

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математики и методики ее преподавания

Методика изучения тождественных преобразований в курсе алгебры

8 класса

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 461 группы

направления 44.03.01 Педагогическое образование

механико-математического факультета

Байкуловой Анастасии Алексеевны

Научный руководитель

доцент, к.п.н., доцент

Т.А. Капитонова

Зав. кафедрой

к.п.н., доцент

И.К. Кондаурова

Саратов 2021

Введение. Тождественные преобразования являются одной из основных линий школьного курса алгебры. Линия тождественных преобразований изучается на протяжении всего курса арифметики, алгебры и начального анализа.

Начиная с 5-6 классов, учащиеся начинают производить тождественные преобразования, опирающиеся на свойства и законы арифметических действий. В 7-9 классах у учащихся формируются умения и навыки выполнения преобразований тождественных выражений. Это связано со значительным увеличением числа, а также с разнообразием совершаемых преобразований. Осуществляется развитие навыков выполнения тождественных преобразований на основе закреплённых знаний о свойствах операций и алгоритмов их выполнения.

Высокий уровень знаний обучающихся при выполнении тождественных преобразований выражений проявляется в умении правильно обосновать тождественные преобразования, проследить за изменением области определения в последовательной цепочке тождественных преобразований, в быстроте и безошибочности выполнения преобразований, умении найти кратчайший путь решения к окончательному виду преобразований.

В соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования предметные результаты изучения предметной области «Математика и информатика» должны отражать: (1) овладение приемами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; (2) выполнение несложных преобразований целых, дробно рациональных выражений и выражений с квадратными корнями; раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые, использовать формулы сокращенного умножения.

Проблеме изучения тождественных преобразований в основной школе посвящены различные научные статьи, диссертации и учебные пособия (Подходова Н.С., Стефанова Н.Л., Баум И.В., А. Я. Блох и т.д.). В частности, Н.С. Подходова, Н.Л. Стефанова выделяют основные этапы изучения тождественных

преобразований: 1) пропедевтический этап (5-6 классы); 2) первый этап, использование нерасчленённой системы преобразований (начало 7 класса); 3) второй этап, рассмотрение конкретных видов преобразований (8-9 классы); 4) третий этап, формирование целостной системы преобразований (10- 11 классы).

Важный период изучения тождественных преобразований, связанный с изучением конкретных видов преобразований, приходится на 8 класс основной школы.

Всё вышеизложенное обуславливает актуальность темы исследования.

Цель бакалаврской работы: разработать методические материалы для изучения тождественных преобразований в курсе алгебры 8 класса.

Задачи исследования:

1. Охарактеризовать линию тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы.

2. Рассмотреть основные понятия по теме «Тождественные преобразования» в курсе алгебры 8 класса.

3. Разработать серию задач по теме: «Тождественные преобразования дробно-рациональных выражений».

Методы исследования: анализ методико-математической и учебной литературы, изучение нормативных документов, разработка методических материалов.

Структура бакалаврской работы: введение, два раздела («Изучение тождественных преобразований в курсе алгебры 8 класса: теоретические аспекты», «Изучения тождественных преобразований в курсе алгебры 8 класса: методические аспекты») заключение, список использованных источников.

Основное содержание работы. В первом разделе решались первая и вторая задачи бакалаврской работы.

Тождественные преобразования имеют образовательное и развивающее значение, т.к. при изучении данной темы учащиеся знакомятся:

1. С новыми определениями и понятиями, такими как тождество, тождественные преобразования, тождественно равные выражения, многочлен, рациональная дробь, квадратный корень и др.

2. С задачами содержания: «Прочитать выражение», «Доказать тождество», «Упростить выражение», «Найти числовое значение выражения наиболее рациональным способом». «Заменить выражение тождественно равным», «Разложить на множители. Это дает возможность расширить и углубить пользование алгебраической терминологией и символикой.

3. Изучение тождественных преобразований способствует отработке вычислительных навыков.

Тождественные преобразования имеют и практическое значение, т.к. они используются при решении уравнений, решении неравенств, решении систем, при доказательстве теорем и тождеств, при исследовании функций и построении графиков (играя роль «вспомогательного инструмента»).

Также тождественных преобразований имеют большое воспитательное значение, т.к. они способствуют развитию воли, сообразительности, творческой инициативы, самоконтроля. В частности, при выполнении заданий комбинированного характера ученик должен вспомнить все известные правила выполнения тождественных преобразований, суметь, следуя этим правилам, шаг за шагом сделать все выкладки, не допустить никаких ошибок, так как малейшая ошибка, например, неверно поставленный знак, делает бессмысленными все усилия. Такая работа способствует воспитанию настойчивости, аккуратности, внимания, осмыслению материала с новых позиций.

В 5-6 классах обучение математике построено таким образом, чтобы ученики приобретали навыки самых простых тождественных преобразований, но пока не употребляли термин «тождественные преобразования». Эти навыки помогают сформировать задания на раскрытие скобок, на приведение подобных слагаемых, на вынесение общего множителя за скобки и т.д. Также в 5-6 классах рассматриваются простейшие преобразования числовых и буквенных выражений.

Следует отметить, что на этом этапе обучения все преобразования выполняются учащимися на основе свойств и законов арифметики.

Первые понятия по теме «Тождественные преобразования» вводятся в 7 классе. Рассматриваются понятия тождества, тождественно равных выражений, тождественного преобразования выражений по А.Г. Мордковичу.

В 8 классе тождественные преобразования продолжают изучаться на основе дробно-рациональных и иррациональных выражений. Рассматриваются такие действия с алгебраическими дробями, как сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень.

По учебной программе А. Г. Мордковича в курсе алгебры основной школы линия тождественных преобразований в 9 классе представлена решением уравнений степени выше второй, дробно-рациональных уравнений, дробно-рациональных неравенств, систем уравнений степени выше первой.

В работе проведён анализ теоретического материала по теме: «Тождественные преобразования рациональных и иррациональных выражений» по учебнику алгебры для 8 класса Ю. Н. Макарычева.

Были рассмотрены понятия дробного выражения, рационального выражения. Также учащиеся знакомятся с понятием рациональной дроби, ее основным свойством, его применением в преобразованиях дробных выражений и с понятием тождества.

Основное свойство рациональной дроби: если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится равная ей дробь.

Дробное выражение можно записать в виде $\frac{P}{Q}$, где P и Q – рациональные выражения, причём Q обязательно содержит переменные. Такую дробь $\frac{P}{Q}$ называют рациональной дробью.

Например: $\frac{x+1}{2x-\frac{1}{3}}$, $\frac{(x+2)(x^2-3)}{a+2b+5c}$, $\frac{\frac{a+c}{b+d}}{a-b}$.

Основное свойство дроби выражается тождеством $\frac{P}{Q} = \frac{PR}{QR}$, справедливым при условиях $R \neq 0$ и $Q \neq 0$; здесь R – целое рациональное выражение. Это значит, что числитель и знаменатель рациональной дроби можно умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, одночлен или многочлен.

Начальные тождественные преобразования иррациональных выражений, учащиеся отрабатывают на решении простейших квадратных уравнений.

Ю. Н. Макарычев знакомит учащихся со свойствами арифметического квадратного корня и применением этих свойств в вычислениях и преобразованиях.

Согласно анализу содержания учебника Ю. Н. Макарычева, в работе были выделены методические приемы вычисления рациональных и иррациональных выражений.

Методические приемы вычислений рациональных выражений:

1. Приёмы записи преобразований дробных рациональных выражений.
2. Сокращение рациональных дробей.
3. Приведение рациональных дробей к общему знаменателю.
4. Сложение, вычитание, умножение и деление рациональных дробей.
5. Возведение рациональной дроби в целую степень.
6. Обобщённый приём упрощения рационального выражения (приведение подобных членов, прибавление и вычитание одного и того же числа).
7. Приёмы доказательства тождества (формулы сокращенного умножения).

Методические приемы вычислений иррациональных выражений.

1. Специальные приёмы основных простейших преобразований арифметических корней (выполняются с использованием свойств корня).
2. Преобразования выражений со степенями с рациональным показателем (выполняются с использованием свойств степени).
3. Приём доказательства неравенств. Обобщенный приём упрощения.

Во втором разделе решалась третья задача бакалаврской работы. Были рассмотрены типичные ошибки учащихся при изучении тождественных преобразований в курсе алгебры 8 класса.

К типичным ошибкам учащихся относятся:

1. Нарушение порядка действий.
2. Неправильное сокращение дробей.

Учащиеся неверно применяют формулы сокращенного умножения, нарушают правила действий над степенями с рациональным показателем.

3. Неправильное определение области допустимых значений (ОДЗ).

Учащиеся делают ошибки в определении ОДЗ либо совсем забывают о ней.

4. Ошибки при построении графиков функций.

Для многих учащихся построение графиков функций и предварительное преобразование выражений, которым задается функция, представляет большую сложность.

Анализ задачного материала школьных учебников «Алгебра. 8 класс» (Г. В. Дорофеева и А. Г. Мордковича) показал, что количество заданий, где требуется построить график функции недостаточно. Поэтому в работе была составлена серия задач по тождественным преобразованиям в курсе алгебры 8 класса. Приведем примеры нескольких заданий.

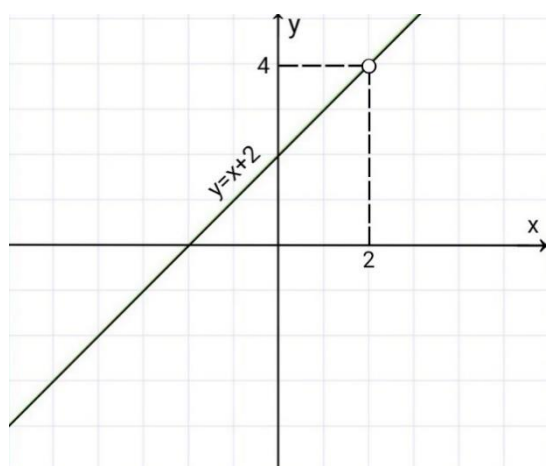


Рисунок 1

Задание 1. Построить график функции

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Решение: Преобразуем выражение: $y =$

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2 \quad \text{при} \quad x \neq 2 \quad (\text{в}$$

соответствии с рисунком 1).

Графиком функции является прямая с выколотой точкой $(2; 4)$.

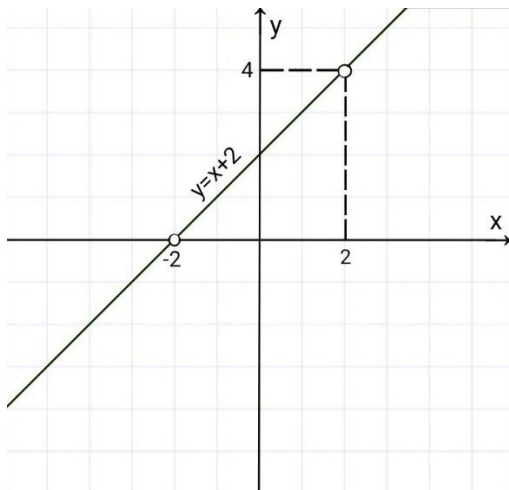


Рисунок 2

Задание 2. Построить график функции:

$$y = \frac{(x+2)(x^2-4)}{(x-2)(x+2)}$$

Решение: Упростим выражение: $y =$

$$\frac{(x+2)(x^2-4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x+2)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = x + 2 \quad (\text{при } x \neq$$

$2, x \neq -2$).

Получили, что графиком функции является прямая с выколотыми точками $(-2; 0), (2; 4)$ (в соответствии с рисунком 2).

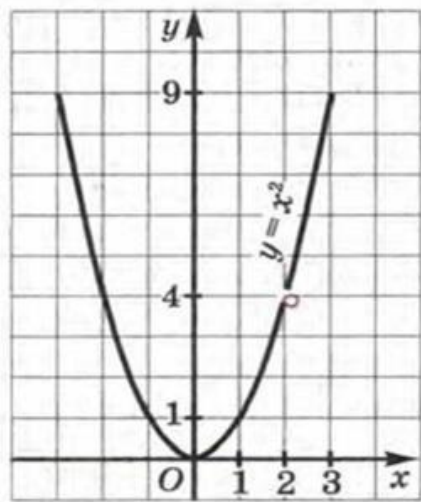


Рисунок 3

Задание 3. Построить график функции: $y =$

$$\frac{x^3-2x^2}{x-2}$$

Решение: Упростим выражение: $y = \frac{x^3-2x^2}{x-2} =$

$$\frac{x^2(x-2)}{x-2} = x^2, \quad (\text{при } x \neq 2) \quad (\text{в соответствии с}$$

рисунком 3).

Таким образом, получили, что графиком функции является парабола с выколотой точкой $(2; 4)$.

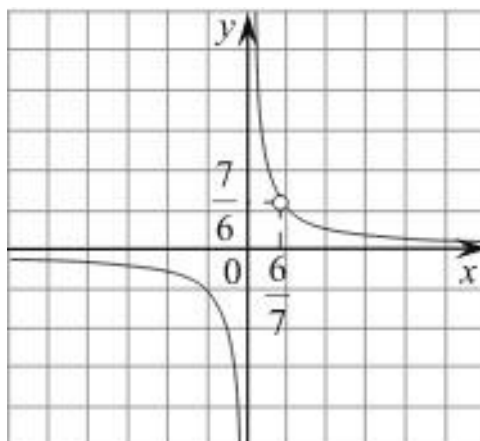


Рисунок 4

Задание 4. Постройте график функции $y =$

$$\frac{7x-6}{7x^2-6x}$$

Решение: Упростим выражение для

$$\text{функции: } y = \frac{7x-6}{7x^2-6x} = \frac{7x-6}{x(7x-6)} = \frac{1}{x}, \quad (\text{при } x \neq \frac{6}{7})$$

(в соответствии с рисунком 4).

Таким образом, графиком функции – гипербола с выколотой точкой $(\frac{6}{7}; \frac{7}{6})$.

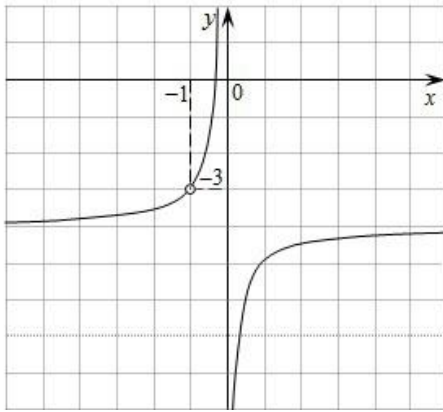


Рисунок 5

Задание 5. Постройте график $y = -4 - \frac{x+1}{x^2+x}$.

Решение: Преобразуем выражение: $y = -4 - \frac{x+1}{x^2+x} = -4 - \frac{x+1}{x(x+1)} = -4 - \frac{1}{x}$, (при $x \neq -1$ (в соответствии с рисунком 5)).

График функция – гипербола с выколотой точкой $(-1; -3)$.

Задание 6. Построить график функции $y = \frac{(x^2+7x+12)(x^2-x-2)}{x^2+5x+4}$.

$$\frac{(x^2+7x+12)(x^2-x-2)}{x^2+5x+4}$$

Решение: Преобразуем выражение:

По теореме, обратной теореме Виета, корни уравнений $x^2 + 7x + 12 = 0$, $x^2 - x - 2 = 0$, $x^2 + 5x + 4 = 0$ равны соответственно -3 и -4 ; -1 и 2 ; -1 и -4 .

Тогда по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ получаем:

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4); x^2 - x - 2 =$$

$$(x + 1)(x - 2); x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4),$$

$$\text{Имеем: } y = \frac{(x^2+7x+12)(x^2-x-2)}{x^2+5x+4} = \frac{(x+3)(x+4)(x+1)(x-2)}{(x+1)(x+4)} = x^2 + x - 6,$$

График исходной функции сводится к графику параболы $x^2 + x - 6$ с выколотыми точками $(-1; -6)$, $(-4; 6)$ (в соответствии с рисунком 6).

Представленная в работе серия заданий может использоваться на уроках при изучении темы: «Тожественные преобразования» в курсе алгебры 8 класса.

Заключение. Основные результаты бакалаврской работы:

1. Линия тождественных преобразований является одной из основных содержательных линий школьного курса алгебры.

В курсе алгебры основной школы линия тождественных преобразований развивается следующим образом:

- 5-6 класс: вынесение общего множителя за скобки, раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых;
- 7 класс: тождественные преобразования целых выражений;
- 8 класс: тождественные преобразования дробных выражений и выражений, содержащих квадратные корни;
- 9 класс: тождественные преобразования выражений, которые содержат степень с рациональным показателем.

Тождественные преобразования имеют большое практическое значение: при решении уравнений, при доказательстве тождеств и теорем.

2. В ходе анализа учебно-математической литературы рассмотрены основные понятия темы «Тождественные преобразования выражений» курса «Алгебра-8».

Тождественное преобразование – замена одного алгебраического выражения другим, тождественно равным ему, т.е. принимающим те же значения при всех допустимых значениях букв, входящих в это выражение.

Тождество – равенство, справедливое при всех допустимых значениях букв, входящих в это равенство.

3. В ходе анализа методической литературы выявлены проблемы, с которыми сталкиваются учащиеся при изучении темы «Тождественные преобразования дробно-рациональных выражений»: неумение проводить преобразования в прямом и обратном порядке; игнорирование области допустимых значений дробно-рациональных выражений; формализм знаний.

Для устранения выявленных проблем нами разработана серия заданий по теме «Тождественные преобразования дробно-рациональных выражений», дополняющая задачный материал учебника «Алгебра. 8 класс».

Основные положения исследования, проводимого в рамках бакалаврской работы, докладывались на Ежегодной студенческой научной конференции «Математика. Механика» (Саратов, СГУ, механико-математический факультет, 16 апреля 2021 г.).