

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математики и методики ее преподавания

**Возможности задач реальной математики в математическом образовании  
школьников**  
**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАРСКОЙ РАБОТЫ**

студентки 5 курса 521 группы  
направления 44.03.01 Педагогическое образование  
механико-математического факультета

Мускатиной Анастасии Павловны

Научный руководитель

старший преподаватель

Зав. Кафедрой

к.п.н., доцент

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

С. В. Лебедева

И. К. Кондаурова

Саратов 2021

## ВВЕДЕНИЕ

В повседневной жизни люди постоянно сталкиваются с решением тех или иных практических задач. Зачастую им приходится прилагать много усилий для разрешения возникших трудностей реальной жизни: они не знают с чего начать, как действовать, какое решение лучше предпринять, как произвести необходимые вычисления. Для того, чтобы в реальной жизни ученики могли не бояться встретившихся на их пути проблем, необходимо в школьном курсе рассматривать такие задачи, которые будут отражать реальную действительность и к решению которых можно применить кроме практических математические методы. Будем именовать такие задачи задачами реальной математики, и рассматривать их как подкласс практических задач.

Впервые программа под названием «Обучение реалистичной математике» появилась в Нидерландах в середине 1970-х годов, а затем многие страны подхватили эту идею и продолжили разработки в этом направлении. Так, в США и в Великобритании в 1996 году была создана программа «Математика в контексте». В 1997 г. были введены новые стандарты образования в Норвегии, в них изучение «обыденной» математики стоит в одном ряду с усвоением арифметики, алгебры и геометрии. В отечественной методике обучения математике термины «реальная математика» и «задачи реальной математики» возникли относительно недавно с включением в тексты ГИА и ЕГЭ 2010 года требований (умений), проверяемых этими заданиями экзаменационной работы. Именно с 2010 года в периодической печати (газета/журнал «Математика») стал появляться термин «задачи с реальным сюжетом», «задачи с реальными данными», «реальная математика» и т.п.

Цель бакалаврской работы – выявить возможности задач реальной математики в математическом образовании школьников.

Задачи исследования: 1) уточнить понятие задачи реальной математики и провести классификацию задач реальной математики; 2) охарактеризовать методы и этапы решения задач реальной математики; 3) описать возможности деятельности учащихся по конструированию задач реальной математики;

4) выявить роль задач реальной математики для формирования функциональной грамотности учащихся.

Методы исследования: анализ и обобщение методической литературы и периодических изданий, посвященных задачам реальной математики.

Практическая значимость бакалаврской работы заключается в возможности её использования в качестве теоретической (научной) основы для методических разработок по математике.

Работа состоит из введения, двух разделов («Понятие и классификация задач реальной математики», «Методика обучения решению задач реальной математики»), заключения и списка из 24 использованных источников и трех приложений.

### **Основное содержание работы.**

**В первом разделе основной части работы** дается определение *задачи реальной математики* – практическая задача, отражающая реальную действительность, к решению которой можно применить, кроме практических методов, математические методы. Противопоставляя задачи реальной математики практико-ориентированным задачам, мы, таким образом, указываем на конкретный характер и продуктивность первых, и общий характер и репродуктивность вторых. Всю реальную математику мы разделяем на реальные задачи (задачи с реальными данными и задачи с реальным сюжетом) и реальные ситуации (которые предлагаются учителем или самой жизнью; реальные ситуации отражаются их участниками в задачах-рассказах «о прошлом», написанных по материалам реальных событий, или потенциальными участниками в задачах-проектах о будущем) – рисунок 1.

Например, задача 1: «В жилом доме, в котором есть одно-, двух- и трёхкомнатные квартиры, всего 260 квартир. Известно, что трехкомнатных квартир на 10 меньше, чем двухкомнатных и на 5 больше, чем однокомнатных. Необходимо найти количество однокомнатных квартир» – практико-ориентированная, а задача 2: «В доме № 5 по улице Ипподромная (г. Саратов) всего 100 квартир. Известно, что трехкомнатных квартир на 25 меньше, чем

двухкомнатных, которых на 25 больше, чем однокомнатных. Сколько однокомнатных квартир в этом доме?» – задача с реальными данными.



Рисунок 1 – Классификация задач школьного курса математики

Примером *исторической задачи реальной математики* можно считать задача 3: «На вопрос о том, сколько у него учеников, древнегреческий математик Пифагор ответил так: «Половина моих учеников изучает математику, четверть изучает природу, седьмая часть проводит время в молчаливом размышлении, остальную часть составляют три девы». Сколько учеников было у Пифагора?».

*Бытовые задачи «о прошлом»* – задачи, сформулированные самими учениками на основании реальных фактов или реальных сюжетов (событий).

*Бытовые задачи «о будущем»* – задачи, в которых ученикам предлагается решить задачу, которую возможно предстоит решить в жизни, например, задача 4: «Ты хочешь подарить маме букет на день рождения. Герберы стоят 65

рублей за штуку. Из какого наибольшего числа цветов ты можешь купить букет, если у тебя есть 300 рублей?».

Если составленную учеником самостоятельно задачу реальной математики учитель предлагает классу для решения, то эта задача становится *задачей, рассказанной участником событий*.

Задачи реальной математики должны удовлетворять следующим требованиям: 1) она должна обладать познавательной ценностью и оказывать воспитывающее влияние на обучающихся; 2) ученикам должен быть понятен нематематический материал задачи; 3) в задаче обязательно должны быть реальные ситуации и /или реальные числовые данные и отношения, задаваемые вопросы и полученные ответы, которые ученики могли бы наблюдать в настоящей жизни; 4) задача реальной математики должна отражать математическую и нематематическую проблему и их взаимосвязь.

**Во втором разделе основной части работы** выделяются и подробно рассматриваются основные этапы решения задачи с реальными данными и задач с реальным сюжетом.

Контекст задач с реальными данными может не влиять на решение, содержать данные, влияющие на решение и численный результат, определять результат (то есть служить проверкой для математического решения); именно поэтому первым этапом решения задач с реальными данными является анализ текста задачи по ряду направлений (анализ контекста, числовых и иных данных условия и требования, структуры, функциональной зависимости).

Три типа задач с реальными данными соответствуют трём уровням развития функциональной математической грамотности: (а) задачи аналогичные тренировочным математическим задачам соответствуют низкому уровню грамотности, так как требуют для своего решения умений справляться с простейшими и полностью определенными ситуациями, извлекать информацию из единственного источника в единственной форме, делать простые выводы; (б) задачи аналогичные развивающим математическим задачам школьного курса математики соответствуют среднему уровню

грамотности, так как требуют для своего решения умений разбирать конкретные ситуации, работать с готовыми или изученными моделями, понимать ограничения и допущения, в которых они существуют, делать несложные выводы, давать пояснения, применять вычислительный аппарат, используя, в частности, проценты, дроби, отношения и пропорции; (в) проблемные (исследовательские) задачи соответствуют высокому уровню грамотности, так как требуют умения разрешать сложные проблемные ситуации, используя информацию из различных источников, представленную в разных формах, моделировать и исследовать модели, свободно использовать весь объем изученного математического содержания, предлагать собственные стратегии решения, излагать свои решения, выстраивать аргументацию.

Выделенные нами реальные задачи «о прошлом» и краеведческие задачи не могут быть изменены в части числовых данных, то есть нельзя на их основе составить простую вариацию и расширенную вариацию, их не решают в общем виде (т.е. вводя параметры заменой числовых данных буквами) – делать это не позволяет уникальный контекст вне зависимости от того, оказывает он влияние на решение или нет; все преобразования таких задач сводятся к расширению требований, составлению цепочки эквивалентных задач или обращению задачи; эти же задачи могут положить начало тематическим сериям.

Задачи, условия которых содержат часть базы данных могут стать основой для формулировки задач «по мотивам» реальных ситуаций – то есть для задач с реальным сюжетом.

Задачи с реальными данными можно включать в структуру уроков (задачи, требующие низкого и среднего уровней развития функциональной математической грамотности) и домашние задания (задачи, требующие среднего и высокого уровней развития функциональной математической грамотности).

Для задач с реальным сюжетом разработана общая схема решения: 1) общий первичный анализ данных; 2) доопределение задачи; 3) анализ данных доопределенной задачи и её решение (в отрыве от литературного

контекста); 4) интерпретация результата и проверка на реальность (с учетом литературного контекста).

Выделены два принципиально различных типа задач с реальным сюжетом: а) задачи описывающие ситуацию по решению некоторой математической задачи автором или иным участником событий; вне литературного контекста эти задачи чисто математические; этапы доопределения задачи, последующего анализа, интерпретации результата и проверки на реальность (с учетом литературного контекста) опускаются, а решение имитирует математическую деятельность участников событий и является своеобразной проверкой на реальность; б) задачи, описывающие реальную житейскую ситуацию, которую читателю предлагается уточнить, используя математические знания; к таким задачам рекомендуется применять общую схему решения.

Установлена важность первого этапа решения – всестороннего анализа данных условия и требования задачи; если рассказчик приводит не все нужные для решения данные и не всегда чётко формулирует требование, то задача доопределяется решающим исходя из имеющихся у него представлений об описанной ситуации; в любом случае, по завершению решения проводится проверка на реальность (с учетом литературного контекста).

Разнообразие задач реальной математики, позволяет создавать такие учебные ситуации, которые требуют от учащегося умения составить план действия по решению большого числа реальных проблем, развивая при этом разные виды и формы мышления.

На конкретных примерах рассматриваются особенности конструирования учащимися задач реальной математики.

Первый тип задач «Если бы мне пришлось...» конструируется на основе тренировочных практико-ориентированных задач школьного курса математики, как правило, бытового содержания. Для этого берется подходящая задача из учебника, и часть числовых данных «стирается» (заменяется  $\square$ ). Ученикам предлагается сконструировать задачи, подставляя вместо  $\square$  актуальные для них

реальные данные:

1. Есть желание купить  $\square$  шоколадок для одноклассниц по  $\square$  рублей каждая, а сколько дадут сдачи с пятисот рублёвой купюры?

2. Какая сумма (в рублях) будет напечатана в кассовом чеке, если стоимость рубашки  $\square$  рублей, и вы оплачиваете её по дисконтной карте с 10%-ной скидкой?

Эти своеобразные клише (ориентировочная основа действий), задающие структуру задачи, активизируют умственную деятельность школьника в направлении использования жизненного опыта к конструированию задач. При конструировании следует использовать контрольные вопросы, отсылающие к жизненному познавательному опыту: «Можно ли вместо  $\square$  подставить это (конкретное) значение? Почему?», «Как проверить достоверность информации?», «Какие источники информации использовать?»

Продемонстрируем это на примере задачи: «Ваша семья из  $\square$  человек планирует летом поехать в гости к родственникам. Можно ехать поездом, а можно – на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит  $\square$  рублей. Автомобиль расходует  $\square$  литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно  $\square$  км, а цена бензина равна  $\square$  рублей за литр. Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку?».

Предлагаем ученикам «восстановить» задачу, заполнив  $\square$ , а затем решить её. Сообща анализируем текст и выделяем частные проблемы, результаты оформляем в таблицу 1, где предложим конкретный вариант задачного конструкта. Получили задачу 1. Наша семья из 3 человек планирует летом поехать в гости к родственникам. Можно ехать поездом, а можно – на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 1823 рубля. Автомобиль расходует 6 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 669 км, а цена бензина равна 52,8 рублей за литр. Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку?

Таблица 1 - Ориентировочная основа действий для конструирования задач первого типа «Если бы мне пришлось...»

Элемент текста	Проблема	Решение проблемы	Восстановленные данные
Ваша семья из <input type="checkbox"/> человек планирует летом поехать <u>в гости к родственникам</u> . Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку?	Число человек моей семьи известно. Подразумевается, что родственники живут в другом городе. Все родственники, которых я знаю, живут в нашем городе. Нужно узнать, в каких ещё городах живут наши родственники.	Узнать у родителей (отправить SMS-сообщение)	Наша семья из 3 человек планирует летом (в июне) поехать <u>в гости к родственникам в г.Казань</u> .
Можно ехать поездом, а можно – на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит <input type="checkbox"/> рублей.	Нужно узнать, сколько стоит билет (туда и обратно) на поезд на одного человека. А если поезд не один, то выбрать тот, где билет дешевле	Узнать цену на сайте РЖД	Билет на поезд на одного человека стоит 1823 рубля (в Казань, и столько же обратно).
Автомобиль расходует <input type="checkbox"/> литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно <input type="checkbox"/> км, а цена бензина равна <input type="checkbox"/> рублей за литр.	Нужно узнать, сколько наш автомобиль расходует литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе и цену бензина.	Спросить у папы, сколько наш автомобиль расходует бензина на 100 км пути (отправить SMS-сообщение). С помощью сервиса <a href="http://avtodispatcher.ru">avtodispatcher.ru</a> узнать расстояние между городами. Узнать, какой бензин нужен и цену на него в Саратове и в Казани – через интернет.	Автомобиль расходует 6 литров бензина на 100 километров пути – на трассе и 10 литров по городу (второе значение учитывать не будем). Расстояние Саратов-Казань по трассе составляет 669 км. Бензин А-98 в Саратове 51,4 руб/л, в Казани – 54,25 руб/л. Возьмем среднее значение $\approx 52,8$

Математической моделью задачи является два числовых выражения, которые нужно сравнить:  $3 \cdot 1823 \cdot 2$  и  $6/100 \cdot 669 \cdot 2 \cdot 52,8$ , а математической моделью ответа – числовое неравенство:  $3 \cdot 1823 \cdot 2 > 6/100 \cdot 669 \cdot 2 \cdot 52,8$ . Ответом будет число 4239 – приблизительная стоимость в рублях самой дешевой поездки (на автомобиле).

Второй тип задач «Задачи вокруг нас» – позволяют «видеть» проблемные ситуации и формулировать на их основе количественные и качественные

математические и логические задачи.

1. Один оборот вокруг Земли спутник делает за 1 час 40 минут, а другой — за 100 минут. Как это может быть? (Ответ: 1 ч 40 мин = 100 мин)

2. Пара лошадей пробежала 20 км. Сколько километров пробежала каждая лошадь? (Ответ: 20 км)

Общие требования к составлению «Задач вокруг нас» – памятка для учащихся:

1) определись с тематикой задачи,

2) подбери из надежных источников или в результате наблюдения и собственного опыта интересные числовые или логические данные,

4) выбери тип математической задачи (на проценты и дроби, на уравнение или систему уравнений, на производительность), сформулируй условие сюжетной задачи,

5) найди иллюстрации (картинки, фотографии, карты и пр.), соответствующие теме, составь презентацию.

Возможная тематика «Задач вокруг нас»: а) бытовые ситуации: покупки, финансы, коммунальные платежи, кулинария, ремонт и строительные работы дома и на даче, сад, огород, цветы и дизайн дачного участка, домашние питомцы и пр.; б) прикладное творчество и игры; в) краеведческие ситуации; г) музеи и музейные экспозиции; д) путешествия (география, маршруты, время); е) события спортивной и культурной жизни страны, города, семь; ж) жизнь класса, школы, ближайшего окружения; и) история, биология и другие предметные области в цифрах и фактах.

Задача-рассказ «Как я решал задачу» конструируется двумя способами: если решение не вызвало трудностей, то задачу можно обратить – часть данных условия сделать неизвестными, а часть результатов, полученных в ходе решения, сделать известными; если решение далось с трудом, то в рассказе стоит описать и сами трудности, и пути их преодоления.

Задача-рассказ «Случай в ...» конструируется как литературно-математический текст и только на 5 этапе по программе развития литературно-

математического творчества (1 этап – развитие воображения и фантазии посредством литературно-математических игр; 2 этап – поиск математического следа в литературных произведениях (стихах, сказках, новеллах, рассказах, пьесах и пр.); 3 этап – сочинение литературных текстов; 4 этап – сочинение литературно-математических текстов различных жанров (вне занятий) с последующим афишированием; 5 этап – сочинение задач-рассказов (вне занятий) с последующим афишированием; 6 этап – включение задач-рассказов в содержание урочной и внеурочной деятельности.

Поскольку в заданиях на формирование различных видов функциональной грамотности (читательская грамотность, математическая грамотность, естественнонаучная грамотность, глобальные компетенции, финансовая грамотность, креативное мышление), присутствует математическая или логическая составляющая, то формируя функциональную математическую грамотность, мы косвенно развиваем и все остальные виды, что еще раз подчеркивает фундаментальность математической науки.

Для формирования математической грамотности следует помнить о системности формируемых математических знаний, о необходимости теоретической базы; формировать готовность к взаимодействию с математической стороной окружающего мира; учить математическому моделированию реальных ситуаций и переносить способы решения учебных задач на реальные, создавать опыт поиска путей решения жизненных задач; развивать когнитивную сферу, учить познавать окружающий мир, задаваться вопросами и решать задачи разными способами; целенаправленно формировать коммуникативную, читательскую, информационную, социальную компетенции; развивать регулятивную сферы и рефлексивную.

**Заключение.** В работе в полном объеме определено понятие задачи реальной математики и рассмотрены некоторые методические аспекты использования таких задач в математическом образовании школьников – полностью решены поставленные задачи исследования и получены следующие результаты: 1) уточнено понятие задачи реальной математики, проведена

классификация этих задач; 2) выявлены и охарактеризованы основные этапы решения задач реальной математики, а также специфические особенности задач с реальными данными; 3) описаны возможные способы организации деятельности учащихся по конструированию задач реальной математики следующих типов: «Если бы мне пришлось...», «Задачи вокруг нас».

Предметом последующих исследований могут стать источники ошибок при решении школьниками задач реальной математики, реальные задачи олимпиадной математики, конструирование формирующих и критериальных функциональных задач.