

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теоретических основ
компьютерной безопасности и
криптографии

Вершинная раскраска графа и дробное хроматическое число

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студента 6 курса 631 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Телегина Дмитрия Алексеевича

Научный руководитель

доцент к. ф.-м. н.

А. В. Жаркова

23.01.2021 г.

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент

М. Б. Абросимов

23.01.2021 г.

Саратов 2021

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире информационные технологии имеют одну из ключевых ролей в жизни общества. Поэтому вопрос безопасности различных информационных систем становится одним из немаловажных вопросов в деятельности любого государства или организации.

Для обеспечения безопасности информационных систем необходимо разработать эффективную систему защиты информации, которая представляет собой комплекс организационно-технологических мер, программно-технических средств и правовых норм, направленных на противодействие источникам угроз безопасности информации.

Для построения адекватной системы защиты информации необходимо разработать модель угроз безопасности информации. Как правило, модель угроз включает в себя описание информационной системы, идентификацию угроз безопасности информации и их источников, а также оценку вероятности (возможности) реализации угроз безопасности информации.

Важным этапом разработки модели угроз безопасности информации является описание информационной системы, поскольку правильность и полнота общей характеристики информационной системы, включающей описание структурно-функциональных характеристик информационной системы, ее алгоритма работы и технологий обработки информации, позволяет идентифицировать все актуальные угрозы безопасности информации, а, следовательно, и грамотно разработать систему защиты информации.

На данный момент разработано много подходов к описанию и анализу информационных систем. К наиболее популярным относятся структурный (функциональный) и объектно-ориентированный подходы.

Для описания взаимодействия компонент информационной системы может быть разработана схема информационных потоков системы, наглядно отображающая маршруты информации между компонентами информационной системы.

Для разработки и описания схемы информационных потоков системы удобно использовать теорию графов. При этом информационная система представляется в виде ориентированного графа, состоящего из конечного множества вершин, соответствующих компонентам информационной системы, и ребер, отражающих информационные потоки (взаимосвязи) между ними¹.

Различные структуры графов помогают решать вопросы безопасности информационных систем, таких как поиск уязвимостей в системе, выявление потенциальных угроз безопасности системы и многие другие. Поэтому в данной работе будет рассмотрен один из параметров графа, который, возможно, поможет в экономии ресурсов при построении защищенной информационной системы.

В настоящее время одной из задач, решаемых в теории графов, является задача о нахождении раскраски графа, а также его хроматического числа. Вопрос нахождения хроматического числа описан неоднократно в различных работах. Однако, интересен вопрос о том, возможно ли уменьшить хроматическое число графа, используя те или иные методы. Решение данного вопроса было найдено в дробном хроматическом числе.

Целью настоящей работы является рассмотрение вопроса раскраски графов, вычисление дробного хроматического числа, а также поиск зависимостей в дробных хроматических числах некоторых классов графов.

Для достижения поставленной цели требуется решить следующие задачи:

- 1) изучить вопросы раскраски графов;
- 2) рассмотреть принцип дробной раскраски графа и дробного хроматического числа;
- 3) проанализировать и сопоставить данные дробных хроматических чисел различных классов графов и найти некоторые закономерности.

¹ Попова, М. С. Применение теории графов при выявлении потенциальных угроз безопасности информации [Электронный ресурс] / М. С. Попова, А. П. Карпов // КиберЛенинка [Электронный ресурс]. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-teorii-grafov-pri-vyyavlenii-potentsialnyh-ugroz-bezopasnosti-informatsii/viewer> (дата обращения: 13.11.2020). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

Работа состоит из введения, четырех основных разделов, заключения, списка использованных источников, а также приложения.

В первом разделе содержатся определения основных понятий, необходимых для дальнейшего использования.

Во втором разделе рассматривается принцип раскраски графов, алгоритмы нахождения хроматического числа, применение раскраски графов.

Третий раздел содержит описание принципа дробной раскраски, а также поиск дробного хроматического числа для решения задачи правильной дробной раскраски. Приводятся предположения и доказательства о поиске дробного хроматического числа для определенных классов графов.

В четвертом разделе работы приводится описание разработанной и реализованной программы, решающей задачу нахождения дробного хроматического числа, а также определяющей, имеет ли место дробная раскраска для данного графа. В программе также реализована визуализация как обычной, так и дробной раскрасок графа. Далее с помощью этой программы просчитаны хроматические и дробные хроматические числа всех существующих графов до десяти вершин и произведен анализ этих данных. Листинг программы представлен в приложении А.

В заключении подведены итоги данной работы, сделан вывод о проделанной работе, а также рассмотрены перспективы продолжения изучения данной темы.

Дипломная работа состоит из введения, 4 разделов, заключения, списка использованных источников и 1 приложения. Общий объем работы – 60 страниц, из них 44 страницы – основное содержание, включая 27 рисунков и 6 таблиц, список использованных источников из 22 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В дипломной работе в разделе 1 «Основные определения» приводятся основные определения^{2,3,4,5,6,7,8,9,10}, которые используются в данной работе.

В разделе 2 работы «Вершинная раскраска графа» приводятся определение вершинной раскраски графа¹¹, вводится понятие k -раскраски графа¹², а также приводится определение реберной раскраски графа¹³. Также в данном разделе приводятся иллюстрации, помогающие визуально увидеть правильную раскраску графа, как вершинную, так и реберную. Приводится определение хроматического числа для графа. Далее описываются варианты алгоритмов, которые используются для вычисления хроматического числа, а именно жадные

² Богомолов, А. М. Алгебраические основы теории дискретных систем / А. М. Богомолов, В. Н. Салий. – М. : Наука, Физматлит, 1997. – 368 с.

³ Интервальный граф [Электронный ресурс] // PCO Laboratory [Электронный ресурс]. – URL: http://pco.iis.nsk.su/grapp/index.php/Интервальный_граф (дата обращения: 05.10.2020). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

⁴ Оре, О. Теория графов [Электронный ресурс] / О. Оре. – М. : Наука, Физматлит, 1980. – 336 с. – Загл. с экрана. – Яз. рус.

⁵ Scheinerman, E. R. Fractional Graph Theory: a Rational Approach to the Theory of Graphs [Электронный ресурс] / E. R. Scheinerman, D. H. Ullman // PDF Drive [Электронный ресурс]. – 2008. – URL: <https://www.pdfdrive.com/fractional-graph-theory-a-rational-approach-to-the-theory-of-graphs-d157696407.html> (дата обращения: 15.11.2020). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

⁶ Абросимов, М. Б. Практические задачи по графам: учебное пособие / М. Б. Абросимов, А. А. Долгов. – Саратов : Научная книга, 2009. – 75 с.

⁷ Sanjeev, A. Computational Complexity: a Modern Approach [Электронный ресурс] / A. Sanjeev, B. Boaz // TCS @ Princeton [Электронный ресурс]. – 2007. – URL: <https://theory.cs.princeton.edu/complexity/book.pdf> (дата обращения: 19.10.2020). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

⁸ Prism Graph [Электронный ресурс] // Wolfram MathWorld [Электронный ресурс]. – URL: <https://mathworld.wolfram.com/PrismGraph.html> (дата обращения: 25.09.2020). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

⁹ Pan Graph [Электронный ресурс] // Wolfram MathWorld [Электронный ресурс]. – URL: <https://mathworld.wolfram.com/PanGraph.html> (дата обращения: 25.09.2020). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

¹⁰ Sunlet Graph [Электронный ресурс] // Wolfram MathWorld [Электронный ресурс]. – URL: <https://mathworld.wolfram.com/SunletGraph.html> (дата обращения: 25.09.2020). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

¹¹ Molloy, M. Graph Colouring and the Probabilistic Method [Электронный ресурс] / M. Molloy, B. Reed // Xidian University [Электронный ресурс]. – 2002. – URL: https://web.xidian.edu.cn/zhangxin/files/20150823_173652.pdf (дата обращения: 04.10.2020). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

¹² Brewster, R. C. Mixing Homomorphisms, Recolorings, and Extending Circular Precolourings [Электронный ресурс] / R. C. Brewster, J. A. Noely // Coruell University Library [Электронный ресурс]. – 2018. – URL: <https://arxiv.org/pdf/1412.3493v1.pdf> (дата обращения: 04.10.2020). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

¹³ Soifer, A. The Mathematical Coloring Book: Mathematics of Coloring and the Colorful Life of Its Creators [Электронный ресурс] / A. Soifer // PDF Drive [Электронный ресурс]. – 2009. – URL: <https://www.pdfdrive.com/the-mathematical-coloring-book-mathematics-of-coloring-and-the-colorful-life-of-its-creators-e161038298.html> (дата обращения: 02.12.2020). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

алгоритмы и алгоритмы перебора¹⁴. В конце раздела рассказывается о применении раскраски графа в различных сферах.

В разделе 3 дипломной работы «Дробная раскраска графа» вводится понятие дробной раскраски графа¹⁵, приведено определение дробного хроматического числа¹⁶, а также приведена лемма, помогающая понять, как вычисляется дробное хроматическое число. Далее рассказывается о дробном хроматическом числе Кнезеровского графа и описан граф Мычельского¹⁷, преобразование графа с помощью функции Мычельского¹⁸ и дробное хроматическое число графа Мычельского¹⁹. Также для всех теорем и утверждений приведены примеры вычисления дробных хроматических чисел.

Раздел 4 дипломной работы «Программная реализация» посвящен описанию программной реализации нахождения хроматического и дробного хроматического числа графа, а также их правильной раскраски. В результате проделанной работы была реализована программа на языке Python 3. Данная программа позволяет вычислить раскраску и дробную раскраску графа, найти хроматическое и дробное хроматическое число графа, а также визуализирует данную информацию.

¹⁴ Степин, О. А. К вопросу о методах поиска хроматического числа графа общего вида [Электронный ресурс] / О. А. Степин // Международный научный электронный журнал «Синергия наук» [Электронный ресурс]. – 2019. – № 33 (март). – С. 1040-1057. – URL: <http://synergy-journal.ru/archive/article4283> (дата обращения: 19.10.2020). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

¹⁵ Caragiannis, I. Fractional Path Coloring in Bounded Degree Trees with Applications [Электронный ресурс] / I. Caragiannis, A. Ferreira, C. Kaklamanis // ResearchGate [Электронный ресурс]. – 2009. – URL: https://www.researchgate.net/publication/225429911_Fractional_Path_Coloring_in_Bounded_Degree_Trees_with_Applications (дата обращения: 10.10.2020). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

¹⁶ Dvorak, Z. Fractional Coloring [Электронный ресурс] / Z. Dvorak // Computer Science Institute of Charles University [Электронный ресурс]. – 2018. – URL: <https://iuuk.mff.cuni.cz/~rakdver/barevnost/fractional.pdf> (дата обращения: 12.10.2020). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

¹⁷ Мычельскиан [Электронный ресурс] // ПОИВС ТГПУ им. Л. Н. Толстого [Электронный ресурс]. – URL: <http://poivs.tsput.ru/ru/Math/DiscreteMath/GraphTheory/OperationsOverGraphs/Mychelsky> (дата обращения: 21.10.2020). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

¹⁸ Larsen, M. The Fractional Chromatic Number of Mycielski's Graphs [Электронный ресурс] / M. Larsen, J. Propp, D. Ullman // Faculty/Staff Websites & Bios [Электронный ресурс]. – 1995. – URL: <http://faculty.uml.edu/jpropp/mycielski.pdf> (дата обращения: 10.11.2020). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

¹⁹ Jacobs, G. T. Fractional Colorings and the Mycielski Graphs [Электронный ресурс] / G. T. Jacobs // Portland State University site [Электронный ресурс]. – 2006. – URL: <http://web.pdx.edu/~caughman/Tonythesis.pdf> (дата обращения: 20.10.2020). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

При написании данной программы была использована свободно распространяемая библиотека *networkx v.2.5* для Python 3.7. Данная библиотека позволяет работать с графами в удобном формате, а также в ней реализованы некоторые вспомогательные алгоритмы²⁰.

Листинг программы приведен в приложении А.

В подразделе 4.1 работы «Описание программы» описан функционал программы, представлен интерфейс, а также механизм работы с программой. На вход программе подается граф в формате *graph6*²¹ или файл с набором графов в формате *graph6*.

В случае подачи на вход файла на выходе программа создает три файла *Статистика хроматического числа.txt*, *Статистика дробного хроматического числа.txt*, *Основная информация.txt*. В файле *Статистика хроматического числа.txt* содержится информация о хроматическом числе и количестве графов с таким хроматическим числом. В файле *Статистика дробного хроматического числа.txt* содержится информация о дробном хроматическом числе и количестве графов с таким дробным хроматическим числом. В файле *Основная информация.txt* содержится информация о хроматическом числе и дробном хроматическом числе конкретного графа.

В случае ввода графа вся информация выводится на экран, а также выводятся изображения правильной раскраски и правильной дробной раскраски при ее наличии. Если количество цветов для дробной раскраски графа превышает 20, то информация по раскраске графа будет выведена в файл *Дробная раскраска.txt*. Это сделано из-за того, что большее количество цветов сложно отличать друг от друга. В данном разделе также приведены примеры работы программы как при работе с файлом, так и при вводе графа с экрана.

В подразделе 4.2 работы «Анализ данных» приводится различная статистическая информация о дробном хроматическом числе различных графов,

²⁰ NetworkX Documentation [Электронный ресурс] // NetworkX [Электронный ресурс]. – URL: <https://networkx.org/documentation/stable/tutorial.html> (дата обращения: 17.09.2020). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

²¹ Graph Formats [Электронный ресурс] // Brendan McKey's Site [Электронный ресурс]. – URL: <https://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/formats.html> (дата обращения: 28.09.2020). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

полученная в результате работы с программой. Так, в таблице 1 дипломной работы представлен подсчет графов с определенным дробным хроматическим числом. На основе данной информации была выведена гипотеза о дробном хроматическом числе.

Гипотеза. Дробное хроматическое число всех графов до 10 вершин включительно можно записать как формулу: $xb + 1$, где x – это некоторое целое число, а b – это число b в $a:b$ -раскраске, за исключением тех дробных хроматических чисел, которые при делении части a на часть b дают целое число.

Далее были рассмотрены графы, у которых дробное хроматическое число, являясь целым числом, было меньше хроматического числа.

Также в данном подразделе были проанализированы некоторые классы графов на предмет закономерностей в значениях дробных хроматических чисел. Данный анализ был так же найден в открытом источнике²². Все значения полностью совпали, следовательно, можно говорить о правильности работы программы на данных графах.

В заключении подраздела было произведено сравнение дробных хроматических чисел, для которых в теоретической части работы были рассмотрены формулы вычисления дробного хроматического числа. На основе этих данных был сделан вывод правильности работы программы. Также было установлено, что решение задачи о нахождении дробного хроматического числа для графов Мычельского перебором невозможно в пределах разумного времени. Поэтому для графов Мычельского с известной формулой вычисления дробного хроматического числа следует использовать именно формулу.

Изученные в данной работе материалы содержали лишь теоретическую информацию о дробной раскраске графов. В используемых источниках не было обнаружено каких-либо попыток создания алгоритмов вычисления дробного хроматического числа и поиска дробной раскраски графа. Поэтому программ,

²² Fractional Chromatic Number [Электронный ресурс] // Wolfram MathWorld [Электронный ресурс]. – URL: <https://mathworld.wolfram.com/FractionalChromaticNumber.html> (дата обращения: 25.09.2020). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

аналогичных той, что представлена в работе, не найдено в открытом доступе, как и информации о существовании подобных программ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория, изложенная в данной работе, может стать основой для создания новых решений, применяемых в безопасности компьютерных систем. Каким именно образом, покажет более глубокий анализ данного вопроса. Изучение дробного хроматического числа является молодым разделом теории графов, а значит возможно дальнейшее изучение темы.

Рассмотренная в данной работе тема может быть использована при решении каких-либо жизненных задач. Например, дробное хроматическое число, которое меньше хроматического числа, может быть использовано для решения задач, в которых не требуется хроматическое число как целое число.

В ходе данной работы была изучена необходимая теория о раскраске графов, в том числе о дробной раскраске, на основе которой была разработана программа, реализующая алгоритм правильной раскраски графа и поиска хроматического числа, а также дробной раскраски и поиска дробного хроматического числа на языке Python. Программа так же визуализирует все данные, что очень удобно и наглядно. С помощью данной программы были проанализированы все графы до 10 вершин включительно на предмет возможности вычисления дробного хроматического числа и дробной раскраски.

Таким образом, все поставленные задачи решены, цель работы достигнута.