

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа
и автоматического управления

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТАНДЕМНОЙ СЕТИ МАССОВОГО
ОБСЛУЖИВАНИЯ С УПРАВЛЕНИЕМ
ИНТЕНСИВНОСТЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ**
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 — Системный анализ и управление
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Хвостовой Ангелины Андреевны

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н.

Е. С. Рогачко

Заведующий кафедрой
к. ф.-м. н., доцент

И. Е. Тананко

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Многие современные инфокоммуникационные сети при обработке поступающих требований используют механизм последовательного обслуживания в условиях ограниченных энергетических и вычислительных ресурсов. Для моделирования рассматриваемого механизма используются тандемные сети массового обслуживания, состоящие из двух и более систем. Для успешного функционирования сетей массового обслуживания с накладываемыми ограничениями необходимо обеспечить эффективное распределение ресурсов с целью минимизации затрат, связанных с функционированием входящих в сеть систем массового обслуживания и обслуживанием в них требований.

Для построения модели тандемной сети, состоящей из двух систем массового обслуживания, с оптимальным управлением интенсивностями обслуживания использовались марковские процессы принятия решений [1,2]. При долгосрочном функционировании тандемной сети общая средняя стоимость функционирования сети и интенсивности обслуживания входящих в сеть систем являются основными характеристиками качества функционирования сети. Основной задачей при управлении тандемной сетью массового обслуживания является поиск оптимальной стратегии распределения интенсивностей обслуживания, минимизирующей общую среднюю стоимость функционирования сети [3].

Цель бакалаврской работы — исследование тандемной сети массового обслуживания с управлением интенсивностями обслуживания.

Поставленная цель определила **следующие задачи**:

1. изучить методы анализа тандемных сетей массового обслуживания различных классов;
2. рассмотреть тандемную сеть массового обслуживания с ограничением на интенсивности обслуживания, изучить метод поиска оптимального управления сетью и свойства оптимальности сети;
3. разработать алгоритм и программу оптимального управления тандемной сетью массового обслуживания с ограничением на интенсивности обслуживания;
4. с помощью разработанной программы исследовать зависимость общей средней стоимости функционирования сети и оптимальной стратегии

распределения интенсивностей обслуживания от параметров сети.

Методологические основы исследования тандемных сетей массового обслуживания с управлением интенсивностями обслуживания представлены в работах X. Li, D. Miller, Z. Zhou, N. Bambos [4], H. S. Ahn, M. E. Lewis, D. L. Kaufman [5], X.R. Cao, H. F. Chen [6], Z. Rosberg, P. Varaiya, J. Walrand, P. Naor [7,8].

Практическая значимость бакалаврской работы. Практическая значимость работы заключается в возможности дальнейшего использования программного программы для поиска оптимального управления тандемной сетью для анализа и оптимального управления тандемными сетями с ограничением на интенсивности обслуживания. Разработанную программу можно использовать при анализе реальных систем, использующих механизм последовательного обслуживания требований, возникающий, например, при обработке запросов в центрах информационной поддержки, при передаче мультимедийной информации по каналам беспроводной связи, при управлении потоком данных между элементами многоагентной робототехнической системы, при обработке агрегатов на конвейерной линии.

Структура и объём работы. Бакалаврская работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка использованных источников и двух приложений. Общий объем работы — 58 страниц, из них 40 страницы — основное содержание, включая 13 рисунков и 2 таблицы, список использованных источников информации — 20 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел «Анализ тандемных сетей массового обслуживания» посвящен анализу простейших тандемных сетей массового обслуживания [9,10], а также анализу тандемной сети с ограничением на интенсивности обслуживания.

Подраздел *«Анализ двухфазной тандемной сети без очередей»* включает в себя описание тандемной сети массового обслуживания, состоящей из двух систем массового обслуживания типа $M/M/1$, а также полученные формулы для вероятностей состояний сети при стационарном режиме функционирования. В рассматриваемой сети отсутствует очередь, поступающий поток требований является пуассоновским с интенсивностью λ , длительности

обслуживания в каждой системе распределены экспоненциально с параметром μ .

В подразделе «Анализ k -фазной тандемной сети» описывается простейший вид тандемной сети массового обслуживания, состоящей из k систем массового обслуживания с неограниченной длиной очереди, а также приводятся полученные формулы для вероятностей состояний сети при стационарном режиме функционирования.

Требования, поступающие на вход первой системы данной сети генерируются источником бесконечно большой емкости и поток требований, обслуженных каждой из k систем, является пуассоновским с интенсивностью λ . Распределение длительности обслуживания i -й системы, где $i = 1, 2, 3, \dots, k$, является экспоненциальным с параметром μ_i .

Подраздел «Оптимальное управление тандемной сетью массового обслуживания» посвящен описанию задачи оптимального управления тандемной сетью массового обслуживания, состоящей из двух систем типа $M/M/1$ с ограничением на интенсивности обслуживания.

Рассматриваемая сеть характеризуется следующими параметрами:

1. интенсивностью пуассоновского поступающего потока требований, λ ;
2. вектором интенсивности обслуживания сети в состоянии \mathbf{n} ,

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}} = (\mu_{1,\mathbf{n}}, \mu_{2,\mathbf{n}}),$$

где $\mu_{i,\mathbf{n}}$, $i = 1, 2$, — интенсивность обслуживания i -й системы;

3. дисциплиной обслуживания требований — «первым пришел - первым обслужен».

Область значений вектора интенсивностей обслуживания при введенном ограничении на интенсивности обслуживания, \mathcal{D}_U , определена следующим образом:

$$\mathcal{D}_U = \{(\mu_{1,\mathbf{n}}, \mu_{2,\mathbf{n}}) | \mu_{1,\mathbf{n}} + \mu_{2,\mathbf{n}} \leq U, \mu_{1,\mathbf{n}} \geq u_1, \mu_{2,\mathbf{n}} \geq u_2\},$$

где $U (U > 2\lambda)$ — максимальная общая интенсивность обслуживания, u_i — минимальная интенсивность обслуживания i -й системы, $i = 1, 2$.

Для рассматриваемой тандемной сети определяются:

1. пространство состояний сети,

$$S = \{\mathbf{n} | n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots\};$$

2. общая функция затрат тандемной сети,

$$f(\mathbf{n}, \boldsymbol{\mu}_n) = \psi(\mathbf{n}) + \phi(\boldsymbol{\mu}_n),$$

где $\psi(\mathbf{n})$, $\mathbf{n} \in S$, — функция затрат на хранение, отражающая плату за нахождение требований в очереди систем и некоторую фиксированную плату, а $\phi(\boldsymbol{\mu}_n)$ — эксплуатационные расходы сети, связанные с обслуживанием требований;

3. общая функция затрат тандемной сети в случае, когда интенсивность обслуживания и эксплуатационные расходы линейны к мощности, выделенной сети,

$$\mathbf{f}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\mu}_n) = \psi(\mathbf{n}) + b_1\mu_{1,n} + b_2\mu_{2,n} + c_0, \quad (1)$$

где c_0 отражает фиксированные затраты на поддержание сети в рабочем состоянии на минимальном уровне;

4. инфинитезимальный оператор марковского процесса, описывающего функционирование сети, \mathbf{B} , определяющий интенсивности переходов между состояниями сети;

5. стационарное распределение сети, $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}(\mathbf{n}))$, $\mathbf{n} \in S$, где элемент $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{n})$ представляет собой вероятность того, что сеть останется в состоянии \mathbf{n} после того, как достигнет стационарного режима функционирования, а $\boldsymbol{\pi}$ можно найти, решив следующую систему линейных уравнений:

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\pi}\mathbf{e} = 1,$$

где \mathbf{e} — единичный вектор-столбец;

6. общая средняя стоимость функционирования сети,

$$\eta = \boldsymbol{\pi}\mathbf{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\mathbf{n}(t), \boldsymbol{\mu}_{n(t)}) dt.$$

Задача оптимального управления тандемной сетью массового обслуживания состоит в поиске оптимальной стратегии $\boldsymbol{\mu}^*$, минимизирующей общую

среднюю стоимость функционирования тандемной сети [4,5]:

$$\mu^* = \underset{\mu_n \in \mathcal{D}_U, \forall n \in S}{\operatorname{argmin}} \{\eta\}.$$

Подраздел «Свойства оптимальности тандемной сети» свойства оптимальности рассматриваемой тандемной сети с ограничением на интенсивности обслуживания, являющиеся основой для реализации итерационного алгоритма поиска оптимального управления тандемной сетью массового обслуживания.

Для марковского процесса с непрерывным временем, описывающего функционирование сети, вводятся в рассмотрение:

1. вектор-столбец потенциал производительности или *функция относительных весов* \mathbf{g} [6]:

$$\mathbf{g} = -(\mathbf{B} - \mathbf{e}\boldsymbol{\pi})^{-1} \mathbf{f};$$

2. разность производительности сети, показывающая связь между общей средней стоимостью функционирования сети и интенсивностями обслуживания:

$$\eta' - \eta = \sum_{\mathbf{n} \in S} \pi'(\mathbf{n}) \left\{ (\mu'_{1,\mathbf{n}} - \mu_{1,\mathbf{n}})G(\mathbf{n}, 1) + (\mu'_{2,\mathbf{n}} - \mu_{2,\mathbf{n}})G(\mathbf{n}, 2) + \phi(\boldsymbol{\mu}'_{\mathbf{n}}) - \phi(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}}) \right\}, \quad (2)$$

где $G(\mathbf{n}, 1) = g(n_1 - 1, n_2 + 1) - g(n_1, n_2)$, $G(\mathbf{n}, 2) = g(n_1, n_2 - 1) - g(n_1, n_2)$;

3. новая стратегия распределения интенсивностей обслуживания

$$\boldsymbol{\mu}'_{\mathbf{n}} = \underset{\mu_n \in \mathcal{D}_U}{\operatorname{argmin}} \{ \mu_{1,\mathbf{n}}G(\mathbf{n}, 1) + \mu_{2,\mathbf{n}}G(\mathbf{n}, 2) + \phi(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}}) \}, \quad \forall \mathbf{n} \in S. \quad (3)$$

Было получено [4], что если в определенном состоянии \mathbf{n} минимальное значение, найденное в (3), отличается от значения, связанного с текущей стратегией $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{n}}$, то $\eta' - \eta < 0$, и общая средняя стоимость функционирования сети строго уменьшается. Использование данного факта является одной из ключевых идей алгоритма последовательных приближений в пространстве стратегий, вытекающей из формулы (2). На основе этой идеи было определено следующее необходимое и достаточное условие оптимальности интенсивностей обслуживания:

Теорема 1 [4]. Интенсивность обслуживания $\boldsymbol{\mu}$ является оптимальной

тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующему условию:

$$\mu_{1,n}G(\mathbf{n}, 1) + \mu_{2,n}G(\mathbf{n}, 2) + \phi(\boldsymbol{\mu}_n) \leq \mu'_{1,n}G(\mathbf{n}, 1) + \mu'_{2,n}G(\mathbf{n}, 2) + \phi(\boldsymbol{\mu}'_n),$$

для любых $\boldsymbol{\mu}'_n \in \mathcal{D}_U$ и $\mathbf{n} \in S$.

Далее были рассмотрены свойства оптимальности тандемной сети, сформулированные в виде теорем для случая, когда общая функция затрат имеет вид (1):

Теорема 2 [4]. Если функция эксплуатационных затрат $\phi(\boldsymbol{\mu}_n)$ является линейной по $\mu_{i,n}$, то общая средняя стоимость функционирования сети η монотонна относительно $\mu_{i,n}$, для всех $i = 1, 2$ и $\mathbf{n} \in S$.

Теорема 3 [4]. Предположим, что $\phi(\boldsymbol{\mu}_n)$ вогнута по $\mu_{i,n}$. Если задано значение $\mu_{j,n}$, то оптимальным значением $\mu_{i,n}$ может быть u_i , либо $U - \mu_{j,n}$, где $i, j = 1, 2$ и $j \neq i$, $\mathbf{n} \in S$, $n_i > 0$.

Теорема 4 [4]. Если функция $\phi(\boldsymbol{\mu}_n)$ дифференцируема и вогнута (в том числе и линейна) относительно $\mu_{i,n}$, то оптимальные интенсивности обслуживания $(\mu_{1,n}^*, \mu_{2,n}^*)$ могут быть выбраны из трехэлементного набора $\mathcal{D}_v = \{(u_1, u_2), (U - u_2, u_2), (u_1, U - u_1)\}$, вместо области \mathcal{D}_U , где $n_1, n_2 > 0$.

Второй раздел «Описание алгоритма и программы для анализа тандемной сети массового обслуживания с оптимальным управлением интенсивностями обслуживания» содержит описание разработанного алгоритма и программы для оптимального управления тандемной сетью с ограничением на интенсивности обслуживания. Управление тандемной сетью состоит в поиске и использовании вектора оптимальных интенсивностей обслуживания $\boldsymbol{\mu}^*$, минимизирующего общую среднюю стоимость функционирования сети η .

В подразделе «Описание алгоритма» приводится подробное описание алгоритма поиска оптимального управления тандемной сетью. Алгоритм состоит из трех блоков, которые выполняются последовательно.

В первом блоке описывается ввод начальных данных (параметров сети), необходимых для анализа тандемной сети, а также проверка корректности введенных данных и условия существования стационарного режима функционирования сети.

Во втором блоке описывается вычисление характеристик тандемной сети, необходимых для реализации алгоритма поиска оптимального управления

рассматриваемой тандемной сетью, а также механизм блокировки требований [7,8], необходимый для предотвращения перегрузки обслуживающих приборов.

В третьем блоке описывается алгоритм поиска вектора оптимальных интенсивностей обслуживания. Результатом выполнения данного блока является вектор оптимальных интенсивностей обслуживания μ^* , минимизирующий общую среднюю стоимость функционирования сети η . Для полученного вектора μ^* вычисляется и выводится новое значение η' .

В подразделе «*Интерфейс программы*» описываются назначение, интерфейс и правила использования программы. Программный код написан на языке «C#» с помощью интегрированной среды разработки *Visual Studio*. В разработанной программе используется текстовый интерфейс пользователя. Программа функционирует в диалоговом режиме для ввода параметров тандемной сети и вывода результатов работы программы.

В подразделе «*Структура программы*» приводится подробное описание файлов, из которых состоит программа, и реализованных в них классов и методов. Программа включает в себя три файла. Код программы представлен в работе в приложении А.

В подразделе «*Пример использования программы*» рассмотрен пример использования программы для поиска оптимального управления тандемной сетью массового обслуживания. Пример результатов работы программы представлены в работе в приложении Б.

Третий раздел «Результаты исследования тандемной сети с управлением интенсивностями обслуживания» содержит описание проведенного исследования зависимости общей средней стоимости функционирования сети η и оптимального управления интенсивностями обслуживания от различных параметров тандемной сети с управлением интенсивностями обслуживания.

По результатам исследования были сделаны следующие выводы:

1. при увеличении интенсивности поступающего потока требований λ возрастает общая средняя стоимость функционирования сети η ;
2. при оптимальном управлении общая средняя стоимость функционирования сети η' принимает значение, меньшее, чем общая средняя стоимость функционирования сети η без управления;

3. при увеличении затрат на хранение i -й системы возрастает число состояний, при которых i -я система имеет максимальную интенсивность обслуживания;

4. в случае нелинейной функции затрат на хранение $\psi(\mathbf{n})$ возрастает число состояний, при которых первая система имеет максимальную интенсивность обслуживания;

5. при увеличении коэффициентов b_1 и b_2 в функции эксплуатационных расходов $\phi(\boldsymbol{\mu}_n)$ возрастает число состояний, при которых каждая система имеет соответствующую минимальную интенсивность обслуживания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе была рассмотрена тандемная сеть массового обслуживания с управлением интенсивностями обслуживания и изучены свойства оптимальности сети, являющиеся основой для итерационного алгоритма поиска оптимальной стратегии управления интенсивностями обслуживания.

Был разработан алгоритм метода анализа тандемной сети массового обслуживания с оптимальным управлением интенсивностями обслуживания с накладываемыми ограничениями на общую мощность, выделенную сети. Данный алгоритм при заданных параметрах тандемной сети, состоящей из двух систем массового обслуживания, позволяет находить вектор оптимальных интенсивностей обслуживания, минимизирующий общую среднюю стоимость функционирования сети.

По разработанному алгоритму была написана программа на языке C# с помощью интегрированной среды разработки Visual Studio для анализа тандемной сети с оптимальным управлением интенсивностями обслуживания. Данная программа позволяет задать параметры тандемной сети, ввести ограничения на интенсивности обслуживания и получить оптимальную стратегию распределения интенсивностей обслуживания, минимизирующую общую среднюю стоимость функционирования сети.

С помощью программы были исследованы зависимости общей средней стоимости функционирования сети от различных параметров сети и рассмотрены способы повышения эффективности работы сети при изменении условий ее функционирования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. М. : Наука, Физматгиз, 1966. — 432 с.
- 2 Каштанов, В. А. Теория массового обслуживания: учебное пособие / В. А. Каштанов, Г. И. Ивченко, И. Н. Коваленко. М. : Книжный дом «ЛИБ-РОКОМ», 2012. — 304 с.
- 3 Кузнецов, Н. А, Мясников Д. В, Семехин К. В. Оптимизация двухфазной системы массового обслуживания и ее применение к управлению передачей данных между двумя агентами робототехнической системы // Информационные процессы. — 2017. Т. 17, №1. — С. 19-42.
- 4 Li, Xia. Service Rate Control of Tandem Queues with Power Constraints / Xia Li, Daniel Miller, Zhengyuan Zhou, Nicholas Bambos // IEEE Transactions on Automatic Control Journal. — 2016. — V. 62. — P. 5111–5123.
- 5 Kaufman, D. L. On the introduction of an agile, temporary workforce into a tandem queueing system / D. L. Kaufman, H. S. Ahn, M. E. Lewis // Queueing Systems. — 2005. — V. 51. — P. 135-171.
- 6 Cao, X. R. Potentials, perturbation realization, and sensitivity analysis of Markov processes / X. R. Cao, H. F. Chen // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1997. — V. 42. — P. 1382-1393.
- 7 Rosberg, Z. Optimal control of service in tandem queues / Z. Rosberg, P. Varaiya, J. Walrand // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1982. — V. 27. — P. 600-610.
- 8 Naor, P. The regulation of queue size by levying tolls / P. Naor // Econometrica. — 1969. — V. 37. — P. 15-24.
- 9 Саати, Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения / Т. Л. Саати, перевод Е. Г. Коваленко, под ред. И. Н. Ковалеко, Р. Д. Конгана. М. : Издательство «Советское радио», 1965. — 510 с.
- 10 Таха, Х. Введение в исследование операций: В 2-х книгах, Кн. 2. / Х. Таха. М. : Мир, 1985. — 496 с.