

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теоретических основ
компьютерной безопасности и
криптографии

Меры связности графа

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студента 6 курса 631 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Теребина Богдана Андреевича

Научный руководитель

зав. кафедрой, д. ф.-м. н., доцент

М. Б. Абросимов

23.01.2021 г.

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент

М. Б. Абросимов

23.01.2021 г.

Саратов 2021

ВВЕДЕНИЕ

Многие сети, такие как транспортные, электрические, телекоммуникационные системы или сети серверов, могут быть смоделированы с помощью графов. Было предпринято много попыток определить, насколько хорошо такая сеть «связна», или, другими словами, сколько усилий требуется приложить для разрыва связи в системе между некоторыми вершинами. Необходимо обеспечить работоспособность сети как можно дольше в случае возникновения неисправностей. Были разработаны графовые модели отказоустойчивости для решения данной проблемы. Две основные меры связности, которые показывают, насколько граф «связен», – это вершинная k и рёберная λ .

Известно, что данные характеристики связности вместе с минимальной степенью вершины δ связаны соотношением Уитни: $k \leq \lambda \leq \delta$. Было доказано, что этот результат не улучшаем в том смысле, что для любых натуральных чисел a, b, c , таких что $0 < a \leq b \leq c$, можно построить граф, у которого $k = a$, $\lambda = b$, $\delta = c$. В доказательстве предлагается граф с числом вершин $2(c + 1)$ и числом рёбер $c(c + 1) + b$.

В данной работе рассматривается вопрос построения соответствующей реализации с наименьшим возможным числом вершин и рёбер, а также определение семейств графов с минимальным числом рёбер для пар различных значений k и λ .

Дипломная работа состоит из введения, 5 разделов, заключения, списка использованных источников и 6 приложений. Общий объем работы – 57 страниц, из них 35 страниц – основное содержание, включая 13 рисунков и 5 таблиц, список использованных источников из 13 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

1 Основные понятия теории графов

Вершинной связностью k графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. *Рёберная связность* λ графа G определяется как наименьшее количество рёбер, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу¹.

2 Условие Уитни

Вершинная связность, рёберная связность и минимальная степень вершины связаны неравенством, которое было найдено Уитни.

Теорема 1. Для любого графа G справедливо неравенство: $k \leq \lambda \leq \delta$.

Теорема 2². Наименьшее число вершин, разделяющих две несмежные вершины s и t , равно наибольшему числу непересекающихся простых $(s - t)$ цепей.

Результат теоремы 1 является неулучшаемым.

Теорема 3³. Для любых натуральных чисел a, b, c , таких что $0 < a \leq b \leq c$, существует граф G , у которого $k = a, \lambda = b, \delta = c$.

В теореме 3 было показано, что для любых натуральных чисел $a \leq b \leq c$ можно построить граф, в котором $k = a, \lambda = b, \delta = c$. Графы, построенные по данной теореме, имеют $2(c + 1)$ вершину и $(c + 1)c + b$ рёбер. Возникает вопрос: можно ли построить граф, удовлетворяющий теореме 3, с меньшим количеством вершин и рёбер?

Неравенство $a \leq b \leq c$ можно представить с помощью совокупности следующих неравенств:

- $a = b = c$;

¹ Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. – М. : Мир, 1973, – 60 с.

² Whitney, H. Congruent graphs and the connectivities of graphs / H. Whitney // Am. J. Math. – 1932. – V. 54. – P. 150 – 168.

³ Chartrand, G. Graphs with prescribed connectivities / G. Chartrand, F. Harary // 1966 Symp. On Graph Theory. Tihany, Acad. Sci. Hung. – 1967. – P. 61 – 63.

- $a < b < c$;
- $a = b < c$;
- $a < b = c$;

Рассмотрим каждое неравенство отдельно.

Теорема 4. Граф из теоремы 3 с наименьшим количеством вершин, удовлетворяющий условию $a = b = c$, является полным графом с числом вершин $c + 1$.

Теорема 5. Граф из теоремы 3 с наименьшим количеством вершин, удовлетворяющий условию $a < b < c$, является графом с числом вершин $2(c + 1)$.

Теорема 6. Граф из теоремы 3 с наименьшим количеством вершин, удовлетворяющий условию $a = b < c$, является графом с числом вершин $2(c + 1)$.

Теорема 7. Граф из теоремы 3 с наименьшим количеством вершин, удовлетворяющий условию $a < b = c$, является графом с числом вершин $2(c + 1) - a$.

Теперь попробуем определить графы с минимальным количеством рёбер, которые удовлетворяют условию Уитни. Представим неравенство $a \leq b \leq c$ с помощью совокупности неравенств так, как и делалось это ранее. Рассмотрим каждый случай отдельно. Очевидно, что граф с наименьшим числом вершин и будет содержать наименьшее количество рёбер. При росте вершин происходит рост рёбер за счёт того, что все степени вершин должны быть $\leq c$.

Теорема 8. Граф из теоремы 3 с наименьшим количеством рёбер, удовлетворяющий условию $a = b = c$, является полным графом с числом рёбер $\frac{c(c+1)}{2}$.

Теорема 9. Граф из теоремы 3 с наименьшим количеством рёбер, удовлетворяющий условию $a < b < c$, является графом с числом рёбер

$$(c - a + 1) \left(\frac{(c-a)}{2} + a \right) + (c - b + 1) \left(\frac{(c-b)}{2} + b \right) + b + \sigma + \theta, \text{ где}$$

$$\theta = \begin{cases} 0, & \text{если } \left\lfloor \frac{(a-m)(a-1-\lfloor \frac{b}{a} \rfloor)}{2} + \frac{m(a-2-\lfloor \frac{b}{a} \rfloor)}{2} \right\rfloor \leq 0, \\ \left\lfloor \frac{(a-m)(a-1-\lfloor \frac{b}{a} \rfloor)}{2} + \frac{m(a-2-\lfloor \frac{b}{a} \rfloor)}{2} \right\rfloor & \text{иначе,} \end{cases} \quad m = b - a \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor,$$

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{если } b \leq 2, \\ \left\lfloor \frac{b(b-2)}{2} \right\rfloor, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 10. Граф из теоремы 3 с наименьшим количеством рёбер, удовлетворяющий условию $a = b < c$, является графом с числом рёбер $c^2 - b^2 + 2b + c + 2\sigma$, где

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{если } b \leq 2, \\ \left\lfloor \frac{b(b-2)}{2} \right\rfloor, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 11. Граф из теоремы 3 с наименьшим количеством рёбер, удовлетворяющий условию $a < b = c$, является графом с числом рёбер $c^2 - a^2 + a + c + \sigma$,

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{если } \left\lfloor \frac{2a^2 - ac - 2a}{2} \right\rfloor \leq 0, \\ \left\lfloor \frac{2a^2 - ac - 2a}{2} \right\rfloor, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Некоторые из полученных результатов были опубликованы в работе⁴.

Кроме того, характеристики связности, вместе с минимальной степенью вершины, имеют большое значение при исследовании гамильтоновых графов. Существуют достаточные условия проверки гамильтоновости графов, основанные на данных понятиях⁵.

⁴ Терebin, Б.А. Об оптимальности реализации графов с заданными мерами связности / Б.А. Терebin, М.Б. Абросимов // Прикладная дискретная математика. Приложение. – 2020. № 13. – С. 103 – 105.

⁵ Терebin, Б.А. Жёсткость и гамильтоновость графов / Б.А. Терebin // Научные исследования студентов Саратовского государственного университета : материалы итоговой студенческой научной конференции. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2019. – С 27 – 28.

3 Распределение графов с заданными мерами связности

Поставлена следующая задача: нахождение и описание множеств графов, состоящих из заданного числа вершин n , с минимальным числом рёбер для пар возможных значений k и λ , где k – вершинная связность графа, а λ – рёберная связность.

Пусть $N_{k, \lambda}$ – минимальное число вершин, из которого может состоять граф с заданной вершинной связностью k и рёберной связностью λ . Вычисляется по следующей формуле:

$$N_{k, \lambda} = 2(\lambda + 1) - k \text{ при } \lambda > k \text{ и } N_{k, \lambda} = \lambda + 1 \text{ при } \lambda = k.$$

В обоих случаях λ должна быть больше одного. Эти формулы получаются из теорем 4 и 7.

Диагональю порядка i назовём множество пар (k, λ) , удовлетворяющих следующим условиям:

1. $\lambda - k = i$.
2. $k \geq k_{\min(i)}, \lambda \geq \lambda_{\min(i)}$.
3. Для заданных k и λ можно построить граф с вершинной связностью, равной k , и рёберной связностью, равной λ .
4. Граф из условия 3 является либо λ -регулярным, либо одна из его вершин степени $\lambda + 1$, а остальные – λ . Тогда число рёбер в таком графе равно $\left\lfloor \frac{\lambda n}{2} \right\rfloor$.

Под парой значений $(k_{\min(i)}, \lambda_{\min(i)})$ будем понимать *образующий элемент* диагонали порядка i . *Образующим элементом* назовём минимальный элемент диагонали i в следующем смысле: $\forall \lambda, k: k \geq k_{\min(i)}, \lambda \geq \lambda_{\min(i)}, \lambda_{\min(i)} - k_{\min(i)} = i$, при этом $\forall n \geq N_{k, \lambda}$ можно построить граф с заданными $k_{\min(i)}$ и $\lambda_{\min(i)}$, который будет состоять из наименьшего числа рёбер, равному $\left\lfloor \frac{\lambda n}{2} \right\rfloor$. Обозначим множество диагоналей различных порядков за D .

В результате было найдено 2 множества. Их описывают следующие теоремы.

Теорема 12. Пусть $k \geq k_{\min(i)}$, $\lambda \geq \lambda_{\min(i)}$, $\lambda - k = i$, $i \geq 0$. Тогда $\forall n \geq N_{k, \lambda}$ существует граф G с заданными k и λ , состоящий из n вершин, такой что:

- если $k \bmod 2 \neq 0$ и $\lambda \bmod 2 = 0$ – λ -регулярный граф.
- если $k \bmod 2 = 0$ и $\lambda \bmod 2 \neq 0$:
 - если $n \bmod 2 = 0$ – λ -регулярный граф.
 - если $n \bmod 2 \neq 0$ – одна из вершин графа степени $(\lambda + 1)$,

остальные – степени λ .

• если $k = \lambda$, то у предыдущих пунктов не рассматривается условие чётности k .

При этом граф G является оптимальным по рёбрам, т.е., состоит из наименьшего возможного числа рёбер, равному $\left\lfloor \frac{\lambda n}{2} \right\rfloor$.

Теорема 13. Пусть $k = 1$, $\lambda > 1$. Тогда $\forall n \geq N_{k, \lambda}$ существует граф G с заданными k и λ , состоящий из n вершин, такой что:

- если $\lambda \bmod 2 = 0$, то в таком графе степень одной вершины (точка сочленения) равна $N_{k, \lambda} - 1$, а остальных – λ . Минимальное число рёбер – $\frac{\lambda(n+1)}{2}$.
- если $\lambda \bmod 2 \neq 0$, то в таком графе:
 - если $n \bmod 2 \neq 0$ – степень одной вершины (точка сочленения) равна $N_{k, \lambda} - 1$, а остальных – λ . Минимальное число рёбер – $\frac{\lambda(n+1)}{2}$.
 - если $n \bmod 2 = 0$:
 - степень одной вершины (точка сочленения) равна $N_{k, \lambda}$, а остальных – λ . Минимальное число рёбер – $\frac{\lambda n + \lambda + 1}{2}$.
 - степень одной вершины (точка сочленения) равна $N_{k, \lambda} - 1$, степень другой вершины – $\lambda + 1$, а остальных – λ . Минимальное число рёбер – $\frac{\lambda n + \lambda + 1}{2}$.

Следствие. Случай $k = 1$, $\lambda = 1$ является частным $\forall n \geq N_{k, \lambda}$. Ему удовлетворяют деревья. Минимальное число рёбер в деревьях равно $n - 1$.

4 Вычислительный эксперимент по анализу распределения графов с заданными мерами связности

Был произведен вычислительный эксперимент, в результате которого были проанализированы распределения графов при фиксированном числе вершин и различных значениях вершинной и рёберной связностей с минимальным числом рёбер. Эксперимент состоял из трёх этапов:

1. Подсчёт следующих параметров для графов с числом вершин от 3 до 11: характеристики связности, минимальная степень вершины, количество рёбер.

2. Нахождение наименьшего числа рёбер для каждой пары различных значений (k, λ) .

3. Определение количества графов с наименьшим числом рёбер для пар различных значений (k, λ) .

В результате были получены таблицы для графов с числом вершин от 3 до 11. Рассмотрим примеры таких таблиц. В таблице 1 показано минимальное число рёбер, которое может содержать граф с определенными k и λ при $n = 11$. Из данной таблицы видно, что после определённого момента число рёбер по столбцам таблицы не изменяется.

Таблица 1 – Минимальное число рёбер при $n = 11$

k/λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	12	18	24	30	-	-	-	-	-
2	-	11	17	22	29	-	-	-	-	-
3	-	-	17	22	28	36	-	-	-	-
4	-	-	-	22	28	33	-	-	-	-
5	-	-	-	-	28	33	39	-	-	-
6	-	-	-	-	-	33	39	-	-	-
7	-	-	-	-	-	-	39	44	-	-
8	-	-	-	-	-	-	-	44	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-	-	50	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	55

В таблице 2 показано количество графов, состоящих из минимального числа рёбер, при определенных k и λ , $n = 11$. Можно сказать, что в ячейке (2, 2) находится цикл длины n , ячейку (10, 10) представляет полный граф, ячейка (1, 1) – это всевозможные деревья.

Таблица 2 – Количество графов с минимальным числом рёбер при $n = 11$

k/λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	235	4	11	4	1	-	-	-	-	-
2	-	1	21	3	2	-	-	-	-	-
3	-	-	138	55	9	1	-	-	-	-
4	-	-	-	204	528	1	-	-	-	-
5	-	-	-	-	3212	55	1	-	-	-
6	-	-	-	-	-	210	26	-	-	-
7	-	-	-	-	-	-	93	2	-	-
8	-	-	-	-	-	-	-	4	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1

5 Вычислительный эксперимент по анализу распределения графов из условия Уитни

Был произведен вычислительный эксперимент, в результате которого были получены распределения графов с различными тройками значений из условия Уитни – вершинной связностью, рёберной связностью и минимальной степенью вершины. Эксперимент состоял из трёх этапов:

1. Подсчёт следующих параметров для графов с числом вершин от 3 до 11: характеристики связности, минимальная степень вершины.
2. Нахождение числа графов при определённом количестве вершин с различными тройками значений
3. Определение частоты появления той или иной тройки, т.е., наибольшее количество графов с такими значениями.

Результаты эксперимента показаны в следующей таблице.

Таблица 3 – Распределение графов по условию Уитни

№/n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	111, 222	111	111	111	111	222	222	222	333
2	-	222	222	222	222	111	333	333	222
3	-	333	333	333	333	333	111	111	444
4	-	-	444, 122	122	122	444	444	444	111
5	-	-	-	444	444	122	122	555	555
6	-	-	-	233	233	233	233	233	233
7	-	-	-	555, 122	112	344, 122	555	122	344
8	-	-	-	-	344	555	344	344	122
9	-	-	-	-	555	455	112	455	666
10	-	-	-	-	666, 133	133	455	112	455

В таблице 3 продемонстрированы десять самых частых значений k , λ и δ для графов с определённым числом вершин. Получается, что больше всего графов, в которых эти значения равны между собой. Далее по частоте идут графы, в которых $k < \lambda = \delta$, после идут графы с $k = \lambda < \delta$. Меньше всего графов с $k < \lambda < \delta$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был рассмотрен вопрос построения соответствующей реализации с наименьшим возможным числом вершин и рёбер для любых натуральных чисел a, b, c , где $k = a, \lambda = b, \delta = c$, а также определение множеств графов с минимальным числом рёбер для пар различных значений k и λ . В доказательстве теоремы Уитни предлагался граф с числом вершин $2(c + 1)$ и числом рёбер $c(c + 1) + b$. Оказалось, что в некоторых случаях данные значения являются оптимальными и их нельзя улучшить. Например, когда $a < b < c$, оптимальное число вершин равно $2(c + 1)$.

Помимо этого, с помощью введённых понятий, таких как диагональное множество, диагональ порядка i , образующий элемент и остальные, удалось описать структуру графов с экстремальным значением числа рёбер для k, λ, n , и классы с такой структурой. Были доказаны теоремы, описывающие структуру графов, само их существование и определение минимального числа компонент, из которого они должны состоять.

Был написан комплекс программ на языке C++ в среде Visual Studio 2017. Первая программа подсчитывает значения вершинной и рёберной связностей, значение минимальной степени вершины и число рёбер для всех неориентированных графов, подающихся ей на вход. Вторая программа анализирует полученные данные по k, λ и n , определяя экстремальное значение числа рёбер. Третья программа находит количество графов с экстремальным значением числа рёбер для k, λ и n . Четвёртая программа анализирует частоту появления различных троек k, λ и δ .