги занимают в платежном обороте государства в качестве инструмента платежа.

Котировка- это цена (может быть даже курс или процентная ставка) товара, которую объявляет продавец или покупатель, по которой они готовы совершить покупку или продажу.

Стоит отметить, что котировки относятся не только к курсам валют, но и к товарам на бирже и ценным бумагам. Если рассмотреть котировку акции, то это ее рыночная цена. У товара на бирже котировка – это биржевая цена. Тоже самое и с другими активами. Отсюда, мы можем сделать вывод, что котировка – это цена какого-либо актива.

Котировки формируются на основе множества экономических и политических факторов: процентных ставок, уровня инфляции, политической стабильности и др.

На финансовом рынке котировка представляет собой постоянно меняющееся значение, которое устанавливается котировальным комитетом. Более часто публикуются цены на момент открытия и закрытия биржи с указанием максимума и минимума каждого дня. Данный вид называется «официальная котировка». Другими словами, это юридически значимая информация, которая является обязательной к всеобщей публикации.

Таким образом, котировки отражают складывающуюся на торгах конъюнктуру рынка, а также соотношение спроса и предложения.

В четвертом блоке «Численная реализация экспериментов» поставлены практические задачи. Для их решения был создан программный продукт.

В качестве теоретической базы используются исследования, которые посвящены изучению аппроксимативных свойств операторов интерполирования, построенных по решениям задач Коши с дифференциальными выражениями второго порядка, критериев поточечной и равномерной сходимости синк-аппроксимаций непрерывных функций на отрезке $[0, \pi]$, а также в которых предложен ряд модификаций операторов типа Лагранжа, позволяющих равномерно приближать непрерывную на отрезке $[0, \pi]$ функцию.

Для численной реализации рассмотрим одну из модификаций оператора, определенных в работах А.Ю.Трынина, ставящую в соответствие любой, принимающей конечные значения на отрезке $[0, \pi]$, функции f , непрерывную функцию по правилу:

$$B_\lambda(f, x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (s_{k+1, \lambda}(x) + s_{k, \lambda}(x)) f(x_{k, \lambda}), \quad (2)$$

Будем исследовать аппроксимативные свойства операторов типа Лагранжа, которые ставят в соответствие любой определенной на отрезке $[0, \pi]$ функции f , интерполирующую её в узлах $\{x_{k, \lambda}\}_{k=0}^n$ непрерывную функцию

следующим образом:

$$S_\lambda(f, x) = \sum_{k=0}^n \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} f(x_{k,\lambda}) = \sum_{k=0}^n s_{k,\lambda}(x) f(x_{k,\lambda}). \quad (3)$$

Для проведения численного эксперимента в качестве приближаемой рассмотрим функцию $y = \sin(x)$.

Определим функцию, которая задает помехи:

$$f(x) := \sin x + 0,1 * \sin x \cos(nx) \frac{x - \frac{(k_0+0,5)\pi}{n}}{|x - \frac{(k_0+0,5)\pi}{n}|}; \quad (4)$$

В качестве рассматриваемого узла возьмем $k_0 = 22$

Цель данного эксперимента состоит в выявлении точности приближения значений функции при использовании:

1. классического оператора синк-аппроксимации 1;
2. нового оператора 2.

Данные операторы рассмотрены для $n = 50$.

Также для проведения еще одного эксперимента были рассмотрены значения акций Сбербанка за период 2015-2020 гг. Все необходимые данные отражены в таблицах. Для наглядности дана таблица 1:

Таблица 1 — Значения акций Сбербанка за 2015 год

Даты	RUB
20.04.2015	100
01.06.2015	93.21
13.07.2015	99.70
10.08.2015	98.26
31.08.2015	97.64
21.09.2015	98.97
05.10.2015	113.23
26.10.2015	119.51
09.11.2015	123.30
30.11.2015	136.04
21.12.2015	133.78

Эксперимент также показал, что оператор 1 выдает большой скачок погрешности за счет отсутствия компенсаций, в то время как погрешность при приближении новым оператором 2 значительно меньше.

Эксперименты показали, что необходимость введения нового оператора была значимой, ведь возникали определенные проблемы с приближением непрерывных негладких функций, а так же возникает проблема с приближением функций, меняющих знак, что является существенной проблемой для вычисления значений котировок, так как цены могут варьироваться от положительных значений до отрицательных.

Заключение. Проведенное исследование показало актуальность темы поведения котировок ценных бумаг. Это особенно важно для разрастающегося в современном мире рынка ценных бумаг. С помощью аппроксимации можно проследить за тем, как ведет себя цена данного финансового инструмента, и с помощью этого определить участникам рынка его перспективы, принять решение о распределении своих доходов и расходов, предупредить о возможных кризисных явлениях на данном рынке.

В ходе данной работы:

1. Подробно изучена теория интерполяции и аппроксимации функций и даны необходимые понятия аппроксимации синками;

2. Рассмотрены свойства синк-аппроксимации и введен новый оператор sinc-приближений;
3. Проведен численный эксперимент, позволяющий сделать сравнительный анализ классического и нового операторов sinc-приближений;
4. Реализован численный эксперимент на реальных данных для приближений значений котировок ценных бумаг.

Оператор 1, введенный Э. Т. Уиттекером и Э. Борелем приближает значения функций значительно лучше, чем алгебраические интерполяционные многочлены, но имеет несколько недостатков: в районе узла, где функция меняет знак, наблюдается большой скачок погрешности, помимо этого будут возникать сложности с приближением негладких непрерывных функций. Для решения проблемы возникновения большой погрешности А.Ю. Трынин вводит новый оператор 2, который дает значительно меньшую погрешность при вычислении значений функций, которые меняют знак в точке.

Целью данной работы была синк-аппроксимация, возможность ее применения к приближению значения котировок. В результате проведения экспериментов были получены корректные данные, что справедливо доказывает применимость данного метода приближения к подобного рода задачам.