МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

Анализ поведения динамических систем, демонстрирующих

название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

гиперболический хаос: создание программного комплекса для расчёта характеристик динамических режимов и изучение устройства пространства параметров

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 2241 группы
направления 09.04.02 «Информационные системы и технологии»
код и наименование направления
института физики
наименование факультета, института, колледжа
Дригунца Владислава Николаевича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н. ____________ Д. В. Савин
должность, уч. степень, уч. звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор ____________ А. А. Короновский
должность, уч. степень, уч. звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Саратов 2021 год

Введение

Генераторы с хаотической динамикой являются перспективными объектами для применения в схемах передачи информации. В частности, одним из преимуществ является то, что они генерируют широкополосный сигнал и, следовательно, могут обеспечить функционирование систем связи при малой мощности сигнала в каждом из частотных диапазонов [1].

При рассмотрении схем передачи информации, основанных на синхронизации колебаний приемника и передатчика, важным является вопрос об устойчивости схемы при изменении параметров передатчика и приемника. В таком случае целесообразно изучать такие схемы передачи информации, в которых свойства аттрактора не будут меняться при вариациях параметров. Этому свойству удовлетворяет генератор гиперболического хаоса. Аттрактор, описывающий поведение системы, демонстрирующей гиперболический хаос, называется гиперболическим.

Гиперболические аттракторы являются структурно устойчивыми. Это означает нечувствительность структуры аттрактора в фазовом пространстве по отношению к вариации уравнений. Свойство структурной устойчивости полезно для потенциальных приложений хаоса, каковыми являются, например, системы коммуникации, маскировка сигналов и так далее [2].

Таким образом, как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения интересно реализовать гиперболический хаос в физических системах, имеющих приложение в информационных системах и технологиях, и исследовать структуру пространства параметров таких систем.

Вызывает интерес вопрос о границе области существования гиперболического хаоса и типичных сценариях перехода к нему [3-5]. В частности, можно предположить, что полезной для такого рода задач будет информация об изменении различных характеристик генерируемого такой системой сигнала при изменении управляющих параметров.

Таким образом, **целью** данной работы является изучение изменения характеристик динамических режимов в процессе перехода к гиперболическому хаосу и создание программного комплекса для расчёта соответствующих характеристик сигналов.

При выполнении работы решались следующие **задачи**:

- создание программ для расчёта фазы хаотического сигнала, построения стробоскопического отображения для фазы, расчёта старшего ляпуновского показателя и распределения локальных ляпуновских показателей;
- определение границы области существования гиперболического хаоса по результатам анализа диаграмм для фазы в стробоскопическом сечении;
- изучение трансформации распределения локальных ляпуновских показателей при изменении управляющих параметров, соответствующих переходу от квазипериодической динамики к динамике с фазовой диаграммой, характерной для гиперболического аттрактора.

Две последние задачи определяют **новизну** работы.

Работа устроена следующим образом. В разделе 1 рассматривается понятие гиперболического хаоса, приводится пример системы, способной генерировать гиперболические хаотические колебания, описывается алгоритм расчёта фазы для стробоскопического сечения и определяется граница области гиперболического хаоса. В разделе 2 описывается алгоритм расчёта распределения локальных ляпуновских показателей и изучаются трансформации такого распределения при изменении управляющих параметров.

Программирование производилось на языке Pascal, программы созданы в среде разработки Lazarus.

1 Исследуемая система и граница области существования гиперболического хаоса на её плоскости параметров

Рассмотрим понятие гиперболического аттрактора. Гиперболический аттрактор – это аттрактор, все траектории которого являются гиперболическими. Это означает, что среди возмущенных по отношению к данной траекторий в линейном приближении можно выделить класс траекторий (I), которые приближаются к исходной, причем в среднем по экспоненте, и класс траекторий (II), приближающихся к исходной в обратном времени, тоже в среднем по экспоненте [6].

Примером гиперболического аттрактора является аттрактор Смейла – Вильямса. Он строится для отображения трехмерного пространства в себя, определенного следующей процедурой. Рассмотрим область в форме тора, растянем ее в длину, сложим вдвое и вложим в исходный тор. При каждой следующей итерации количество «витков» удваивается. Объект, который получается в пределе большого числа итераций, называют соленоидом Смейла – Вильямса [2].

В работе [7] была предложена система, способная демонстрировать аттрактор Смейла – Вильямса — т. н. генератор Кузнецова.

Далее рассмотрим математическую модель генератора Кузнецова, описываемую следующими уравнениями [8]:

$$\begin{gathered}\ddot{x} - \left(h_1 + A_1 cos\left(\frac{2\pi}{T}\right) - x^2\right)\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon_1 y cos\omega t,\\ \ddot{y} - \left(h_2 - A_2 cos\left(\frac{2\pi}{T}\right) - y^2\right)\dot{y} + (2\omega_0)^2 x = \varepsilon_2 x^2,\end{gathered} \quad (1)$$

где h_1, h_2 – управляющие параметры,

A_1, A_2 – амплитуды внешнего воздействия на управляющий параметр,

T – период внешней модуляции,

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – параметры связи,

ω, ω_0 – характеристические частоты.

Эта модель состоит из двух подсистем. Переменные x и y являются обобщенными координатами осцилляторов. Параметр, отвечающий за диссипацию, вынужден медленно варьироваться в противоположных фазах в одной и другой подсистеме с периодом T и амплитудами A_1 и A_2 вокруг средних значений h_1 и h_2. Из-за модуляции подсистемы становятся активны по очереди [8].

Чтобы исследовать систему на наличие гиперболического хаоса, необходимо использовать соответствующие методы исследования хаотических систем.

Одним из таких методов является анализ динамики фазы. Известно, что в модельном отображении, приводящем к появлению аттрактора Смейла-Вильямса, фаза удваивается за одну итерацию — т. е. подчиняется отображению Бернулли $\varphi^{n+1} = 2\varphi^n + const$, которое как известно, хаотично и характеризуется положительным показателем Ляпунова $\Lambda = ln2$ [8]. Таким образом, вид отображения для фазы можно использовать для определения типа динамики на аттракторе.

В рассматриваемой нами математической модели генератора Кузнецова две подсистемы. Временные эволюции фаз первой и второй подсистем, определяются как [8]

$$\varphi_1 = arg\left(x + \frac{i\dot{x}}{\omega}\right), (2)\ \varphi_2 = arg\left(y + \frac{i\dot{y}}{2\omega}\right). (3)$$

Можно утверждать, что гиперболический (или близкий к нему по своим свойствам) хаос наблюдается, когда фазы, рассматриваемые стробоскопически, изменяются примерно вдвое и, в хорошем приближении, описываются отображением Бернулли.

В ходе работы был создан код программы для расчета фаз f_n, f_{n+1} в двух последовательных точках стробоскопического сечения, которые рассчитываются параллельно с переменными системы.

Чтобы использовать результаты анализа отображения для фазы для определения границы области гиперболического хаоса, необходимо установить, по каким маршрутам в пространстве параметров мы будем двигаться при построении графиков для фазы. Это можно определить, построив и проанализировав карту показателя Ляпунова для стробоскопического сечения на плоскости параметров связи $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

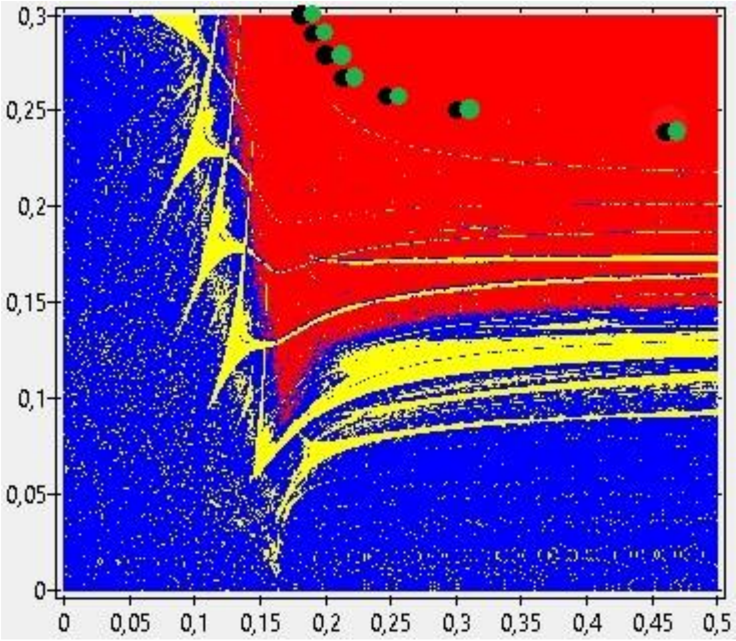
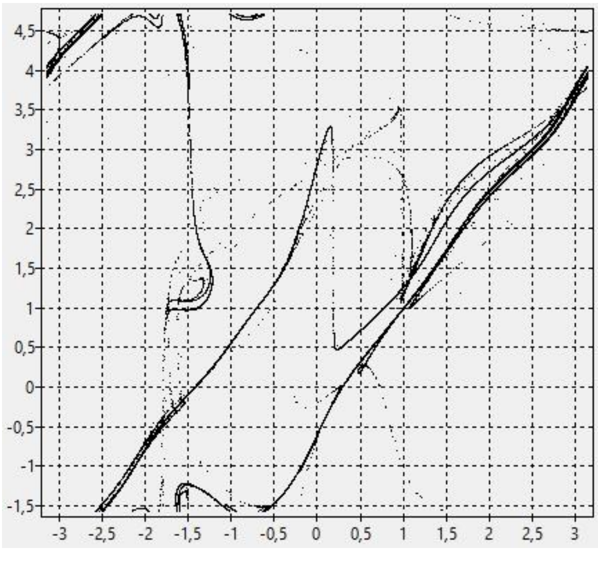


Рисунок 1 - Карта старшего показателя Ляпунова генератора Кузнецова (1) в плоскости параметров $(\varepsilon_2, \varepsilon_1)$ при параметрах $a = 4; h_{1,2} = 1; \omega = 2\pi, T = 8$. Жёлтый цвет соответствует периодическому режиму, синий — квазипериодическому, красный — хаотическому. Чёрные и зелёные точки определяют интервалы, внутри которых проходит граница области гиперболического хаоса.

Такая карта приведена на Рисунке 1. Жёлтым цветом обозначены области отрицательных значений старшего показателя Ляпунова в стробоскопическом сечении, что соответствует периодическому режиму, синим — близких к нулю, что соответствует квазипериодическому режиму, красным — положительных, что соответствует хаотическому режиму. В этой работе нас будет интересовать область больших значений параметров связи — можно отметить, что в соответствующей части карты наблюдается однородная — без окон периодичности — область существования хаотической динамики. В ходе работы будем рассматривать параметр связи ε_1 в диапазоне от 0,24 до 0,3; параметр связи ε_2 будем увеличивать для каждого значения ε_1 в диапазонах вблизи границы перехода к однородной хаотической области. В указанных интервалах параметров будем производить построение отображений для фаз и анализировать систему на наличие гиперболического хаоса, сравнивая вид фазовой диаграммы с отображением Бернулли.

На Рисунке 2 можно видеть пример того, как отображение для фазы эволюционирует при увеличении ε_2. В точке, соответствующей области негиперболического хаоса, функция, описывающая эволюцию фазы, возрастает немонотонно (Рисунок 2а). Далее, на участке с отрицательным наклоном на «основной» ветви графика происходит разрыв, и поведение «основной» ветви становится опять монотонным, но уже соответствующим удвоению фазы за одну итерацию стробоскопического сечения, т. е. вид графика становится качественно схож с отображением Бернулли (Рисунок 2б) - и мы можем утверждать, что эта точка на плоскости параметров уже находится внутри области существования гиперболического (или близкого к нему по свойствам) хаоса. При дальнейшем увеличении ε_2 качественно вид графика не изменяется, происходит продвижение вглубь области существования гиперболического хаоса. Т.е. в данном случае граница области сущестования гиперболического хаоса проходит между точками, соответствующими Рисункам 2а и 2б.

а) 

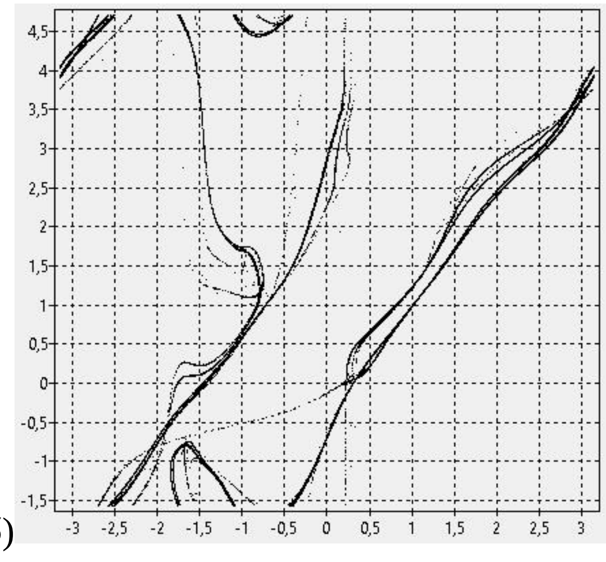
б) 

Рисунок 2 — Фаза генератора Кузнецова (1) в плоскости (f_n, f_{n+1}) при параметрах связи ε_2 ((а) 0,2; (б) 0,21). Параметр $\varepsilon_1 = 0{,}28$.

Точки, соответствующие интервалам, через которые проходит граница области гиперболического хаоса при различных значениях ε_1, отмечены на карте старшего показателя Ляпунова для стробоскопического сечения генератора Кузнецова (Рисунок 1). В зеленых точках графики для фаз, изображенные на рисунках, эквивалентны отображению Бернулли, что свидетельствует о наличии гиперболического хаоса. В черных точках режим гиперболического хаоса не наблюдается. Эти точки предшествуют переходу к режиму, в котором демонстрируется гиперболический хаос. Таким образом, делаем вывод, что граница области гиперболического хаоса проходит между черными и зелеными точками на карте старшего ляпуновского показателя.

2 Эволюция распределения локальных ляпуновских показателей при переходе к гиперболическому хаосу

Одним из методов, позволяющих получить информацию о поведении траектории на разных частях аттрактора, является построение распределения локальных ляпуновских показателей. Локальный ляпуновский показатель характеризует скорость удаления друг от друга изначально близких траекторий на аттракторе за период T и определяется как:

$$\Lambda = \frac{\sum ln\left|\frac{\tilde{x}}{\varepsilon}\right|}{T}, (5)$$

где $\tilde{x}$ - вектор возмущения.

Для исследования перехода к гиперболическому хаосу анализ изменения таких распределений может быть полезным, так как однородно-гиперболический аттрактор характеризуется наличием неустойчивости на всех своих участках, и для него распределение локальных показателей должно лежать в положительной области.

Распределение строилось путем расчета локальных ляпуновских показателей на малых участках траектории, где k – длина одного участка траектории.

В ходе работы для нас представляет интерес область больших значений параметров связи. Рассмотрим, как будут изменяться распределения локальных ляпуновских показателей по величине при переходе в область гиперболического хаоса по различным маршрутам, одновременно анализируя отображения для фазы. На Рисунке 3 приведена карта старшего ляпуновского показателя с отмеченными на ней маршрутами, проходящими через точки, в которых строились фазы и распределения локальных ляпуновских показателей по величине. Они проходят вдоль значений параметра ε_1 равных 0,16 (соответствует переходу от квазипериодического режима к режиму негиперболического хаоса); 0,24 (переход в область нижней границы области гиперболического хаоса); 0,3 (переход в область гиперболического хаоса), а также вдоль значения параметра ε_2 равного 0,4 (также соответствует переходу в область гиперболического хаоса).

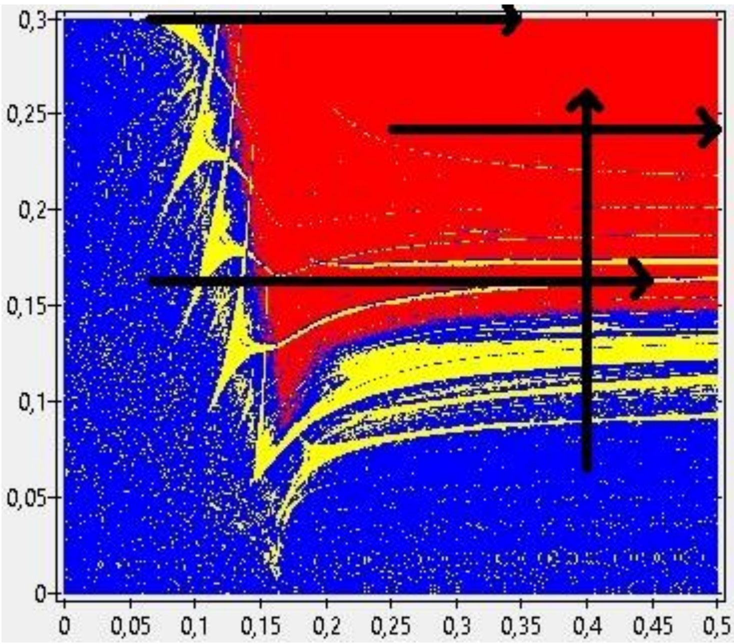
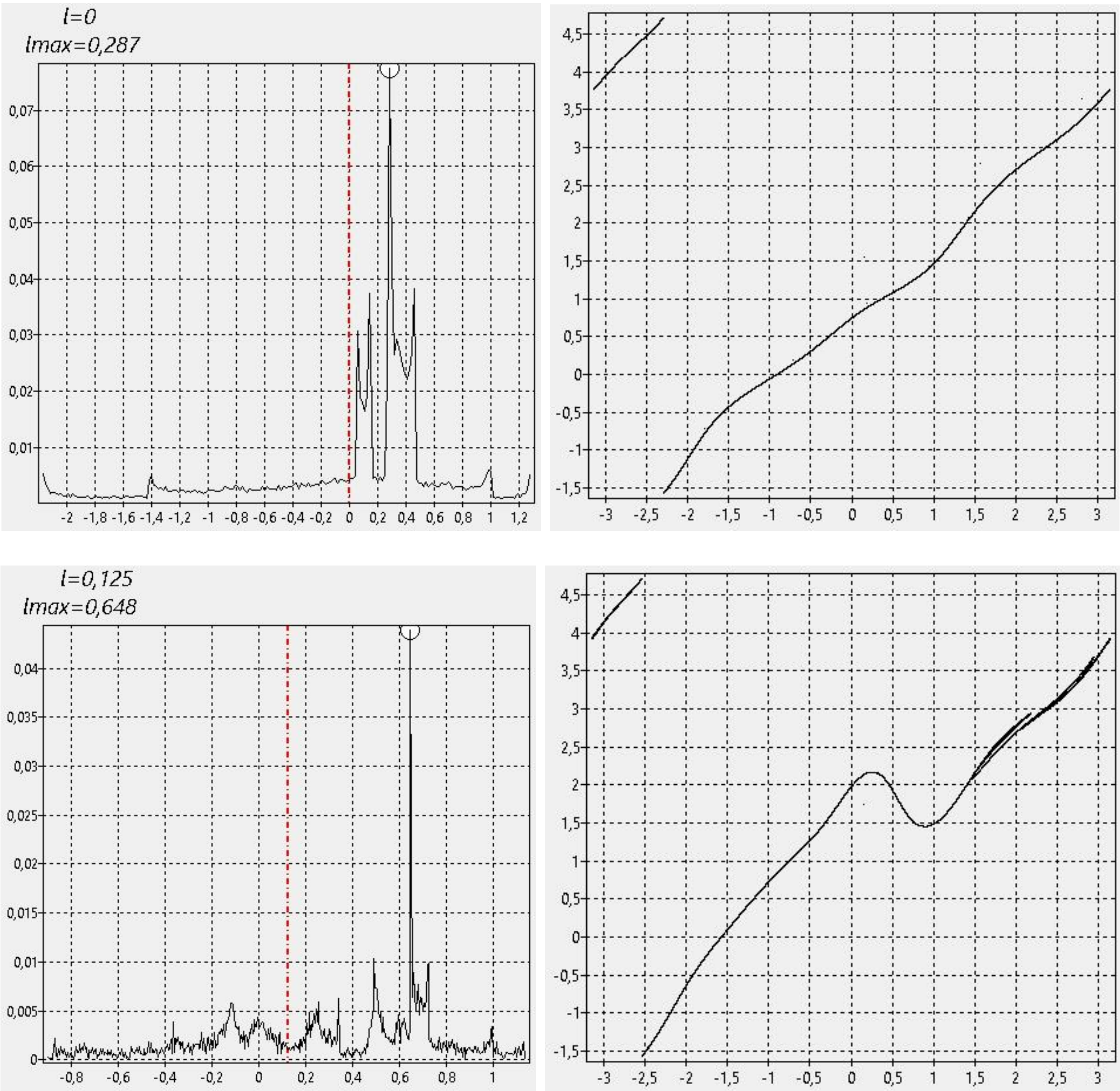


Рисунок 3 - Карта старшего показателя Ляпунова генератора Кузнецова (1) в плоскости параметров $(\varepsilon_2, \varepsilon_1)$ при параметрах $a = 4; h_{1,2} = 1; \omega = 2\pi, T = 8$. Отмечена граница области существования гиперболического хаоса (чёрные и зелёные точки) и маршрутами (чёрные стрелки), вдоль которых изучались изменения отображения для фазы и распределения локальных ляпуновских показателей по величине.

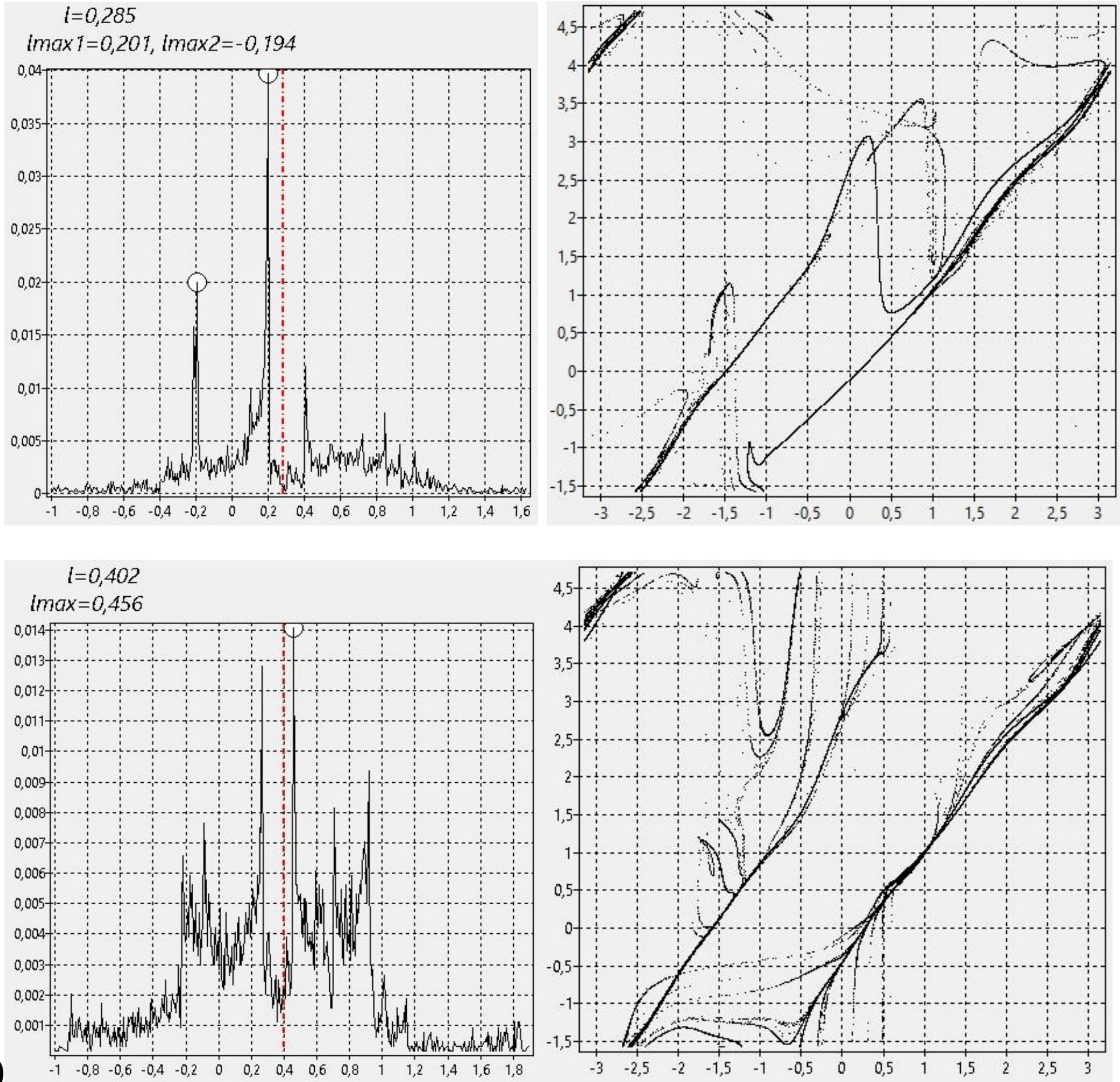
Ниже, на Рисунках 4 — 7, приводятся результаты численного моделирования в виде графиков для фаз, распределений локальных ляпуновских показателей для стробоскопического сечения генератора Кузнецова при различных значениях параметров связи. Все расчеты производились при параметрах $a = 4; h_{1,2} = 1; \omega = 2\pi, T = 8$. Буквой l на рисунках с распределениями обозначен ляпуновский показатель, рассчитанный на большом интервале времени (не путать с локальным ляпуновским показателем), также рассчитаны значения локальных показателей Ляпунова, соответствующим пикам на графике распределения, они обозначены как $lmax$ (в случае, если имеется один явно доминирующий пик) либо $lmax1$ и $lmax2$ (в случае, если можно выделить два доминирующих пика). Построения производились при $k = 1$, где k – количество итераций стробоскопического сечения для расчета локального ляпуновского показателя. Красной вертикальной штрихпунктирной линией на рисунках отмечено значение ляпуновского показателя.



а)

б)

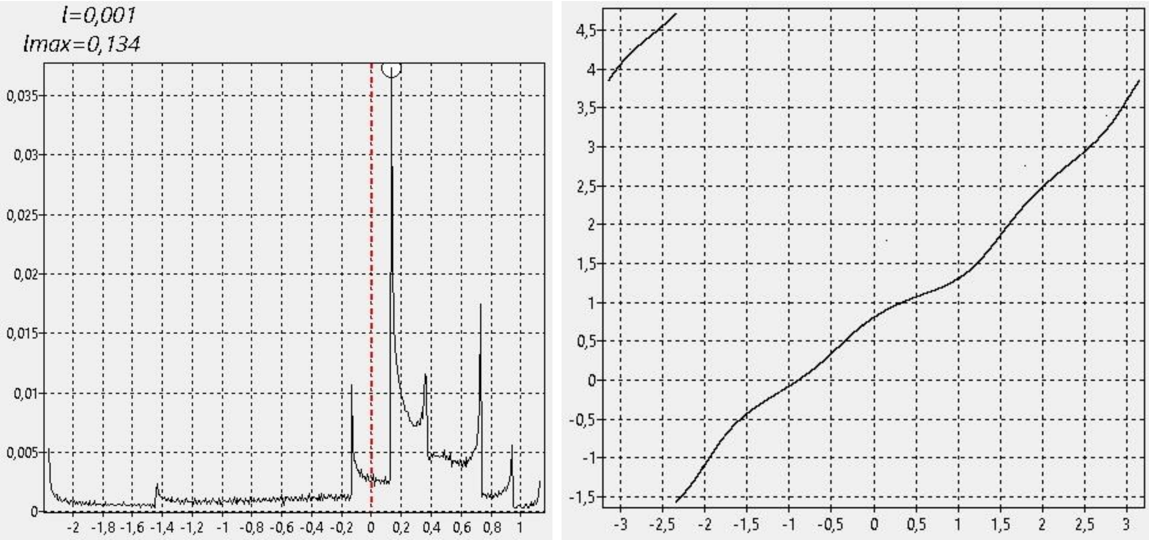
Рисунок 4 – Распределения локальных ляпуновских показателей l (слева) в плоскости (p, l) и фазы (справа) в плоскости (f_n, f_{n+1}) для стробоскопического сечения при параметрах связи ε_2 ((а) 0,07; (б) 0,45). Параметр $\varepsilon_1 = 0{,}16$.



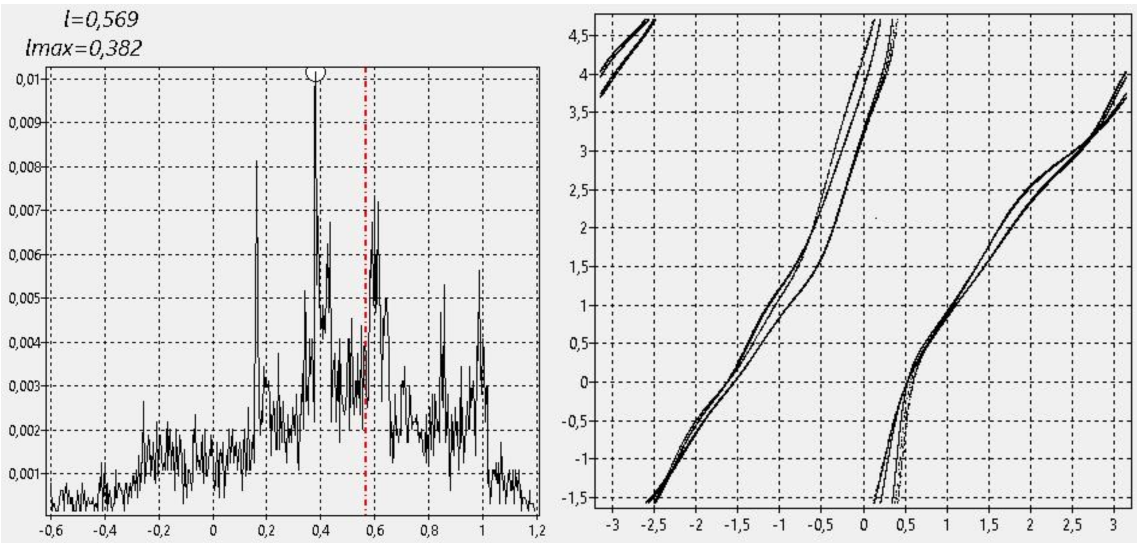
а)

б)

Рисунок 5 Распределения локальных ляпуновских показателей l (слева) в плоскости (p, l) и фазы (справа) в плоскости (f_n, f_{n+1}) для стробоскопического сечения при параметрах связи ε_2 ((а) 0,25; (б) 0,5). Параметр $\varepsilon_1 = 0{,}24$.

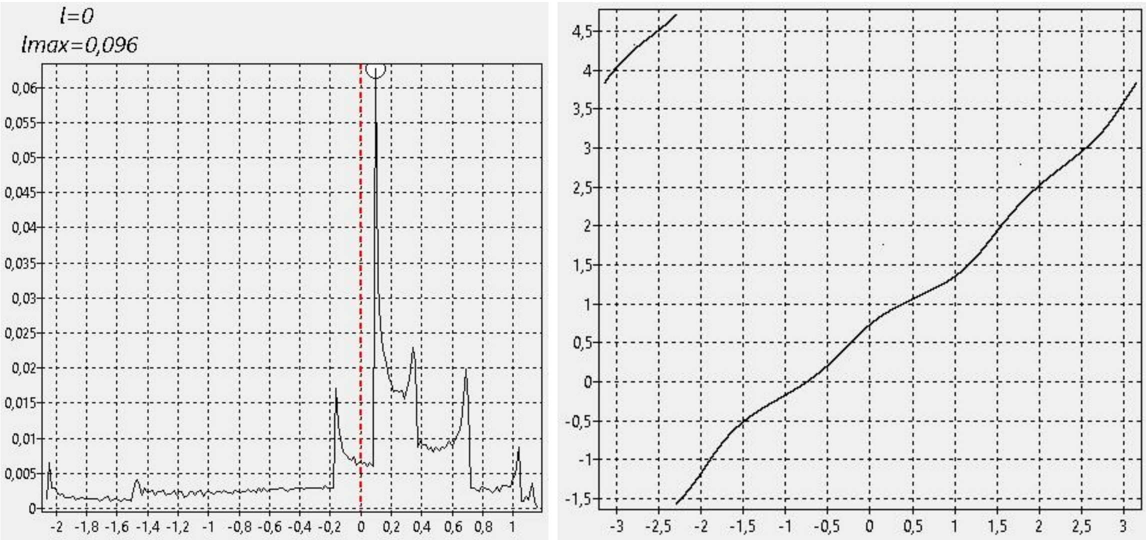


а)

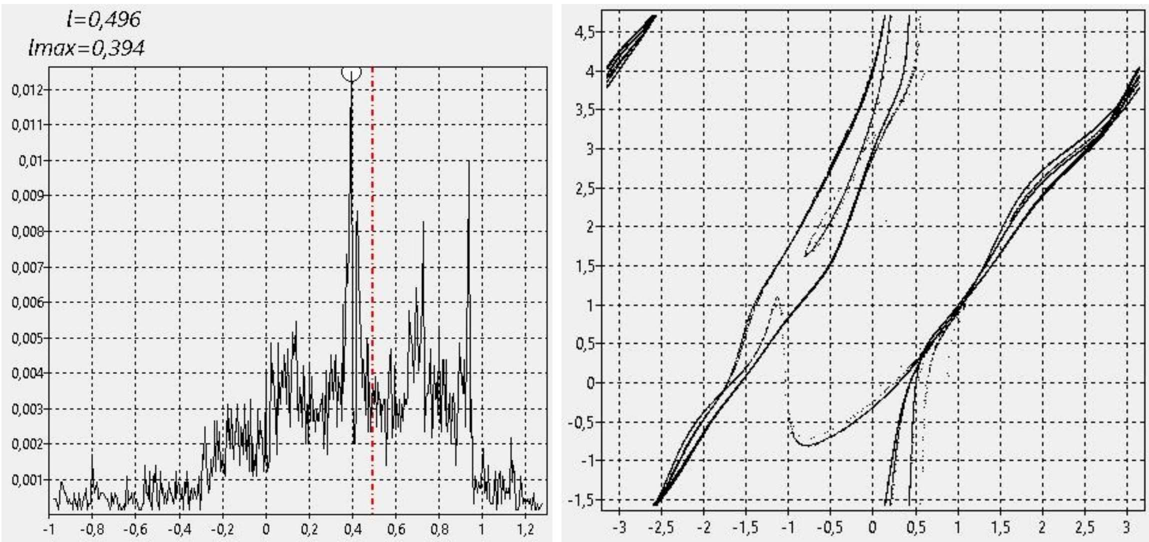


б)

Рисунок 6 – Распределения локальных ляпуновских показателей l (слева) в плоскости (p, l) и фазы (справа) в плоскости (f_n, f_{n+1}) для стробоскопического сечения при параметрах связи ε_2 ((а) 0,07; (б) 0,35). Параметр $\varepsilon_1 = 0{,}3$.



а)



б)

Рисунок 7 – Распределения локальных ляпуновских показателей l (слева) в плоскости (p, l) и фазы (справа) в плоскости (f_n, f_{n+1}) для стробоскопического сечения при параметрах связи ε_1 ((а) 0,07; (б) 0,26). Параметр $\varepsilon_2 = 0{,}4$.

По графикам распределений и фаз видим, что они соотносятся с картой старшего ляпуновского показателя и соответствуют динамическим режимам в тех точках, для которых производилось построение. Распределения в точках с квазипериодической динамикой имеют характерный вид: наблюдается несколько пиков, чередующихся с участками, где распределение выглядит относительно равномерным. В точках, где наблюдается хаотическая динамика, распределение имеет один или два пика, на остальных участках оно довольно неравномерное, имеется большой разброс значений по оси ординат, распределение при этом существенно заходит в область отрицательных значений локальных показателей. При продвижении в область гиперболического хаоса относительная высота пиков в целом снижается, и, как правило, не удаётся выделить ярко выраженный второй пик распределения: распределение в целом становится более однородным, большая часть распределения лежит в области положительных значений локальных показателей. При удалении от пика распределение спадает менее резко.

Заключение

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы изучалось изменение характеристик динамических режимов в процессе перехода к гиперболическому хаосу в генераторе Кузнецова. Для расчёта характеристик режимов были созданы программы в среде разрабоки Lazarus. Производился расчёт фазы для стробоскопического сечения и была определена граница области гиперболического хаоса на основе анализа динамики фазы. Рассматривалось понятие локального ляпуновского показателя и производился его расчет. Были построены распределения локальных ляпуновских показателей для стробоскопического сечения генератора Кузнецова при различных параметрах связи. Полученные результаты соответствуют динамическим режимам, демонстрирующим гиперболический хаос, динамике на границе перехода к гиперболическому хаосу и квазипериодической динамике. При продвижении в область гиперболического хаоса относительная высота пиков распределения целом снижается, распределение в целом становится более однородным и смещается в область положительных значений локальных показателей Ляпунова.

Список использованных источников

1 А.С. Дмитриев, А.И. Панас Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002. – 252 с.

2 С.П. Кузнецов Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике: Институт компьютерных исследований, М. - Ижевск, 2013, 488 с.

3 S.P. Kuznetsov Example of blue sky catastrophe accompanied by a birth of Smale - Williams attractor. Regular and Chaotic Dynamics, 15, 2010, No. 2-3, 348-353.

4 O.B. Isaeva, S.P. Kuznetsov, I.R. Sataev A "saddle-node" bifurcation scenario for birth or destruction of a Smale-Williams solenoid. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 22, 2012, iss. 4, 043111.

5 O.B. Isaeva, I.R. Sataev Bernoulli mapping with hole and a saddle-node scenario of the birth of hyperbolic Smale–Williams attractor. Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity, 9, 2020, iss. 1, 13-26.

6 С.П. Кузнецов Динамический хаос, М.: Физматлит, 2006, 356 с.

7 S.P.Kuznetsov Example of a Physical System with a Hyperbolic Attractor of the Smale-Williams Type. Phys. Rev. Lett., 95, 2005, 144101

8 O.B. Isaeva, S.P. Kuznetsov, I.R. Sataev, D.V. Savin, E.P. Seleznev Hyperbolic Chaos and Other Phenomena of Complex Dynamics Depending on Parameters in a Nonautonomous System of Two Alternately Activated Oscillators, International Journal of Bifurcation and Chaos, 25, 2015, No 12, 1530033