

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОС-  
УДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»  
Кафедра дискретной математики и информационных технологий

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ, АЛГОРИТМОВ  
И ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ  
ЗАДАЧ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ**

АВТОРЕФЕРАТ

НАУЧНО-КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ  
(ДИССЕРТАЦИИ)

аспиранта 4 курса  
направления 09.06.01 – Информатика и вычислительная техника  
направленности «Математическое моделирование, численные методы и ком-  
плексы программ»

**ЗАВРАЖНОВА ЮРИЯ АЛЕКСАНДРОВИЧА**

Научный руководитель,  
профессор д.э.н., к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_

Кальянов Л.В.

Зав. кафедрой,  
доцент, к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_

Тяпаев Л.Б.

Саратов 2021

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы

Данная работа посвящена проблеме существования решений смешанных задач уравнений в частных производных, допускающих разделение переменных по методу Фурье, на примере смешанной задачи с двумя независимыми переменными. Термин смешанная задача обусловлен тем, что в задаче участвуют как граничные, так и начальные условия.

Проанализировано основное содержание метода Фурье как строгого математического метода. Фактически, это проблема отыскания собственных значений и собственных функций такого оператора, а также решения соответствующей задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Стандартная процедура обоснования метода Фурье при доказательстве требуемой гладкости формальных рядов базируется на обобщенном принципе суперпозиции решения, согласно которому формальное решение смешанной задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям будет ее решением, если все его частные производные, входящие в дифференциальное уравнение, могут быть найдены путем почленного дифференцирования данного ряда нужное число раз. Законность этих операций над данными рядами накладывает весьма жесткие требования к исходным данным смешанной задачи, не вызванные самой ее постановкой. Кроме того, эти требования, формулируемые в терминах гладкости коэффициентов дифференциального уравнения и начальных функций, должны еще обеспечить равномерную сходимость формально продифференцированных рядов. Все это приводит к грубым достаточным условиям существования искомых классических решений.

**Цель** разработка математического аппарата и численно-аналитических методов моделирования смешанных задач уравнений в частных производных в линейных и не линейных средах.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Анализ структуры проблемной области, выявить критические варианты и расширить текущую область границы решения задач.
2. Разработка моделей решения смешанных задач.

3. Разработка алгоритмов выбора оптимальной структуры для решения смешанной задачи в частных производных.

4. Разработка численной схемы для алгоритмов решения смешанной задачи в частных производных.

5. Разработка методики и программного обеспечения для расчёта и анализа решений, полученных с помощью смешанной задачи в частных производных в различных средах.

### **Научная новизна**

1. Предложен новый подход разделения ряда для решения смешанной задачи в частных производных.

2. Получено необходимое условие разрешимости поставленной задачи для решения смешанной задачи в частных производных.

3. Получено условие для гладкой составляющей смешанной задачи в частных производных.

4. Получена теорема о существовании решения при разделении ряда для решения смешанной задачи в частных производных.

5. Разработаны алгоритмы для моделирования системы решения дифференциальных уравнений смешанной задачи в частных производных с предложенными входными параметрами и оценки погрешностей местоопределения в различных условиях.

6. Разработаны программные модули, которые реализуют численные методы для решения волнового уравнения с помощью резольвентного подхода, для решения смешанной задачи волнового уравнения с нелокальным условием сохранения, для решения волнового уравнения с использованием квантового подхода в виде библиотек для прикладных программ Matlab, Mathematica, MatCat, MPI Visio, IBM QFT.

### **Практическая значимость результатов работы**

Разработаны алгоритмы (численный метод для решения волнового уравнения с помощью резольвентного подхода, для решения смешанной задачи волнового уравнения с нелокальным условием сохранения, для решения волнового уравнения с использованием квантового подхода), преимущество которых заключается в скорости работы, оценки погрешности и вычислительной

сложности по сравнению от конечно-разностного метода, метода разложения и метода прогонки.

Разработано программное обеспечение позволяющее решать смешанные задачи в частных производных в том числе для решения задач продольных звуковых колебаний в газе, жидкости, твердом теле, поперечных колебаний струны, передвижение объекта в пространстве и в вакууме.

### **Объект исследования**

Объектом исследования является решение смешанных задач уравнений в частных производных.

### **Предмет исследования**

Предметом является разработка методов, алгоритмов и программного обеспечения для решения смешанных задач уравнений в частных производных.

### **Методы и материалы исследования**

При решении поставленных задач в диссертационной работе использовались методы вычислительной математики, математической статистики, численной аппроксимации функций и статистических испытаний.

При проведении эксперимента использовался комплекс кластерного оборудования IBM (Процессоры AMD Ryzen™ Threadripper™ PRO, серверы Compaq AlphaServer SC, платформа RS/6000) и ПО Visio Studio.

### **Основные положения, выносимые на защиту**

Методы для решения уравнений в частных производных, преимущество которых заключается в скорости работы, оценки погрешности и вычислительной сложности по сравнению от конечно-разностного метода, метода разложения и метода прогонки.

Программные модули позволяют решать смешанные задачи в частных производных в том числе для решения задач продольных звуковых колебаний в газе, жидкости, твердом теле, поперечных колебаний струны, передвижение объекта в пространстве и в вакууме.

### **Достоверность и обоснованность**

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивается корректностью математической постановки задачи теории дифференци-

альных уравнений, применением строгих математических методов, сравнением результатов с известными результатами других авторов.

### **Личный вклад**

Автор лично разработал алгоритмы (Адаптивный подход для решения волнового уравнения с помощью резольвентного подхода, численный метод для смешанной задачи волнового уравнения с нелокальным условие сохранения, Решение волнового уравнения с использованием квантового подхода) и подпрограммы, позволяющие автоматизировать процесс построения моделей в плоском и пространственном случаях. Выполнил все описанные в работе численные расчеты на основе алгоритмов на разработанном программном комплексе.

Автором лично выведены следующие теоремы: Теорема 1.2, Следствие 1.1, Следствие 1.2, Лемма 1.1, Лемма 1.2, Теорема(разложимости), Теорема 1.3, Теорема 3.1.

### **Публикации**

Основное содержание работы опубликовано в 3 печатных работах, из них 2 статьи в рецензируемых журналах, входящих в перечень журналов, рекомендуемых ВАК, 1 статьи в рецензируемых журналах.

На регистрации в патентном отделе находятся 2 программы (на основании методов - Адаптивный подход для решения волнового уравнения с помощью резольвентного подхода и Численный метод для смешанной задачи волнового уравнения с нелокальным условие сохранения).

### **Объем и структура работы**

Работа состоит из введения, 5 глав, заключения, списка литературы. Общий объем работы составляет 116 страницы, 22 рисунка, 1 таблицы, 6 страниц библиографии, включающей 57 наименований.

## Содержание работы

Введение содержит постановку задачи, краткий обзор исследований, непосредственно примыкающих к теме диссертации, а также, приводится краткое содержание работы.

В первой части вводится в рассмотрение однородное гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + p(x)u(x, t) = 0 \quad (1)$$

с вещественным потенциалом

$$p(x) \in C[0, \pi] \quad (2)$$

относительно искомой функции  $u(x, t)$ , удовлетворяющей граничным условиям (где  $\forall$  - для всех значений)

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (3)$$

и начальным данным Коши

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x). \quad (4)$$

Необходимо найти функцию

$$u(x, t) \in C^2(\bar{Q}), \quad (5)$$

удовлетворяющую в обычном смысле уравнению (1) в открытом прямоугольнике  $Q$ , а также граничным (3) и начальным (4) условиям. Приведем некоторые соображения в пользу выбора класса допустимых решений в виде (5), являющимся традиционным в смешанных задачах для гиперболических уравнений.

Покажем, что при этом из существования решения

$$u(x, t) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$$

смешанной задачи (1), (3), (4) следует его принадлежность классу (5). В самом деле, в данном случае задача выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0,$$

$$u(x, 0) = \hat{\varphi}(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

где  $\hat{\varphi}$  – четное  $2\pi$  – периодическое продолжение функции  $\varphi$  по переменной  $x$  с отрезка  $[0, \pi]$  на всю числовую ось.

Сформулированная задача (1)–(5) укладывается в постановку общей смешанной задачи:

$$S_x u(x, t) + R_t u(x, t) = f(x, t), \quad (6)$$

$$S_x = q_0(x) \frac{\partial^k}{\partial x^k} + q_1(x) \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} + \dots + q_k(x),$$

$$R_t = p_0(t) \frac{\partial^m}{\partial t^m} + p_1(t) \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \dots + p_m(t),$$

причем,  $q_0(x), p_0(t) \neq 0 \quad \forall (x, t) \in \bar{Q}$ .

Граничные условия на искомую функцию  $u(x, t)$  при  $x = 0$  и  $x = \pi$  зададим в виде:

$$U_i u(0, t) + V_i u(\pi, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (7)$$

где обыкновенные дифференциальные операторы  $U_i, V_i$  определяются формальными выражениями

$$U_i = a_{i0} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} + a_{i1} \frac{\partial^{k-2}}{\partial x^{k-2}} + \dots + a_{i(k-1)},$$

$$V_i = b_{i0} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} + b_{i1} \frac{\partial^{k-2}}{\partial x^{k-2}} + \dots + b_{i(k-1)}$$

с постоянными коэффициентами.

**Во втором разделе** рассматривается система волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - p(x)u(x, t), \quad (8)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (9)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = 0 \quad (10)$$

Это наиболее простой случай для исследования. Считаем, что  $p(x) \in C[0, 1]$  и комплекснозначная, и

$$\varphi(x) \in C^2[0, 1], \quad \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0. \quad (11)$$

Для гладкой функции  $u = u(x, t)$  в диапазоне области  $\Theta \times [0, T]$  с  $\Theta \subseteq \mathfrak{R}$ . Используется шахматное расположение сетки, в котором компоненты скорости  $u$  и  $w$  расположены в центрах граней ячейки  $(i + 1/2, k)$  и  $(i, k + 1/2)$  соответственно.

Что касается не гидростатического давления  $q$ , то можно использовать два способа присвоения этого неизвестного точкам сетки значения. Эта переменная может быть задана либо в центре ячейки  $(i, k)$  или на лице  $(i, k + 1/2)$ . Выбор зависит от дискретизации вертикального градиента давления, а именно явного Центрального различия и компактная конечно-разностная схема на основе ребер, соответственно.



$$u_{i+1/2,k} = \frac{1}{h_{i+1/2,k}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} u(x) dz, \quad w_{i+1/2,k} = \frac{1}{h_{i,k+1/2}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} w(x) dz$$

$$q_{i,k+1/2} = \frac{1}{h_{i,k+1/2}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} w(x) dz \quad (12)$$

с  $h_{i+1/2,k} = f_k \widehat{H}_{i+1/2}$  и  $h_{i,k+1/2} = \frac{1}{2} \widehat{H}_k$

Дискретизация пространства состоит из двух этапов. Сначала это уравнение интегрируется вертикально по его управляющему объему, а затем к каждому горизонтальному члену уравнения применяется соответствующая конечно-разностная схема. Для слоя  $1 \leq k \leq K$  получается с использованием правила Лейбница, так как следует

$$\int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial h_k u_k}{\partial x} - u \frac{\partial u_i z_k}{\partial x} u_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} + w_{z_{k+1/2}} - w_{z_{k-1/2}} = 0.$$

т.к.

$$w_{k+1/2} = w(z_{k-1/2}) - \frac{\partial z_{k+1/2}}{\partial t} - u(z_{k+1/2}) \frac{\partial z_{k+1/2}}{\partial x}$$

следственно

$$\frac{\partial h_k}{\partial t} + \frac{\partial h_k u_k}{\partial x} + w_{k+1/2} - w_{k-1/2} = 0.$$

От этого из основной задачи

$$\frac{\partial h_k u_k}{\partial t} + \frac{\partial h_k u_k^2}{\partial x} + u_{k+1/2}^2 w_{k+1/2} - u_{k-1/2}^2 w_{k-1/2} +$$

$$+ g h_k \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial h_k q_k}{\partial x} - q_{k+1/2} \frac{\partial z_{k+1/2}}{\partial x} - q_{k+1/2} \frac{\partial z_{k-1/2}}{\partial x} = 0.$$

Далее переходим к конечно-разностной схеме.

Основные методы решения СЛАУ при конечно разностном методе: метод прогонки, метод простых итераций, метод Холецкого.

**В третьем разделе** описан адаптивный метод для решения волнового уравнения с помощью резольвентного подхода чья универсальность метода по сравнению работы конечных разностей и связанные с ним широкие возмож-

ности для разработки параллельных вычислительных алгоритмов делает его эффективным средством решения многомерных краевых задач для дифференциальных уравнений, описывающих процессы распространения, что объясняет стабильный интерес исследователей к этой теме.

Рассмотрено следующие уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t, u(x, t), u_t(x, t)) :$$

$$t_0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y$$

с граничными условиями:  $u(0, y, t) = g_1(y, t), u(X, y, t) = g_2(y, t) : 0 \leq y \leq Y, t_0 \leq t \leq T, u(x, 0, t) = g_3(x, t), u(x, Y, t) = g_4(x, t) : 0 \leq x \leq X, t_0 \leq t \leq T$  и начальный условиями:  $u(x, t) = \varphi(x, y, t) : 0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y, t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ .

Здесь  $x, y, t$  – независимые переменные,  $u(x, t, y)$  – искомая функция,  $u_t$  – функция предыстория искомой функции к моменту  $t$ ,  $\tau$  – величина запаздывания,  $f(x, y, t, u(x, y, t), u_t(x, y))$  – функционал, определённый на  $[0, X] \times [0, Y] \times [t_0, T] \times R \times Q, Q = Q[-\tau, 0]$  – множество функций  $u(\xi)$ , кусочно-непрерывных на  $[-\tau, 0]$  с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа,  $\|u(\cdot)\|_Q = \sup_{\xi \in [-\tau, 0]} |u(\xi)|$ . Будем предполагать, что функционал  $f$  и функции  $\varphi, g_1, g_2, g_3, g_4$  таковы, что задача имеет единственное решение.

Разобьем отрезок  $[0, X]$  на части с шагом  $h_1 = X/N_1, [0, Y]$  на части с шагом  $h_2 = Y/N_2$ , где  $N_1, N_2$  – некоторые целые числа. Введем точки:  $x_i = ih_1, i = 0, 1, \dots, N_1, y_k = kh_2, k = 0, 1, \dots, N_2$ . Разобьем отрезок  $[t_0, T]$  на части с шагом  $\Delta, t_j = t_0 + j\Delta, j = -m, \dots, M$ . Обозначим приближение точного решения  $u(x_i, y_k, t_j)$  через  $u_{i,k}^j$ .

Введем дискретную предысторию точного решения к моменту  $t_j$  при фиксированных  $i, k : \{u_{i,k}^l\}^j = \{u_{i,k}^l : j - m \leq l \leq j\}$ . Оператором интерполяции-экстраполяции назовем отображение:  $I : \{u_{i,k}^l\}^j \rightarrow u_{i,k}^l(\cdot) \in Q[-\tau, \Delta]$ .

Для  $0 \leq s \leq 1$  рассмотрим семейство методов:

$$\frac{u_{i,k}^{j+1} - 2u_{i,k}^j + u_{i,k}^{j-1}}{\Delta^2} = sa^2 \left( \frac{u_{i-1,k}^{j+1} - 2u_{i,k}^{j+1} + u_{i+1,k}^{j+1}}{h_1^2} + \frac{u_{i-1,k-1}^{j+1} - 2u_{i,k}^{j+1} + u_{i+1,k+1}^{j+1}}{h_2^2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& sa^2 \left( \frac{u_{i-1,k}^{j-1} - 2u_{i,k}^{j-1} + u_{i+1,k}^{j-1}}{h_1^2} + \frac{u_{i-1,k-1}^{j-1} - 2u_{i,k}^{j-1} + u_{i+1,k+1}^{j-1}}{h_2^2} \right) + \\
& (1-2s)a^2 \left( \frac{u_{i-1,k}^j - 2u_{i,k}^j + u_{i+1,k}^j}{h_1^2} + \frac{u_{i-1,k-1}^j - 2u_{i,k}^j + u_{i+1,k+1}^j}{h_2^2} \right) + F_{i,k}^j, \\
& i = 1, \dots, N_1 - 1, k = 1, \dots, N_2 - 1, j = 0, \dots, M - 1,
\end{aligned}$$

с граничными:  $u_{0,k}^j = g_1(y_k, t_j)$ ,  $u_{N_1,k}^j = g_2(y_k, t_j)$ ,  $u_{i,0}^j = g_3(x_i, t_j)$ ,  $u_{i,N_2}^j = g_4(x_i, t_j)$  и начальными условиями:  $u_{i,k}^j = \varphi(x_i, y_k, t_j) : -m \leq j \leq 0$ ,  $F_{i,k}^j(v_{i,k}^j)$  - функционал, определенный на  $v_{i,k}^j = I(u_{i,k}^j) \in Q[-\tau, \Delta]$ , связанный с функционалом  $f(x_i, y_k, t_j, u_{i,k}^j)$ .

При  $s = 0$  получается явная схема, при других  $s, 0 \leq s \leq 1$ , при каждом фиксированном  $j$  получаем систему уравнений. Для того чтобы привести систему к виду, при котором ее можно решить методом прогонки, перейдем к факторизованной схеме. Идея метода заключается в замене оператора.

При каждом  $t_j$  определим значения дискретной модели  $y_j =$

$$\begin{pmatrix} u_{0,0}^j & u_{0,1}^j & \dots & u_{0,N_2-1}^j & u_{0,N_2}^j \\ u_{1,0}^j & u_{1,1}^j & \dots & u_{1,N_2-1}^j & u_{1,N_2}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{N_1,0}^j & u_{N_1,1}^j & \dots & u_{N_1,N_2-1}^j & u_{N_1,N_2}^j \end{pmatrix}$$

Введем операторы  $A_1$  и  $A_2$  :

$$A_1 u_i^j = -a^2 \frac{u_{i-1,k}^j - 2u_{i,k}^j + u_{i+1,k}^j}{h_1^2}, 1 \leq i \leq N_1 - 1, A_1 u_{0,k}^j = 0, A_1 u_{N_1,k}^j = 0,$$

$$A_2 u_i^j = -a^2 \frac{u_{i,k-1}^j - 2u_{i,k}^j + u_{i,k+1}^j}{h_2^2}, 1 \leq i \leq N_2 - 1, A_2 u_{0,k}^j = 0, A_2 u_{N_2,k}^j = 0,$$

Тогда можно переписать в виде:  $y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1} + \Delta^2 s(A_1 + A_2)(y_{j+1} + y_{j-1}) + \Delta^2(1-2s)(A_1 + A_2)y_j = \Delta^2 F^j$

Введем оператор  $R = E + \Delta^2 s A_1 + \Delta^2 s A_2$ . Тогда уравнение (2) можно привести к виду:

$$R(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}) + \Delta^2(A_1 + A_2)y_j = \Delta^2 F^j.$$

С учетом соотношения  $(E + \Delta^2 s A_1)(E + \Delta^2 s A_2) = E + \Delta^2 s A_1 + \Delta^2 s A_2 + O(\Delta^4)$ , получаем

$$R = R_1 R_2 + O(\Delta^4) = (E + \Delta^2 s A_1)(E + \Delta^2 s A_2) + O(\Delta^4).$$

Перейдем к факторизованной схеме:

$$R_1 R_2 (y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}) + \Delta^2 (A_1 + A_2) y_j = \Delta^2 F^j \quad (13)$$

При фиксированном  $j$  получаем систему, которая эффективно решается с помощью двух прогонок по каждому из направлений  $x$  и  $y$ .

В четвертом разделе описан численный метод для смешанной задачи волнового уравнения с нелокальным условием сохранения.

Рассмотрена задача

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} - p(x)q(x, t), \quad (0 \leq x \leq 1, t \geq 0) \quad (14)$$

считаем, что  $p \in C[0, 1]$  и с учетом нелокального условия сохранения

$$\int_0^1 \phi(x) dx = 0, \quad t \geq 0. \quad (15)$$

Помимо (17) неизвестная функция  $\phi$  требует для выполнения начальных условий

$$\phi(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = g(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (16)$$

и граничное условие

$$\phi(x, 0) = f(x) = 0 \quad t \geq 0 \quad (17)$$

где  $g(x, t)$ ,  $f(x)$ ,  $g(x)$  соответствующие функции.

Для более общей задачи перепишем уравнение (17) с условием (19)

$$\int_0^1 \phi(x) dx = J(t), \quad t \geq 0. \quad (18)$$

и

$$\alpha\phi(0, t) + \beta \frac{\partial}{\partial t}(\phi(x, t))|_{x=0} = r(x)t \geq 0 \quad (19)$$

где  $\alpha, \beta$  заданные константы,  $r(t)$  и  $J(t)$  предписанные функции.

Путем частичного интегрирования уравнения (16) по  $x$ , можем вывести через интегрально-дифференциальный подход следующие уравнение

$$2\phi(\xi) = \phi(0, t) + \phi(1, t) + \xi\Theta(t) + (\xi - 1)\varpi(t) + \int_0^1 |x - \xi| (\partial^2 / (\partial^2 t)\phi(x, t) - q(x, t)) \quad (20)$$

где  $\Theta$  и  $\varpi$  граница функции определенные как

$$\Theta(t) = \frac{\partial}{\partial x}\phi(x, t)|_{x=0} \quad \varpi(t) = \frac{\partial}{\partial x}\phi(x, t)|_{x=1} \quad (21)$$

Рассматриваемая проблема теперь может быть переформулирована как проблема, требующая нахождения  $\phi(x, t)$  из (23) вместе с (17), (20), и (21).

Делаем приближение

$$\phi(x, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N c_{nm}\sigma_n(x)\phi_m(t) \quad (22)$$

где  $\phi(t) = \phi(\xi, t), \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{(N-1)}, \xi_N$ , где  $N$  – отдельные разнесенные узлы, выбранные из интервала  $[0, 1]$  с  $\xi_1 = 0, \xi_N = 1, \sigma_N(x) = 1 - |x - \xi_N|^{3/2}$  – локальные интерполяционные функции сосредоточенные вокруг  $\xi_N$  и  $c_{nm}$ , которые определяются по следующему равенству

$$\sum_{n=1}^N \sigma_n(x)(\xi_k c_{P_k}) = 1(0), \quad n = p(n \neq p) \quad (23)$$

### Численное преобразование

1) Приближаем  $\phi_n(t), n = 2, \dots, N$  как квадратичная функция от времени  $t$ , на интервале  $\tau \leq t \leq t + 3\Delta t$ . 2) Если  $\phi_m(\tau)$  и  $\phi'_m(\tau), m = 1, \dots, N$  известны, можно рассматривать как систему  $3N + 6$  линейных алгебраических

уравнений в  $3N+6$  неизвестных.  $\phi_m(\tau + j\Delta t)$ ,  $\Theta_m(\tau + j\Delta t)$ ,  $\varpi_m(\tau + j\Delta t)$  для  $m = 1, \dots, N$  и  $j = 2, 3, 4$ . Можем найти неизвестные следующим образом.

3) Выявляем  $\phi_m(0)$  и  $\phi'_m(0)$  с начальными условиями (4.13). Покажем при  $\tau = 0$  в  $\phi_m(2\Delta t)$ ,  $\Theta_m(2\Delta t)$ ,  $\varpi_m(2\Delta t)$ ,  $\phi_m(3\Delta t)$ ,  $\Theta_m(3\Delta t)$ ,  $\varpi_m(3\Delta t)$ ,  $\phi_m(4\Delta t)$ ,  $\Theta_m(4\Delta t)$ ,  $\varpi_m(4\Delta t)$  применить ) с  $t = 0$  вычисляем  $\phi_m(\Delta t)$  используя известные значения  $\phi'_m(0)$ ,  $\phi_m(2\Delta t)$ ,  $\phi_m(3\Delta t)$ ,  $\phi_m(4\Delta t)$ . Все с  $\tau = 0$  вычисляем  $\phi'_m(4\Delta t)$  используя (4.18) с  $t = 4\Delta t$ . С участием  $\phi_m(4\Delta t)$  и  $\phi'_m(4\Delta t)$  теперь известно, можем позволить  $\tau = 4\Delta t$  решить для  $\phi_m(6\Delta t)$ ,  $\Theta_m(6\Delta t)$ ,  $\varpi_m(6\Delta t)$ ,  $\phi_m(7\Delta t)$ ,  $\Theta_m(7\Delta t)$ ,  $\varpi_m(7\Delta t)$ ,  $\phi_m(8\Delta t)$ ,  $\Theta_m(8\Delta t)$ ,  $\varpi_m(8\Delta t)$  а затем вычислить  $\phi_m(5\Delta t)$ ,  $\phi'_m(8\Delta t)$  используя с  $\tau = 4\Delta t$  и  $\tau = 8\Delta t$  соответственно. Повторяя процесс можем позволить при  $\tau = 8\Delta t, 12\Delta t, 16\Delta t, \dots$  решать неизвестные на все более длительных временных периодах.

**В пятом разделе** описано решение волнового уравнения с использованием квантового подхода

Рассмотрен упрощенный вариант волнового уравнения на 1-мерной прямой  $[0, 1]$ , где скорость распространения с постоянна и равна 1. Это уравнение можно записать как

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x, t) \quad (24)$$

Более того, мы рассматриваем решение только уравнения (24) с граничными условиями Дирихле. Никаких предположений о начальной скорости не делается  $\varphi(x, 0)$  и начальная скорость  $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x, 0)$ .

Используем следующие подмножества функций:

$$U_1(\lambda) = U(0, 0, \lambda)$$

$$U_2(\lambda, \varphi) = U(\pi/2, \lambda, \varphi)$$

$$U_3(\lambda, \varphi, \Theta) = (\lambda, \varphi, \Theta$$

$$U(\lambda, \varphi, \Theta) = \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & -e^{i\lambda} \sin(\Theta/2) \\ e^{i\lambda} \sin(\Theta/2) & e^{i(\lambda+\varphi)} \cos(\Theta/2) \end{pmatrix}$$

$H$ - разреженная матрица с  $H \in N^*$  матрица, которая имеет не более  $H$  ненулевые записи в строке и в столбце

Алгоритм формулы продукта состоит из трех основных этапов: разложение, моделирование и повторная композиция. Работает сначала разложение  $H$ -разреженная матрица гамильтониана, это следует моделировать как сумму эрмитовых матриц  $H_j$  которые считаются легко моделируемыми

$$H = \sum_{j=0}^{m-1} H_j \quad (25)$$

Второй шаг - смоделировать каждый  $H_j$  отдельно, т.е. создавать квантовые схемы, реализующие  $e^{-iH_j t}$  для всех  $H_j$  в разложении в уравнении (5.1). Последний шаг использует моделирование, вычисленное на шаге два, чтобы получить аппроксимацию  $e^{-iHt}$ .

Эрмитова матрица  $H$  можно квалифицировать как "легко моделируемой" если существует алгоритм, который принимает в качестве входных данных время  $t$  и матрица  $H$  и выводит квантовую схему  $C(H)$  такой, что

1. Квантовая схема  $C(H)$  реализует в точности унитарное преобразование

$$\|e^{-iHt} - C(H)_t\| \leq 0 \quad (26)$$

2. Алгоритм нуждается только в  $O(1)$  обращениях к матрице  $H$  и  $O(\log N)$  дополнительных параметров,  $N$ - размерность матрицы  $H$ .

Процедура гамильтонова моделирования требует, чтобы моделируемая гамильтонова матрица  $H$  могла быть разложена следующим образом

$$H = \sum_{j=0}^{m-1} H_j$$

где каждый  $H_j$  является эффективно моделируемой эрмитовой матрицей.

Пусть  $O_i$  - сложность ворот оракула, реализующего  $i$ -ю эрмитову матрицу  $H_i$ , получаем асимптотическую сложность  $O(n + O_i)$  для моделирования  $H_i$ . Применение сложности, имитирующей эрмитовы матрицы, получается схема

размера

$$O\left(5^k \sum_{i=1}^m (n + O_i)\right)$$

Эта схема, наконец, должна быть повторена  $r$  раз, чтобы достичь погрешности не более,  $\epsilon$

$$r \in O\left(5^k m \tau \left(\frac{m\tau}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2k}}\right)$$

и  $\tau = t \max_i \|H_i\|$ ,  $t$ -время, в течение которого мы хотим смоделировать данный гамильтониан, а  $\|H_i\|$ - спектральная норма.

Вычисленного для матрицы  $H_0 + H_1$  (рисунок 1), минимизированной границей уравнения и эмпирической границей, которая является оптимальным значением  $r$ , вычисленным методом перебора для малых размеров матрицы. Это значение  $r$  было вычислено для формулы продукта, время моделирования  $t = 1$  и точность цели  $\epsilon = 10^{-5}$ .

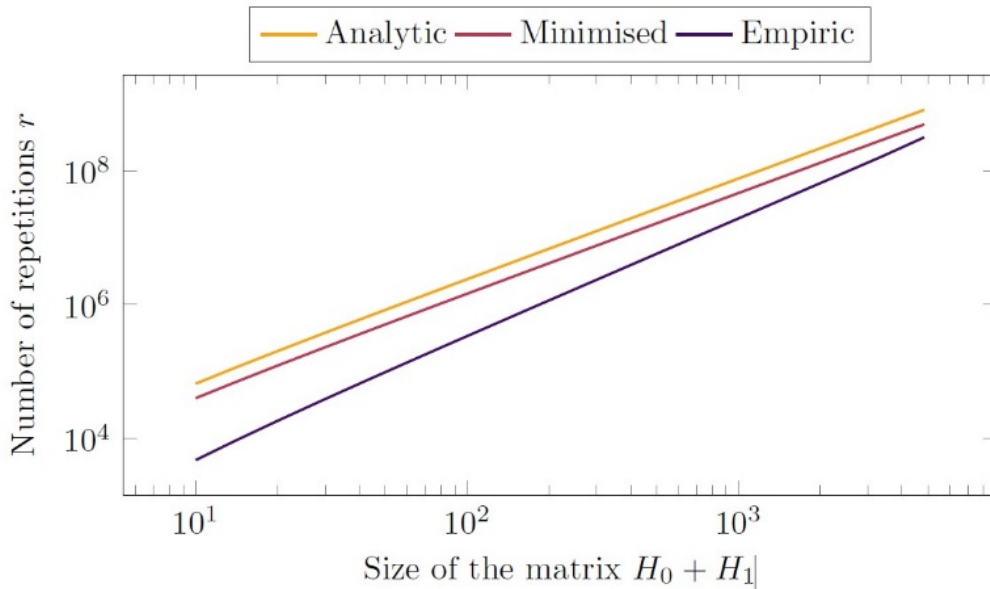


Рисунок 1. График числа повторений  $r$

**В заключении** приводятся основные результаты и делаются следующие выводы:

1. Выполнен анализ структуры проблемной области, исследованы критические варианты текущей области границы решения задачи.
2. Разработаны модели решения смешанных задач.



3. Разработаны алгоритмы решения задач смешанной задачи в частных производных.

4. Разработаны численные схемы на основании алгоритмов решения смешанной задачи в частных производных.

5. Разработан комплекс подпрограмм для расчёта и анализа решений, полученных с помощью смешанной задачи в частных производных.

**Публикации автора по теме исследования (коли-во и объем в печатных листах публик по теме исследования)**

**В изданиях из списка ВАК:**

1. *Завражнов Ю.А.*, Адаптивный метод для решения волнового уравнения с помощью резольвентного подхода // Вестник РОСНОУ 2020, вып. 4. С. 42-48 (0,4 пл)

2. *Завражнов Ю.А.*, Численный метод смешанной задачи волнового уравнения с нелокальным условием сохранения // Вестник РОСНОУ 2021, вып.3 (В печати)

**В прочих изданиях:**

3. *Завражнов Ю.А.*, Решение волнового уравнения с использованием квантового подхода // Наукосфера, 2021. Выпуск 8(1), стр. 18-26. РИНЦ ISSN-2542-0402. (0,5 пл)

**Список использованной литературы**

1. *Стеклов В. А.*, Основные задачи математической физики/Под ред. В.С. Владимирова. - 2-е изд. - М.: Наук, 1983.

2. *Петровский И. Г.*, Лекции об уравнениях в частных производных. - М.: ГИТТЛ, 1953. -

3. *Смирнов В. И.*, Курс высшей математики: в 4 Т. Т. 4. М.: Гостехиздат, 1953.

4. *Хромов А. П.*, Смешанная задача для волнового уравнения с произвольными двухточечными краевыми условиями // Докл. АН. 2015. Т. 462, № 2. С. 148–150.

5. *Хромов А.П., Корнев В.В.*, Резольвентный подход к методу Фурье в одной смешанной задаче для волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 4. С. 621–630.

6. *Lax P. D., Phillips R.*, Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators // *Comm. Pure Appl. Math.* . 1960. V. 13. P. 427–455.

7. *Lupo D., Payne K., Popivanov N.*, Nonexistence of nontrivial solutions for supercritical equations of mixed elliptic-hyperbolic type // *Contributions to Nonlinear Analysis*. Basel: Birkhäuser, 2006. P. pp. 371–390 (*Progr. Non-Linear Differ. Equ. Their Appl.*; V. 66).