МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теории функций и стохастического анализа

МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧЕ СЖАТОГО ИЗМЕРЕНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 248 группы
направления 09.04.03 — Прикладная информатика

механико-математического факультета
Желтова Евгения Алексеевича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м. наук ______________ П. А. Терехин

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2021

ВВЕДЕНИЕ

Сжатое измерение является техникой обработки сигнала для эффективного получения и восстановления сигнала путем нахождения решений для недоопределенных линейных систем. Оно основано на принципе, что посредством оптимизации разреженность сигнала может быть использована для извлечения его из гораздо меньшего числа выборок, чем требуется согласно теореме отсчетов Найквиста – Шеннона. Есть два условия, при которых восстановление возможно. Первое - это разреженность, которая требует, чтобы сигнал был разреженным в некоторой области. Второе - несвязанность, которая применяется как изометрическое свойство, достаточное для разреженных сигналов.

Общей целью инженерной обработки сигналов является восстановление сигнала из набора выборочных измерений. В общем случае, эта задача невозможна, так как не существует способа восстановить сигнал в те промежутки времени, когда сигнал не измерялся.Тем не менее, с предварительными знаниями или предположениями о сигнале оказывается возможным полностью восстановить сигнал из серий измерений получение этой серии измерений называется "сэмплингом"). Со временем инженеры стали лучше понимать, какие предположения являются практичными и как их можно обобщить.

Ранним прорывом в обработке сигналов стала теорема Найквиста – Шеннона. В ней говорится, что если максимальная частота реального сигнала составляет менее половины частоты сэмплинга, то сигнал может быть полностью восстановлен с помощью "синк интерполяции". Основная идея заключается в том, что с предварительными знаниями об ограничениях частот сигнала требуется меньшее количество выборок для восстановления сигнала. Примерно в 2004 году Эммануэль Кэндес, Джастин Ромберг, Теренс Тао и Дэвид Донохо доказали, что, учитывая знание о разреженности сигнала, сигнал может быть реконструирован с еще меньшим количеством выборок, чем требует теорема выборки. Эта идея является основой сжатого измерения.

В данной работе будут подробно разобраны теоретические основы сжатого измерения и методы аппроксимации данного метода. В качестве примера практического использования будет разобрано применения сжатого измерения для магнитно-резонансной томографии. Также в приложении будет приведен код и результат работы алгоритма с применением сжатого измерения. Методы аппроксимации, примененнные к сжатому измерению, позволят ускорить работу данного алгоритма.

Ниже представлены несколько областей, где применяется технология сжатого измерения.

Фотография

Сжатое измерение используется в сенсорах камер мобильных телефонов. Такой подход позволяет сократить расход энергии на получение изображения в 15 раз за счет сложных алгоритмов декомпрессии; вычисление может потребовать реализации вне устройства.

Сжатое измерение также используется в однопиксельных камерах Университета Райса. Bell Labs применили эту технику в однопиксельной камере без объектива, которая делает снимки, используя повторяющиеся снимки случайно выбранных апертур из сетки.Качество изображения улучшается с увеличением количества снимков и, как правило, требует небольшой доли данных обычного изображения, устраняя аберрации, связанные с объективом/фокусом.

Голография

Сжатое измерение может быть использовано для улучшения восстановления изображения в голографии путем увеличения количества вокселей, которые можно вывести из одной голограммы. Он также используется для извлечения изображений из измерений с с недостаточным шагом дискретизации в оптической голографии и голографии миллиметровых волн.

Томография сетей

Сжатое измерение показало выдающиеся результаты в применении сетевой томографии к управлению сетью. Оценка задержки в сети и обнаружение перегрузки сети можно рассматривать как недоопределенные системы линейных уравнений, где матрица коэффициентов является матрицей маршрутизации сети. Более того, в Интернете матрицы сетевой маршрутизации обычно удовлетворяют критерию использования сжатого измерения.

1 Основное содержание работы

Основная техника, используемая для достижения этой цели, основана на нелинейных разреженных представлениях. Разреженные представления функции являются не только мощным теоретическим инструментом, но также они используются во многих приложениях для обработки изображений/сигналов и численных расчетов. Разреженность - очень важное понятие в прикладной математике.

Начнем с общей постановки задач математической обработки сигналов, связанных с разреженными представлениями. Эта постановка состоит из трех компонентов, которые будут описаны ниже: предположения о сигнале, задачи и методы восстановления сигнала. Будет дано только краткое и схематичное описание этого параметра в порядке, чтобы проиллюстрировать идею.

Во-первых, предполагается, что на сигнал наложены следующие условия:

(**A1**) Строгая разреженность. Обычно, сигнала (функции) f означает, что дана система функций (словарь) $\mathcal{D}$ такая, что f имеет представление в виде линейной комбинации не более чем из k элементов из словаря (f является k-разреженной по $\mathcal{D}$):

$$f = \sum_{j=1}^{k} c_j g_j, g_j \in \mathcal{D}, j = 1, ..., k.$$

Ясно, что в случае конечного словаря, предположение (**A1**) эквивалентно предположению, что $\sigma_k(f, \mathcal{D}) = 0$. Более слабая форма предположения разреженности (**A1**) выглядит следующим образом:

(**A2**) Приблизительная разреженность. Описывается разреженность свойств f с помощью коэффициента затухания последовательнсти $\{\sigma_m(f, \mathcal{D})\}_{m=1}^{\infty}$ с лучшими m-членными аппроксимациями f по $\mathcal{D}$. Другими словами, это предположение означает, что f принадлежит к какому-то классу аппроксимации.

Заменяя класс аппроксимации классом гладкости, получаем другой тип предположения:

(**A3**) Сжимаемость. Предположим, что f представима в виде:

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j, g_j \in \mathcal{D}, j = 1, ..., \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^{\beta} \leq R^{\beta}, \beta \in (0, 1] \,.$$

Обсудим два варианта главного подхода к восстановлению сигнала f. Под восстановлением сингала f понимается нахождение его представления по словарю $\mathcal{D}$. Существует два широко используемых типа восстановления в обработке сигналов:

(**T1**) Точное восстановление;

(**T2**) Приближенное восстановление.

Как правило, подход (**T1**) применяется только в случае предположения о разреженности (**A1**). В других случаях применяетя (**T2**). В случае приближенного восстановления необходимо уточнить, как измеряется погрешность приближенного восстановления. Существует два варианта определения погрешности, которые ведут к разным постановкам. Пусть

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j, g_j \in \mathcal{D}, j = 1, ...,$$

и ее m-членная аппроксимация имеет вид

$$A_m(f) = \sum_{i=1}^{m} a_i \phi_i, \phi_i \in \mathcal{D}, i = 1, ..., m.$$

В первом способе измеряется погрешность между f и $A_m(f)$ по норме $\|\cdot\|$ пространства, которому принадлежит функция f (пространство данных). Тогда соответствующая ошибка выглядит следующим образом: $\|f - A_m(f)\|$. Во втором способе измеряется погрешность между f и $A_m(f)$ по норме пространства, которому принадлежат коэффициенты функции f (пространство коэффициентов). Например, если $\phi_i = g_{j(i)}, i = 1, ..., m$, тогда погрешность по норме ℓ_2 пространства коэффициентов будет задана следующим образом:

$$\|f - A_m(f)\|_{\ell_2}^2 = \sum_{i=1}^{m} \left|a_i - c_{j(i)}\right|^2 + \sum_{j \neq j(i), i=1,...,m} c_j^2.$$

Затем мы выбираем метод восстановления и изучаем его пригодность (эффективность) для той задачи, которая должна быть решена исходя из сделанных выше предположений. Обсуждаются только теоретические результаты, которые измеряют эффективность данного метода в терминах величины погрешности. Очевидно, что качество метода (коэффициент затухания погрешности) определяется системой представления $\mathcal{D}$.

В последнее время, "сжатое измерение" (Compressed Sensing или Compressive Sampling) привлекает все большее внимание как математиков, так и специалистов по информатике. "Сжатое измерение" понимается как метод экономного восстановления неизвестной функции, заданной на конечном множестве мощности m, т.е. вектора $u \in \mathbb{R}^m$ по информации, полученной измерениями скалярных произведений $\langle u, \varphi_j \rangle$, $\varphi_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, ..., n$. При этом целью является построение алгоритма восстановления (аппроксимации) функции u по информации $y = u(\langle u, \varphi_1 \rangle, ..., \langle u, \varphi_n \rangle) \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что наиболее важным является случай, когда число измерений n много меньше, чем m. Здесь важным шагом является построение измеряющего множества векторов $\varphi_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, ..., n$, которое оказывается хорошим для всех векторов $u \in \mathbb{R}^m$. Ясно, что термины экономный и хороший должны быть более точно определены в математической постановке задачи. Например, термин "экономный" может означать, что используется полиномиальный по времени работы алгоритм. Естественный вариант постановки задачи, которая обсуждается в данной статье, основан на использовании понятия разреженности. Разреженные представления функции являются не только эффективным аналитическим инструментом, но и находят применение во многих прикладных областях таких, как обработка изображений или сигналов и вычислительная математика. Нахождение разреженных представлений основано на использовании понятия m-членной аппроксимации целевой функции элементами некоторой заданной системы функций (словаря). Подчеркнем, что элементам словаря, применяемым в m-членной аппроксимации, разрешено зависеть от аппроксимируемых функций. Аппроксимации этого типа весьма эффективны. Будем говорить, что вектор $u \in \mathbb{R}^m$ является k-разреженным, если он имеет самое большее k ненулевых координат. Для заданной пары (m, n) мы хотим понять, какова наибольшая разреженность $k(m, n)$, при которой существует множество векторов $\varphi_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, ..., n$, и экономный алгоритм A отображения y в $\mathbb{R}^m$ такой, что для любого вектора u разреженности, $k(m, n)$ имеет место точное восстановление $A(y(u)) = u$. Другими словами, мы хотим описать матрицы Φ со строками $\varphi_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, ..., n$, такие, что существует экономный алгоритм решения указанной выше задачи "разреженного восстановления".

Задача разреженного восстановления в ряде случаев оказывается эквивалентной задаче нахождения наиболее разреженного вектора (столбца) $u^0 := u^0_\Phi(y) \in \mathbb{R}^m$:

$$min \left\|v\right\|_0 \text{ при условии, что } \Phi v = y, \tag{P_0}$$

где $\left\|v\right\|_0 := |supp(v)|$. Исследователи предложили некоторый экономный алгоритм и начали систематическое изучение следующего вопроса. Для каких матриц измерения Φ сильно невыпуклая комбинаторная задача оптимизации (P0) должна быть эквивалентна соответствующей выпуклой релаксации этой задачи

$$min \left\|v\right\|_1 \text{ при условии, что } \Phi v = y, \tag{P_1}$$

где $\left\|v\right\|_1$ обозначает l_1-норму вектора $v \in \mathbb{R}^m$? Хорошо известно, что задача (P_1) решается методами линейного программирования. Алгоритм l_1-минимизации A_Φ, соответствующий задаче (P_1), является экономным алгоритмом, который и рассматривается в данной работе. Решение задачи (P_1) обозначим через $A_\Phi(y)$. Известно, что для M-когерентных матриц Φ имеет место соотношение $u^0_\Phi(\Phi u) = A_\Phi(\Phi u) = u$ при условии, что u является k-разреженной функцией с $k < (1 + 1/M)/2$.

На практике сигналы редко бывают разреженныvми, в отличие от рассмотренных выше случаев. В качестве обобщения можно сказать, что x является "k-сжимаемым", если у x имеется k компонентов, которые "намного больше" по модулю, чем оставщиеся $N - k$ компонент. Это может быть так в случае с, например, задачи с монетами, если большинство монет являются "приемлимыми", то есть лежат в пределах небольшой погрешности ± 0.001 грамма, но есть несколько монет, существенно отличающиеся от номинала. Многие возникающие сигналы являются сжимаемыми в том смысле, как, например, фотографии, сделанные цифровой камерой. Алгоритм сжатого измреения восстанавливает такие сигналы почти так же хорошо, как сохранение самых больших компонентов, но без обширного просмотра всех компонентов, которое было бы необходимо, чтобы идентифицировать все компоненты, чтобы определить, какие из них являются наибольшими.

Алгоритм сжатого измерения также может быть адаптирован для работы с зашумленным сигналами; в этом случае задача l^1-минимизации становится

$$min\,\|x_1\| \text{ с учетом } \|\Phi x - b\|_2 \leq \epsilon,$$

где ϵ ограничивает количество шума. Это по-прежнему дает хорошие оценки в смысле вычислительной эффективности, и задача остается стабильной, поскольку небольшие ошибки в b относительно мало влияют на решения, полученные алгоритмом.

2 Заключение

Различные приложения алгоритма сжатого измерения постоянно расширяются, включая, среди прочего, медицинские изображения, коммуникации, преобразование информации из аналогового формата в цифровой, анализ географических данных, радары, генетический скрининг. Например, алгоритм сжатого измерения может значительно уменьшить время сканирования и потенциально повысить разрешение магнитно-резнансной томографии. Микроматричный анализ с помощью алгоритма сжатого измерения совмещает тестирование и принципы сжатого измерения для точного измерения генетических последовательностей для, например, определения патогенов в образцах воды. Сжатое измерение также используется для воспроизведения изображения процесса главного толчка при землетрясении.

Так или иначе, сжатое измерение показывает себя как эффективная и гибкая парадигма, которая продолжит быть объектом математических исследований, находящие применеие в других областях.

Также, как упоминалось во введении, технология сжатого измерения используется в магнитно-резонансной томографии. Краткие итоги этого использования приведены ниже.

В настоящее время сжатое измерение стало вполне зрелой технологией, что подтверждается недавним одобрением FDA (Food and drug administration – Управление по санитарному надзору за качеством пищевых продуктов и медикаментов (США)). Крупные поставщики начали продавать программное обеспечение для восстановления данных с помощью сжатого измерения, и многие клинические исследователи положительно оценили его клиническую полезность.

Несмотря на эту зрелость, вот пример технической проблемы сжатого измерения: вычислительная сложность алгоритма относительно высока, и при высоком ускорении все еще присутствует ухудшение качества изображения. Хотя новейшие современные методы CS, такие как подход со структурированной матрицей Ганкеля, могут решить проблемы ухудшения качества, они также увеличивают вычислительную сложность, что может помешать клиническому рабочему процессу.

К счастью, за последние несколько лет область реконструкции магнитнорезонансных изображений быстро изменилась благодаря успешной демонстрации технологий восстановления изображений, полученных с помощью магнитного резонанса, на основе глубокого обучения. Внезапную популярность подходов глубокого обучения можно объяснить восстановлением в реальном времени, несмотря на значительное улучшение качества изображения. Таким образом, при первоначальном представлении эти методы рассматривались как совершенно разные технологии, не имеющие ничего общего с сжатым измерением. Однако недавний теоретический анализ показал, что глубокая сверточная нейронная сеть тесно связана с разложением матрицы Ганкеля. Таким образом, все еще можно утверждать, что МРТ со сжатым измерением возродила интерес в форме глубокого обучения.