МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»
Кафедра дискретной математики и информационных технологий

ИССЛЕДОВАНИЕ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ В АВТОМАТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 271 группы
направления 09.04.01 — Информатика и вычислительная техника
факультета КНиИТ
Барабанов Никита Александрович

Научный руководитель к. ф.-м. н.	_____________	Л. Б. Тяпаев
Заведующий кафедрой к. ф.-м. н.	_____________	Л. Б. Тяпаев

Саратов 2021

ВВЕДЕНИЕ

В результате проведения всякого конечного, дискретного эксперимента возникает набор: воздействия на физическую систему, реакция физической системы на соответствующие воздействия. Более того, разумно считать справедливым закон причинности: отклик системы на воздействие (акт измерения) в текущий момент времени не зависит от будущих воздействий, а зависит только от текущего и от воздействий на систему в прошлые моменты времени. На основании этих данных можно построить график, который будет являться графическим отображением функции, то есть того или иного закона. Данную систему, как и ряд многих других процессов реального мира, можно представить в виде конечного детерминированного автомата [2, 16, 19–34]. Примером такой системы может служить сверхрешетка. Сверхрешетки в хаотическом состоянии могут быть использованы в качестве ключевой составляющей генератора истинной случайной последовательности. Хаотические характеристики сигнала, генерируемого в сверхрешетке, в основном зависят от параметров сверхрешетки и приложенного к ней напряжения [7].

Если абстрагироваться от внутренних процессов, происходящих в сверхрешетке и наблюдать за ее поведением со стороны, то становится еще более очевидным уместность автоматного представления, ведь с позиции наблюдателя мы имеем в эксперементе множество входных сигналов, множество выходных сигналов, "черный ящик"— сверхрешетка, от внутренних процессов которой мы абстрагируемся, множество состояний черного ящика и функция перехода, заложенная в "черный ящик".

Имея дело с физическими системами, стоит отметить, что физический закон с точки зрения математического формализма есть аппроксимация конечного числа измерений. Естественным требованием к математическому описанию поведения физической системы является гладкость аппроксимирующей функции.

Целью данной работы является изучение поведения квантовых систем на основе сверхрешеток методами неархимедовой теории автоматов, разработка компьютерной программы для построения автоматных отображений в евклидовом пространстве и проведение эксперимента с использованием разработанного инструментария.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел «Литературный обзор» посвящен обзору актуальной литературы, включающий в себя следующие подразделы рассмотренные ниже.

В подразделе «Автоматное отображение» описывается то, что изучение поведения автоматов и автоматных функций в рамках задач криптографии, с помощью полученной экспериментально пар входных и выходных последовательностей, каждая из которых может быть ассоциированна с точкой ограниченной области евклидовой плоскости привело к выводу о том, что для автоматов с конечным числом состояний точки графика могут образовывать линейные структуры, некоторые из которых можно проинтерпретировать, как интерференционные картины [4, 5].

Формально, (синхронный) автомат представляет из себя кортеж $A = < \mathbb{I}, \mathbb{O}, \mathbb{S}, \tau, \theta, s_0 >$, где $\mathbb{I}$ – (конечный) алфавит входных символов; $\mathbb{O}$ – (конечный) алфавит выходных символов; $\mathbb{S}$ – множество внутренних состояний; $\tau\colon \mathbb{I} \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ – функция перехода: в зависимости от текущей (в дискретный момент времени $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$) входной буквы $x \in \mathbb{I}$ и текущего состояния $s \in \mathbb{S}$ функция τ определяет переход в новое состояние $s' \in \mathbb{S}$, т.е. $s' = \tau(x, s)$; $\theta\colon \mathbb{I} \times \mathbb{S} \to \mathbb{O}$ – функция выхода: в текущий момент времени t функция θ ставит в соответствие входной букве x (в зависимости от текущего состояния s) выходную букву: $y = \theta(x, s)$; s_0 – начальное состояние автомата (состояние в момент времени $t = 0$). Входное слово – это конечная последовательность букв, которые могут мыслиться как «причины», в то время как буквы соответствующего выходного слова могут рассматриваться как «следствия». «Причинность» означает, что последствия зависят только от причин, которые имеют место быть в прошлом. Следовательно автомат является адекватным математическим формализмом для конкретного проявления принципа причинности, в случае, если полагать, что существует только конечное число причин и следствий, согласно [5, 15].

Такой синхронный автомат A на словах длины k осуществляет преобразование кольца вычетов по модулю p^k. И согласно работе [5] подобный автомат реализует 1-Липшицево отображение f_A из пространства $\mathbb{Z}_p$ p-адических целых чисел в $\mathbb{Z}_p$. То есть автоматное отображение есть суть преобразование кольца целых p-адических чисел, которое удовлетворяет условию Липщица с константой равной 1.(и наоборот, всякое 1-Липшицево преобразование кольца целых p-адических чисел реализуется автоматом, причем, необязательно с конечным числом состояний) [3, 18]).

$$|f(a) - f(b)|_p \leq |a - b|_p, \text{где } a, b \in \mathbb{Z}_p$$

Подраздел «Способ работы с элементами р-адического анализа» включает в себя информацию, основанную на материале, изложенном в работе [4], где рассматриваются односторонние бесконечные последовательности, которые записываются в системе счисления по основанию р. Возникает бесконечная строчка типа:

$$x_0 x_1 x_2 x_3 ... x_{k-1} x_k x_{k+1} ...$$

Подобная цепь является целым р-адическим числом. Но если отбросить все, кроме префикса длиной k — получаем натуральное число.

Пространство слов конечной длины – множество целых, неотрицательных чисел. В нашем случае минимальное целое неотрицательное число:000000000..., а максимальное: $(p-1)(p-1)(p-1)(p-1)(p-1)$..., что является p^k-1.

Имея строчку из k символов можно взаимооднозначным образом каждой такой цепочке сопоставить элемент из множества от 0 до p^k-1. В результате чего получаем кольцо вычетов по модулю p^k.

Стоит отметить, что выбор множества $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ не является искусственным, поскольку наблюдаемые данные (в эксперименте) всегда можно нормировать, и считать в дальнейшем, что наблюдаемые данные в этом случаем будут представлены как числа, записанные в системе счисления с основанием р.

Подраздел «Функции класса C^2» посвящен рассуждению о том, что в результате эксперимента, экспериментатором будет получен набор пар (входное значение, выходное значения). Имея конечное число измерений возникает естественная необходимость создать аппроксимацию полученного отображения, для того, чтобы описать график единой функцией, вывести единый закон, который распространялся бы на всю исследуемую систему в рамках поставленного эксперимента. Очевидно, для того чтобы описать отображение одной функцией, соответствующая функция должна быть гладкой. Именно поэтому в работе [5] используются гладкие функции (C^2), которые могут быть вычислены при помощи конечных автоматов, а так же доказано, что гладкими кривыми (то есть класса C^2), вычислимыми конечными детерминированными автоматами могут быть лишь прямые на единичном квадрате евклидовой плоскости, которые в трехмерном пространстве представляют собой обмотку единичного тора. Эти обмотки, в свою очередь, могут быть заданы семейством комплексно-значных экспоненциальных функций вида $e^{i(Ax-2\pi p^k B)}$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$, где i — мнимая единица, A и B — рациональные целые p-адические числа [5]. Данные функции являются уравнениями волн де Бройля $\Psi = e^{i(ax-\omega t)}$, при условии, для автомата величина p^k будет проинтерпретированна как время t.

Подраздел «Обмотки тора» содержит в себе информацию об автоматном отображении на поверхности тора, а именно: пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана декартова система координат, оси которой обозначены символами X, Y, Z, а в плоскости XZ $(y = 0)$ дана окружность радиуса r, центр которой расположен на оси X и находится на расстоянии R от начала координат. Вращение этой окружности вокруг оси Z образует поверхность тора.

Поверхность тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^3$ (здесь $\mathbb{S}^1$ – одномерная сфера) допускает следующее представление. Пусть $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ – абелева группа, образующие которой a и b представлены сдвигами на $\mathbb{R}^2$: $a\colon (x, y) \mapsto (x + 1, y)$; $b\colon (x, y) \mapsto (x, y + 1)$. Единичный квадрат плоскости $\mathbb{I}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ определяет, так называемую фундаментальную область, которая показана на рисунке 2 (стрелками показаны отождествления сторон в соотвествии с действием группы G). Поверхность, возникающая после факторизации $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ показана на рисунке 1 и будет определять гладкое ориентируемое многообразие — тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Графиком автоматного отображения $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ вида $f(z) = az + b$, где a и b — рациональные целые p-адичесикие числа, будет множество

$$\{(x \bmod 1, (ax + b) \bmod 1) \in \mathbb{T}^2\colon x \in \mathbb{R}^2\},$$

которое состоит из обмоток единичного тора $\mathbb{T}^2$, причем каждая обмотка имеет угловой коэффициент a. Если $a = \frac{c}{d}$, $b = \frac{k}{m}$ несократимые дроби, то число обмоток N есть мультипликативный порядок p по модулю m/e, где e есть наибольший общий делитель пары d и m. Обмотка тора есть геодезическая на торе. Геодезическая есть образ прямой линии на $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, полученный с помощью отображения $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ вида

$$H\colon (x, y) \mapsto (x \bmod 1, y \bmod 1).$$

В подразделе «β-представление» описывается соответствующее понятие. Если предположить, что основание системы счисления p есть число $1+T$, где T достаточно малая величина, например, T есть планковская величина (другими словами, величина $p = \beta$, где β действительное положительное число, которое стремится к 1), то величина p^k будет мало отличима от $1 + kT$. Тогда, разумно предположить, что kT есть достаточно малый интервал времени (квант времени), например, планковский интервал времени (величина порядка 10^{-44} секунды). Математическим описанием столь малых физических величин может служить β-предствление числа при подходящем выборе бета. Согласно литературным данным β-расширение является обобщением понятия расширения по основанию p [11]. Очевидно, что для $\beta = p$ β-представлением по x является просто расширением по основанию p из x, поэтому и $\beta-$представление, и расширение по основанию p имеют некоторые общие свойства. Например если $\beta = \sqrt[n]{2}$, тогда арифметичские операции с числами, представленные β-представлением $...\alpha_2\alpha_1\alpha_0$ и $...\gamma_2\gamma_1\gamma_0$ (которые являются словами над алфавитом $\{0, 1\}$, так как $\lfloor \sqrt[n]{2} \rfloor = 1$, а входным алфавитом может быть лишь множество $\{0, 1, \ldots, \lfloor \beta \rfloor\}$) могут быть выполненны по аналогии с алгоритмом для расширения по основанию р, с той лишь разницей, что «перенос» из i-ой позиции должен быть добавлен в $(n + i + 1)$-ую позицию; например, для $\beta = \sqrt{2}$ мы имеем $11 + 01 = 110$, а в случае, если $\beta = 2$ получаем $11 + 01 = 100$. Следует обратить внимание, что $01 = 1$, $11 = \sqrt{2} + 1$ (и так далее: $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^1 + 0 = 2 + \sqrt{2}$) при $\beta = \sqrt{2}$ и $01 = 1$, $11 = 3$ при $\beta = 2$.

Проекции (синхронно) автоматных отображений при $\beta = p$ подчиняются закону «0 и 1» – мера Лебега проекции равна либо 0 (точки проекции («графика» отображения) образуют нигде не плотное подмножество единичного квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$), либо 1 («график» содержит все точки квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$) [4].

Подраздел «Тунельный эффект, квантовые ямы» включает в себя некоторые определения из квантовой механики, знания, которых могут понадобиться в исследованиях. Ведь существует суждение о том, что β-расширение

в контексте конечных детерминированных автоматов при определенных условиях является приближение функции волны де Бройля [5]. Из чего логично следует мысль о том, что квантовые системы могут являться источником хаоса. Говоря о квантовых системах, стоит вкратце обратить внимание на основные понятия.
Тунельный эффект - это квантово-механическое явление, не имеющее аналога в классической механике. Речь идет о возможности элементарной частицы (электрон, фотон и пр.) пройти через потенциальный барьер, в то время как барьер выше полной энергии частицы. Наряду с туннельным эффектом, в рамках дальнейших иследований важно такое понятие, как квантовая яма — это потенциальная яма, ограничивающая подвижность частиц до двух измерений, заставляя двигаться частицу в плоском слое [17].

В подразделе «Физически неклонируемые функции на базе сверхрешеток» содержится обзор литературных данных о материальной составляющей сверхрешетки и о том, как она может быть связана с SL-PUF.

При комнатной температуре в сверхрешетке можно наблюдать спонтанные хаотические колебания. На основании этого свойства сверхрешетка может рассматриваться в эксперименте для построения физически неклонируемой функиции — это функция, которая воплощёна в физической структуре, фунцкию просто оценить, но трудно охарактеризовать, смоделировать или воспроизвести [6]. Исследователи предполагают, что такого рода система с использованием сверхрешетки (далле SL-PUF — с англ. super latties - physically unclonable function) ведет себя как случайный преобразователь n-битных слов в n-битные слова (фактически, n = 8), поскольку она успешно проходит статистические тесты на случайность NIST.

Так же SL-PUF рассматривается, как «черный ящик» который принимает битовую строку в качестве входных данных и дает битовую строку в качестве выхода. Модель черного ящика предполагает, что SL-PUF является причинно-дискретной системой, которая:

1. в каждый момент $t = 0, 1, 2...$ находится в одном из всех возможных состояний $S = \{s_0, s_1, s_2, ...\}$;
2. меняет свое текущее состояние на новое под воздействием причины из множества всех причин $C = \{c_0, c_1, c_2, ...\}$;
3. производит эффект из набора всех возможных эффектов $\mathcal{E} = \{e_0, e_1, e_2...\}$

так, что

— при появлении причины $c \in C$ соответствующий эффект $e \in \mathcal{E}$ зависит только от текущего состояния $s \in S$ и от причины $c \in C$;
— при этом одновременно система меняет свое состояние с текущего на состояния $s \in S$ на новое $s' \in S$, что зависит только от текущего состояния s и от произошедшей причины c.

Данную систему можно представить в виде конечного детерминированного автомата.

Подраздел «Сверхрешетки, как клеточные автоматы» акцентирует внимание на том, что, говоря о сверхрешетках, следует заметить, что в некоторых исследованиях сверхрешетки используют, как модель клеточного автомата.

Исследователи продемонстрировали, что модель клеточного автомата с использованием квантовых точек (которые в отличии от потенциальных ям ограничены в пространстве по всем трём измерениям) может быть изготовлена с помощью электронного луча на материалах гетероструктуры GaAs/AlGaAs, то есть из составной части сверхрешетки [?].

В подразделе «Генераторы случайной последовательности на основе сверхрешеток» речь идет о том, что физические системы, проявляющие быстрые спонтанные хаотические колебания, используются для генерации высококачественных истинных случайных последовательностей в генераторах случайных чисел [10, 13].

Полупроводниковые сверхрешетки характеризуются как одномерная нелинейная система, проявляющая образование доменов электрического поля. Нелинейность возникает из-за отрицательной дифференциальной проводимости, индуцированной последовательным резонансным туннелированием от ямы к яме.

Подраздел «Модель сверхрешетки» содержит информацию, о том, что в слабосвязанных сверхрешетках, в которых основным транспортным механизмом является последовательное резонансное туннелирование, может возникнуть хаос, который было предложено потенциально использовать в качестве генератора случайных чисел.

Используя уравнение баланса сил для n-легированной полупроводниковой квантово-точечной сверхрешетки, запишем динамическое уравнение для скорости центра масс электрона Vc (t) в виде

$$\frac{V_c(t)}{dt} = -[\gamma_1 + \Gamma_c sin(\Omega_c t)]V_c(t) + \frac{e}{M(\xi_e)} \times [E_0 + E_{sc}(t)], \tag{1}$$

где γ_1-постоянная скорости импульса-релаксации, Γ_c - модуляция проводимости канала, с - частота модуляции, $M(\xi_e$ - зависящая от энергии усредненная эффективная масса электрона в сверхрешетке, $\xi_e(t)$ - средняя энергия на электрон, E_0-приложенное электрическое поле постоянного тока, напряженность электрического поля, вызванная приложенным напряжением [1]. Связь между E_0 и приложенным напряжением определяется параметрами структуры сверхрешетки, которые являются нелинейными переменными и весьма различны для разных сверхрешеток; а $E_{sc}(t)$ -индуцированное поле пространственного заряда, обусловленное возбуждением плазменных колебаний. Здесь статистическая сила сопротивления аппроксимируется скоростью релаксации импульса. Согласно уравнению энергетического баланса можно показать, что $\xi_e(t)$ удовлетворяет следующему динамическому уравнению:

$$\frac{d\xi_e(t)}{dt} = -\gamma_2[\xi_e(t) - \xi_0] + eV_c(t)[E_0 + E_{sc}(t)], \tag{2}$$

где γ_2 - константа скорости релаксации энергии, ξ_0 - средняя энергия электронов в тепловом равновесии, а теплообмен электронов с кристаллической решеткой приближенно описывается γ_2. Применяя теорему Кирхгофа к резистивно шунтированной квантовой точечной сверхрешетке, мы получаем динамическое уравнение для индуцированного поля пространственного заряда $E_{sc}(t)$ в виде

$$\frac{dE_{sc}(t)}{dt} = -\gamma_3 E_{sc}(t) - (\frac{en_0}{\sigma_0 \sigma b})V_c(t), \tag{3}$$

где γ_3 - обратно пропорциональное произведению сопротивления системы и квантовой емкости - постоянная скорости релаксации диэлектрика, n_0 - концентрация электронов в тепловом равновесии, а σb - относительная диэлектрическая постоянная основного полупроводникового материала.

В рамках модели плотной связи одноэлектронная кинетическая энергия ϵ_k в полупроводниковой квантово-точечной сверхрешетке может быть записана в виде

$$\epsilon_k = \frac{\Delta}{2}[1 - cos(kd)], \tag{4}$$

где $k(|k| \leq \pi/d)$ - волновое число электрона вдоль направления роста сверхрешетки, Δ - ширина мини-полосы, d - пространственный период сверхрешетки. Это соотношение дисперсии энергии дает

$$\frac{1}{M(\xi)_e} = \langle \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2\xi_k}{dk^2} \rangle = \frac{1}{m^*[1 - (\frac{2}{\Delta})\xi_e(t)]}, \tag{5}$$

где $m^* = 2\hbar^2/\Delta \mathrm{d}^2$ и $|1/M(\xi_e)| \leq 1/m^*$ Для численных расчетов удобно использовать безразмерные величины. В частности, вводятся:

$$v(\tau) = (m^* d/\hbar)V_c,$$

$$\omega(\tau) = [(2/\Delta)\xi_e - 1],$$

$$f(\tau) = (ed/\hbar\omega_0)E_{sc},$$

где $\tau = \omega_0 t$ (у ω_0 ТГЦ - частотная шкала) [7].

В подразделе «Анализ данных о физической модели сверхрешетки» были проанализированы данные о физической модели сверхрешетки. Согласно [7] в безразмерных величинах динамические уравнения резонансно туннелирующих электронов в сверхрешетке становятся:

$$\frac{dv(\tau)}{d\tau} = -b_1 v(\tau)[1 + a_2 sin\Omega\tau] - [a_1 + f(\tau)]\omega(\tau),$$

$$\frac{d\omega(\tau)}{d\tau} = -b_2[\omega(\tau) - \omega_0] + [a_1 + f(\tau)]v(\tau)$$

$$\frac{df(\tau}{d\tau} = -b_3 f(\tau) - a_3 v(\tau),$$

где $\omega_0 = [(2/\delta)\xi_0 - 1] = -1, b_1 = \gamma_1/\omega_0, b_2 = \gamma_2/\omega_0, b_3 = \gamma_3/\omega_0, a1 = \omega_b/\omega_0, a_2 = \Gamma_c/\gamma_1$ и $a_3 = (\Omega_c/\omega_0)^2$ являются положительными вещественными константами. Параметры, связанные с полем:
$\omega_B = eE_0 d/\hbar$, $\omega_s = eE_1 d/\hbar$, $\omega_s' = eE_1' d/\hbar$, $\Omega = \Omega_c/\omega_0$, $\Omega_c = \sqrt{e^2 n_0/m^* \sigma_0 \sigma_b}$
Начальные условия для системы уравнений $v(0) = v_0, f(0) = f_0, \omega(0) = \omega_0$
Когда приложенное напряжение постоянного тока равно 2,5 В, измеряется выходной хаотический сигнал. Траектории двух близких начальных усло-

вий будут разделяться (или сближаться) экспоненциально. Показатель Ляпунова - это количественное описание явления. Пока наибольший показатель Ляпунова больше нуля, наличие хаоса может быть определено. В анализируемой работе наибольший показателя Ляпунова сверхрешетки является $LE_{max} = 3,256$, что показывает, что хаотическое состояние определенно существует [14].

Второй раздел «Разработка программы и проведение эксперимента» включает в себя информацию о разработке программы, проведении эксперимента и результатах эксперимента, которые распределены по следующим подразделам: «Обзор используемых инструментов», «Краткий обзор программы», «Результаты эксперимента».

В подразделе «Обзор используемых инструментов» говорится о том, что программа разрабатывалась на языке программирования $Python$, в интегрированной среде разработки $Spyder$, с использованием библиотеки $matplotlib$. $Python$ — это интерпретируемый язык программирования, с выразительным синтаксисом, которые зачастую сравнивают с псевдокодом [8].
Согласно [9] $Spyder$ — среда разработки Python с различными особенностями (содержит прямые ссылки на документацию встроенных библиотек, синтаксическая подсветка, журнал истории и т. д)
$Matplotlib$ — это пакет Python для построения 2D и 3D графиков [12].

Подраздел «Краткий обзор программы» содержит обзор разработанной компьютерной программы. В разработанной программе используется текстовый интерфейс пользователя. Программа функционирует в диалоговом режиме. Программа запрашивает длину префикса, префикс вводится с клавиатуры. Далее программа предлагает выбрать значение $beta$. В случае $\beta = 2^{1/n}$ запрашивается ввод величины n, после чего запрашивается формат отображения. Далее программа проводит подсчет координат точек, необходимых для построения графика заложенной в программу. После чего программа выводит рассчитанное отображение в виде 2D графика на единичном квадрате евклидовой плоскости или в трехмерном пространстве, где помимо квадрата евклидовой плоскости добавляется ось с отсчетом моментов времени t, при том, что в каждый момент времени было отображено лишь одно значение.

В подразделе «Результаты эксперимента» содержится информация и выводы по результатам эксперимента. Были построены автоматные отображения в β-представлении (при $\beta = 1; \sqrt{2}$), при различной длине префикса, следующих функций: $f(x) = x + 1, f(x) = 2x, f(x) = 3x + 1, f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$

В результате становится видно, что при изменении значения β с 2 на $\sqrt{2}$ появлялись изменения в построенных структурах. Изменения были как в рамках квадрата евклидовой плоскости, так и во времени. В некоторых случаях формировалась картинка похожая на волновую интерференцию.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В магистерской работе был проведен обзор тематической литературы, затрагивающий разные аспекты теоретико-практического изучения квантовых систем в автоматном представлении. Были изучены элементы неархимедовой (p-адической) теории автоматов и теории построения псевдослучайных генераторов, элементы теории неархимедовых динамических систем и p-адического анализа, представление чисел в системах счисления с нецелым основанием β, необходимый математический формализм поведения сверхрешеток с использованием автоматных отображений и возможность синтеза физических генераторов на основе сверхрешеток

Была разработана и успешно протестированна компьютерная программа, предназначенная для построения проекций автоматных отображений в β-представлении в евклидовом пространстве.

Так же был проведен эксперимент, по построению и сравнению проекций автоматных отображение в β-представлении при различных β. При использовании β-расширения наблюдалось изменение структуры отображения, как в рамках квадрата евклидовой плоскости, так и во времени, в некоторых случаях формировалась картинка похожая на волновую интерференцию. Результаты наблюдений вкладываются в суждение о том, что β-расширение (при β близкой к 1) в контексте конечных детерминированных автоматов, осуществляющих преобразование над кольцом целых 2-адических чисел является приближением функции волны де Бройля.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Alexeeva N., Makarovsky O.Controlling high-frequency collective electron dynamics via single-particle complexity //Physical review letters. – 2012. – T. 109. – №. 2. – C. 024102

2 Allouche J. P., Shallit J. Automatic sequences: theory, applications, generalizations. — Cambridge university press, 2003.

3 Anashin V. Non-Archimedean analysis, T-functions, and cryptography //arXiv preprint cs/0612038. – 2006

4 Anashin V., Khrennikov A. Applied algebraic dynamics. — Walter de Gruyter, 2009. — Vol. 49. — P. 37-431.

5 Anashin V. S. Quantization causes waves: Smooth finitely computable functions are affine // P-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications. — 2015. — Vol. 7, Iss. 3. — P. 169-227.

6 Gassend B. Clarke D. Silicon physical random functions //Proceedings of the 9th ACM conference on Computer and communications security. — 2002. — C. 148-160.

7 Liu Y., Yang D., Zheng H. Parameter analysis of chaotic superlattice true random number source //Chinese Physics B. – 2017. – T. 26. – №. 12. – C. 120502.

8 Oliphant T. E. Python for scientific computing //Computing in Science Engineering. — 2007. — Vol. 9, Iss. 3. — C. 10-20.

9 Raybaut P. Spyder-Documentation //Available online at: pythonhosted. org. — 2009.

10 Reidler I., Aviad Y., Rosenbluh M. Ultrahigh-speed random number generation based on a chaotic semiconductor laser //Physical review letters. – 2009. – T. 103. – №. 2. – C. 024102.

11 Sidorov N. Arithmetic dynamics // Topics in dynamics and ergodic theory. — 2003. — Vol. 310. — P. 145-189.

12 Tosi S. Matplotlib for Python developers: Packt Publishing Ltd — 2009.

13 Uchida A., Amano K., Inoue M., Hirano. Fast physical random bit generation with chaotic semiconductor lasers //Nature Photonics. – 2008. – Т. 2. – №. 12. – С. 728-732.

14 Wolf A. Swift, J., Swinney, H. Determining Lyapunov exponents from a time series //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1985. – Т. 16. – №. 3. – С. 285-317.

15 Брауэр В. Введение в теорию конечных автоматов. — Радио и связь, 1987.

16 Григорчук Р. И., Некрашевич В. В., Сущанский В. И. Автоматы, динамические системы и группы //Труды математического института имени ВА Стеклова. — 2000. — Т. 231. — С. 134-214.

17 Квантовая яма [Электронный ресурс]: Википедия. Свободная энциклопедия. — Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Квантова_яма (дата обращения: 25.12.2020).

18 Лунц А. Г. Конечные p-адические автоматы //Доклады Академии наук. – Российская академия наук, 1963. – Т. 150. – №. 4. – С. 755-758.

19 Матов Д. О. Аффинные преобразования геометрических образов конечных автоматов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 104-108.

20 Сагаева И.Д., Салий В.Н. Тяпаев Л.Б. Дискретная математика. Ч.1. – Lulu Publishing, USA, 2013. приложений. Вып.2 – Изд-во Сарат. ун-та, 1998. С. 139–148.

21 Тяпаев Л.Б. Построение и анализ геометрических образов конечных детерминированных автоматов // Теоретические проблемы информатики и её приложений. Вып.1. – Изд-во Сарат. ун-та, 1997. С. 146–151.

22 Тяпаев Л.Б. Описание геометрических образов некоторых классов математических автоматов // Теоретические проблемы информатики и её приложений. Вып.1. – Изд-во Сарат. ун-та, 1997. С. 146–151.

23 Тяпаев Л.Б. Геометрическая модель поведения автоматов и их неотличимость // Математика, механика, математическая кибернетика. – Издво Сарат. ун-та, 1999. С. 139-143.

24 Тяпаев Л.Б. Геометрические модели и методы при решении задач теории автоматов. // Теоретические проблемы информатики и её приложений. Вып.3. – Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С.131–136.

25 Тяпаев Л.Б. Аффинные классы автоматов и их преобразования. // Теоретические проблемы информатики и ее приложений, Вып. 4. – Изд-во Сарат. ун-та, 2001. С.133–135.

26 Тяпаев Л.Б. Геометрические образы автоматов как множества точек плоскости с рациональными координатами // Автоматизация проектирования дискретных систем (CAD DD'2001). Материалы IV межд. конф., Минск, Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 2001. С.203–210

27 Тяпаев Л.Б. Геометрическая интерпретация задач с автоматами // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XIII межд. конференции Ч. I,II., М.: Изд–во ЦПИ МГУ, 2002. С.178–179.

28 Тяпаев Л.Б. Применение геометрического подхода к изучению поведения автоматов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений, Вып. 5. – Изд-во Сарат. ун-та, 2003. С.175–176

29 Тяпаев Л.Б. Анализ геометрических образов поведения конечных автоматов // Искусственный интеллект. Интеллектуальные и многопроцессорные системы-2004, Материалы межд. науч. конференции. Т.2. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2004. С. 263-266.

30 Тяпаев Л.Б. О некоторых задачах для конечных автоматов, заданных геометрическими образами // Доклады академии военных наук. №1(25), 2007. С. 69-80

31 Тяпаев Л.Б. Решение некоторых задач для конечных автоматов на основе анализа их поведения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т.6. вып. 1/2. С. 121-133.

32 Тяпаев Л.Б. Геометрические образы автоматов и динамические системы // Дискретная математика и ее приложения: Материалы X межд. семинара / под. ред. О.М. Касим-Заде. М.: Изд-во мех.-мат. ф-та Моск. ун-та, 2010. С.510-513.

33 Тяпаев Л.Б. Василенко Д.В. Динамические системы, определяемые геометрическими образами автоматов // Интеллектуальные системы. 2013. №17. С 196-201

34 Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2006.