МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Методические аспекты изучения тождественных преобразований в курсе алгебры 7 класса

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 521 группы
направления 44.03.01 Педагогическое образование
механико-математического факультета
Антоновой Светланы Петровны

Научный руководитель
доцент, к.п.н., доцент ______________________ Т. А. Капитонова

Зав. Кафедрой
к.п.н., доцент ______________________ И. К. Кондаурова

Саратов 2021

Введение. Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования «овладение приемами выполнения тождественных преобразований выражений» относится к предметным результатам изучения предметной области «Математика и информатика». Начальные умения и навыки, необходимые для выполнения тождественных преобразований (умение раскрывать скобки, упрощать выражения, сокращать дроби и т.д.) учащиеся приобретают задолго до изучения темы. С основными понятиями содержательно-методической линии «Тождественные преобразования», такими как тождество, тождественное преобразование, многочлен и др., учащиеся знакомятся в курсе алгебры 7 класса.

Вопросами тождественных преобразований выражений, так или иначе, занимались все авторы современных учебников алгебры для 7 классов.

Тождественным преобразованиям выражений посвящены различные диссертационные исследования (В. И. Беляев, В. А. Фалько, В. Г. Захарова, Ю. А. Дробышева, И. В. Доржиева), учебные пособия и методические разработки (А. В. Деревянкина, Л. С. Капкаевой, С. Е. Ляпина и др.).

Цель бакалаврской работы – выявить и описать особенности изучения тождественных преобразований в курсе алгебры 7 класса.

Для достижения поставленной цели сформулированы и решены следующие задачи:

1. Выявить роль и место темы «Тождественные преобразования» в курсе алгебры 7 класса.
2. Выявить ошибки и трудности, возникающие у учащихся при изучении тождественных преобразований в 7 классе.
3. Разработать системы задач по теме для учащихся 7 классов.

Структура бакалаврской работы: титульный лист, введение, два раздела («Изучение тождественных преобразований в курсе алгебры 7 класса: теоретические аспекты», «Системы задач по теме «Тождественные преобразования» для учащихся 7 класса»), заключение, список использованных источников.

Основное содержание работы. В первой главе «Изучение тождественных преобразований в курсе алгебры 7 класса: теоретические аспекты» решались первые две задачи бакалаврской работы.

Изучение тождественных преобразований предполагает выделение четырех этапов: пропедевтического (5-6 классы); первого, на котором используется нерасчлененная система преобразований (7 класс); второго, в процессе которого выделяются конкретные виды преобразований (8-9 классы); третьего, который организует целостную систему преобразований (10-11 классы).

Простейшие тождественные преобразования числовых и буквенных выражений (приведение подобных слагаемых, раскрытие скобок и заключение в скобки и т.д.) начинают рассматриваться на пропедевтическом этапе. Систематический курс алгебры традиционно начинается в 7 классе с рассмотрения основных понятий, связанных с преобразованиями выражений.

Тема «Тождественные преобразования» имеет общеобразовательное, развивающее, воспитательное и практическое значение в курсе алгебры.

Общеобразовательное и развивающее значение. Учащиеся знакомятся: (1) с новыми понятиями (тождество, тождественные преобразования, одночлен, многочлен и др.); с тождествами (формулы сокращенного умножения и др.), (3) с задачами нового содержания: «Прочитать выражение», «Упростить выражение», «Заменить выражение тождественно равным», «Доказать тождество» и др.

Воспитательное значение. Изучение тождественных преобразований способствует развитию волевых качеств, сообразительности, творческой инициативы, самоконтроля. Выполнение заданий комбинированного характера способствует воспитанию настойчивости, аккуратности, внимания, осмыслению материала с новых позиций, поскольку побуждает учащихся вспоминать все известные правила выполнения тождественных преобразований и, следуя этим правилам, выполнять действия, не допуская ошибок. А целесообразно подобранные упражнения, например, при введении в тему, способствуют развитию интереса к математике и мотивации изучения материала.

Практическое значение. Изучение тождественных преобразований служит аналитическим аппаратом при доказательстве теорем и выводе формул, решении уравнений, неравенств и их систем, нахождении значений выражений, исследовании функций.

На уроках алгебры в 7 классе изучаются следующие разделы, посвященные тождественным преобразованиям: многочлены и действия над ними; квадратный трехчлен; формулы сокращенного умножения; разложение многочлена на множители; числовое значение буквенного выражения; тождественные преобразования; рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами (изучаются факультативно).

Оценивая роль и место преобразований в процессе изучения алгебры, авторы обращают внимание на формализм в знаниях и умениях учащихся, и, как следствие, отсутствие мотивации обучения. Проявления формализма могут быть различными: неумение учащихся решать задачу, отличную от типичной; неумение применять известную формулу свойства для выполнения вычислений или преобразований; механическое заучивание определений и т.д. Средством мотивации ценности тождественных преобразований может быть их использование, например, для решения уравнений, для сокращения дробей, для рационализации вычислений.

Различные исследования, многолетние результаты экзаменов, а также практика обучения математике в школе показывают, что учащиеся часто допускают ошибки при выполнении тождественных преобразований выражений, а также в тех заданиях, в которых преобразования являются промежуточным этапом в решении.

Учащиеся испытывают трудности при преобразовании алгебраических выражений, при выполнении задач на доказательство или решении уравнений, не умеют применять формулы сокращенного умножения, в том числе, в обратную сторону, не видят в сложных выражениях формул сокращенного умножения и т.д.

В. А. Фалько отмечает, что центральное место в тождественных преобразованиях занимает разложение многочленов на множители. Трудности усвоения этого раздела автор связывает с тем, что нельзя указать учащимся определенного универсального способа для выполнения указанных преобразований.

При разложении на множители учащимся требуется уяснить структуру выражения, проявить сообразительность и находчивость, инициативу и даже изобретательность. Нужны поиски путей решения, возможны неудачные попытки, от которых приходится отказываться, и подбирать новые способы, пока не будет достигнута цель. Операция разложения на множители требует не только знаний предшествующего материала, но и более высокого умственного и волевого развития ученика.

Поэтому важным является формирование у учащихся первоначальных представлений о преобразовании буквенных выражений и формирование умения выполнять элементарные базовые преобразования. Свойство алгебраических сумм, связанное с перестановкой и группировкой слагаемых, правило раскрытия скобок и правило приведения подобных слагаемых являются опорой при изучении многочленов.

Опишем некоторые ошибки и трудности, которые могут возникать при формировании навыков преобразования буквенных выражений:

1) при усвоении нового понятия алгебраической суммы для учащихся представляет некоторую трудность изменение порядка слагаемых. Поэтому при выполнении заданий на отработку умения преобразования выражения путем изменения порядка слагаемых учащимся рекомендуется обратить внимание на неформальное правило: в алгебраической сумме слагаемые «путешествуют» вместе со своими знаками. Используя это правило, учащиеся смогут без труда, меняя каким-либо образом слагаемые местами, получать равные выражения. Например: $2a - x + 3y = 2a + 3y - x = 3y - x + 2a$.

2) чтобы исключить ошибки при преобразовании произведений, следует обратить внимание учащихся на правила записи коэффициентов произведения (коэффициент, равный 1, обычно не пишут: равенство $1 \cdot a = a$ является законом алгебры; а вместо коэффициента –1 просто ставят знак «–»), а также на целесообразность начинать преобразование с определения знака результата.

3) учащиеся часто не понимают смысла требования «раскрыть скобки». Поэтому на начальном этапе изучения темы рекомендуется уточнять: данное выражение надо преобразовать в выражение без скобок.

Основные ошибки при изучении *формул квадрата суммы и квадрата разности* появляются у учащихся при применении формул в обратную сторону. Каждую из формул учащиеся должны уметь записать и прочитать и слева направо (для возведения в квадрат), и справа налево (для сворачивания трехчлена в квадрат двучлена).

Полезны примеры, показывающие, что трехчлен $a^2 - 2ab + b^2$может быть представлен в виде квадрата двучлена двумя способами: как $(a - b)^2$ и как $(b - a)^2$.

Одним из наиболее трудных для учащихся является *прием выделения полного квадрата* из многочлена второй степени и применение этого приема для разложения многочлена на множители. Выделение полного квадрата из многочлена второй степени является важным умением, однако зачастую учащиеся не могут увидеть формулы сокращенного умножения и определить, чего не хватает до полной формулы. Для формирования этого умения учащимся может помочь запоминание нескольких формул и запись их в обратном порядке. Например, ученик учит формулы:

$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1,$

$(a + 2)^2 = a^2 + 4a + 4,$

$(a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9,$

затем учится узнавать среди многочленов полные квадраты и, наконец, учится дополнять многочлены до полных квадратов.

Изучение формул суммы и разности кубов и формул куба суммы и куба разности считаются необязательными и находят значительно меньшее применение в курсе алгебры по сравнению с другими формулами сокращенного умножения. Однако каждый учащийся должен запомнить эти формулы и научиться их применять в обе стороны для разложения на множители многочленов.

Разложение многочленов на множители вынесением общего множителя за скобки – это прием, которым должны овладеть все учащиеся. В качестве вспомогательного упражнения можно рассмотреть следующее: вынесите общий множитель за скобки и вычислите значение выражения $127 \cdot 9 - 27 \cdot 9$.

Полезно приучить учащихся после вынесения общего множителя за скобки мысленно выполнить обратное действие – умножение одночлена на многочлен. Такой прием самоконтроля поможет избежать многих ошибок.

Разложение на множители способом группировки традиционно вызывает трудности у учащихся. Они должны понимать, что это эвристический, а не алгоритмический метод, т.е. удачную группировку нужно искать методом проб и ошибок. Естественно, что ошибок становится меньше и пробы осуществляются быстрее по мере накопления опыта. Далеко не всякая задача в математике решается с первого раза, надо учиться умению отказываться от неудачно выбранного способа решения. Именно в этом основная воспитательная ценность метода группировки.

Для предупреждения ошибок полезно, чтобы при разложении многочлена на множители способом группировки учащиеся заранее прикидывали, какой общий множитель можно будет вынести за скобки на последнем этапе, и в зависимости от этого определяли, какой знак – «плюс» или «минус» – удобно сразу ставить перед той или иной скобкой. Например, при разложении на множители многочлена $xy^2 - by^2 - ax + ab + y^2 - a$ удобно выполнить группировку членов многочлена следующим образом:

$$xy^2 - by^2 - ax + ab + y^2 - a = (xy^2 - by^2 + y^2) - (ax - ab + a).$$

В курсе математики основной школы способ группировки используется для разложения на множители многочленов:

– с одной переменной степени не выше второй,

– с одной переменной третьей и четвертой степеней (частные случаи, как правило, неполные многочлены),

– с двумя или более неизвестными, в которых очевиден общий множитель.

Для разложения многочленов с одной неизвестной степени выше второй на множители способом группировки требуются дополнительные теоремы (Безу, схема Горнера и др.), такие задачи решаются только в курсе углубленного изучения математики.

В преодолении указанных трудностей и снижении числа ошибок при изучении многочленов большую роль может сыграть система задач, обеспечивающая преемственность преподавания, постепенное нарастание трудностей, закрепление оперативных навыков. Система задач, как правило, состоит из композиции различных задачных конструкций: вариаций (множество задач, полученных из данной путем перестановки числовых величин), цепочек (задачи выстраиваются по принципу последовательного усложнения), серий (конструкция, задачи которой обладают определенным сходством хотя бы одного из своих структурных компонентов), циклов (совокупность отдельных задач, составляющих содержание решения некоторой объединяющей их задачи) задач.

Во втором разделе работы «Системы задач по теме «Тождественные преобразования» для учащихся 7 класса» решалась третья задача бакалаврской работы.

Перечислим требования, предъявляемые к системе упражнений и задач по математике: (1) принцип однотипности; (2) непрерывного повторения; (3) принцип наличия контрпримера; (4) принцип сравнения; (5) принцип полноты; (6) принцип сознательности и активности; (7) принцип доступности и др.

По мнению Л. С. Капкаевой, «основной принцип организации любой системы заданий – предъявление их от простого к сложному с учетом необходимости преодоления учениками посильных трудностей и создания проблемных ситуаций».

С учетом основного принципа, указанного Л. С. Капкаевой, нами разработаны системы задач на формирование умений разложения многочленов на множители с помощью формул сокращенного умножения, приема вынесения общего множителя за скобки и способа группировки.

В качестве примера рассмотрим *систему задач «Разложение многочленов на множители с помощью формул сокращенного умножения».*

Для разложения многочлена на множители используются формулы:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \tag{1}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \tag{2}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \tag{3}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \tag{4}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \tag{5}$$

В серии заданий 1-10 для разложения многочленов на множители нужно воспользоваться формулой разности квадратов. Сначала выполняются простейшие задания 1-5, в которых формула (1) находит непосредственное применение. При работе с этими упражнениями следует особо обратить внимание на слабых учащихся, так как без выработки соответствующих умений они не смогут успешно продолжать изучение курса алгебры. В заданиях 6-10 формула (1) применяется для разложения выражений на множители в более сложных ситуациях.

1. $4 - 36a^2 = 2^2 - (6a)^2 = (2 - 6a)(2 + 6a)$;
2. $a^2 - 9b^2 = a^2 - (3b)^2 = (a - 3b)(a + 3b)$;
3. $49x^2 - 121a^2 = (7x)^2 - (11a)^2 = (7x - 11a)(7x + 11a)$;
4. $x^2y^2 - 1 = (xy)^2 - 1^2 = (xy - 1)(xy + 1)$;
5. $25 - 36p^2c^2 = 5^2 - (6pc)^2 = (5 - 6pc)(5 + 6pc)$;

6. $x^6 - 4a^4 = (x^3)^2 - (2a^2)^2 = (x^3 - 2a^2)(x^3 + 2a^2)$;

7. $144a^4 - 625c^2 = (12a^2)^2 - (25c)^2 = (12a^2 - 25c)(12a^2 + 25c)$;

8. $25p^{10} - \frac{1}{9}q^{12} = (5p^5)^2 - \left(\frac{1}{3}q^6\right)^2 = \left(5p^5 - \frac{1}{3}q^6\right)\left(5p^5 + \frac{1}{3}q^6\right)$;

9. $(2x-1)^2 - 25 = (2x-1)^2 - 5^2 = \big((2x-1) - 5\big)\big((2x-1) + 5\big) =$
$= (2x-6)(2x+4) = 2(x-3) \cdot 2(x+2) = 4(x-3) \cdot (x+2)$;

10. $(a+3)^2 - (b-2)^2 = \big((a+3) - (b-2)\big)\big((a+3) + (b-2)\big) =$
$= (a+3-b+2)(a+3+b-2) = (a-b+5)(a+b+1)$;

В серии заданий 11-20 для разложения многочленов на множители нужно воспользоваться формулами разности и суммы кубов. Сначала выполняются простейшие задания 11-15, в которых формулы (2) и (3) находят непосредственное применение. В заданиях 16-20 формулы (2) и (3) применяются для разложения выражений на множители в более сложных ситуациях.

11. $a^3 + 8 = a^3 + 2^3 = (a+2)(a^2 - 2a + 4)$;

12. $216 - m^3 = 6^3 - m^3 = (6-m)(36 + 6m + m^2)$;

13. $216c^3 + 1000 = (6c)^3 + 10^3 = (6c+10)((6c)^2 - 6c \cdot 10 + 10^2) =$
$= (6c+10)(36c^2 - 60c + 100)$;

14. $125a^3 - 8b^3 = (5a)^3 - (2b)^3 = (5a - 2b)((5a)^2 + 5a \cdot 2b + (2b)^2) =$
$= (5a-2b)(25a^2 + 10ab + 4b^2)$;

15. $a^3b^3 - 1 = (ab)^3 - 1^3 = (ab-1)(a^2b^2 + ab + 1)$;

16. $\frac{1}{8}a^3 - \frac{8}{27}b^3 = \left(\frac{1}{2}a\right)^3 - \left(\frac{2}{3}b\right)^3 = \left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b\right)\left(\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{3}b + \left(\frac{2}{3}b\right)^2\right) =$
$= \left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b\right)\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}ab + \frac{4}{9}b^2\right)$;

17. $a^6 + 27b^3 = (a^2)^3 + (3b)^3 = (a^2 + 3b)((a^2)^2 - a^2 \cdot 3b + (3b)^2) =$
$= (a^2 + 3b)(a^4 - 3a^2b + 9b^4)$;

18. $x^6 - a^6 = (x^2)^3 - (a^2)^3 = (x^2 - a^2)((x^2)^2 + x^2 \cdot a^2 + (a^2)^2) =$
$= (x-a)(x+a)(x^4 + x^2a^2 + a^4)$;

19. $\frac{8}{27}a^3 + \frac{1}{64}x^9 = \left(\frac{2}{3}a\right)^3 + \left(\frac{1}{4}x^3\right)^3 = \left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{4}x^3\right)\left(\left(\frac{2}{3}a\right)^2 - \frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{4}x^3 + \right.$

$\left. + \left(\frac{1}{4}x^3\right)^2\right) = \left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{4}x^3\right)\left(\frac{4}{9}a^2 - \frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{16}x^6\right);$

20. $(2c+1)^3 - 64 = (2c+1)^3 - 4^3 =$

$= (2c+1-4)((2c+1)^2 + 4(2c+1) + 4^2) =$

$= (2c-3)(4c^2 + 4c + 1 + 8c + 4 + 16) = (2c-3)(4c^2 + 12c + 21).$

В серии заданий 21-31 даны трехчлены, для разложения которых на множители используются формулы (4), (5). При выполнении упражнений 21-28 нужно убедиться, что трехчлен является полным квадратом. Задания 21-26 – простейшие задания, в которых предлагается представить каждый из заданных квадратных трехчленов в виде квадрата двучлена. Задание 24 – контрпример, в котором трехчлен не является полным квадратом, поэтому разложить его на множители с помощью формул (4) и (5) нельзя. Задания 27-28 – на применение формул (4) и (5) в более сложных ситуациях. Чтобы реализовать принцип сознательности и активности в заданиях 29-31 предлагается дополнить многочлены одночленами, чтобы выполнялось равенство.

21. $a^2 - 4ab + 4b^2 = a^2 + (2b)^2 - 2 \cdot a \cdot 2b = (a-2b)^2;$

22. $x^2 - 14x + 49 = x^2 + 7^2 - 2 \cdot x \cdot 7 = (x-7)^2;$

23. $4y^2 - 12y + 9 = (2y)^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2y = (2y-3)^2;$

24. $25a^2 + 10ab + 4b^2 = (5a)^2 + (2b)^2 + 5a \cdot 2b;$

25. $9p^2 + 48pq + 64q^2 = (3p)^2 + (8q)^2 + 2 \cdot 3p \cdot 8q = (3p+8q)^2;$

26. $0{,}25x^2 + 3xy + 9y^2 = (0{,}5x)^2 + (3y)^2 + 2 \cdot 0{,}5x \cdot 3y = (0{,}5x + 3y)^2;$

27. $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2)^2 + 1^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 = (x^2+1)^2;$

28. $4x^4 - 12x^2y + 9y^2 = (2x^2)^2 + (3y)^2 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 3y = (2x^2 - 3y)^2;$

29. $b^2 - 20b + \square = (\square - 10)^2;$

30. $25a^2 + \square + \frac{1}{4}b^2 = \left(\square + \frac{1}{2}b\right)^2;$

31. $\square + 56ab + 49b^2 = (4a + \square)^2.$

Заключение. Основные результаты бакалаврской работы:

1. Тема «Тождественные преобразования» имеет общеобразовательное, развивающее, воспитательное и практическое значение в курсе алгебры.

2. На уроках алгебры в 7 классе изучаются следующие разделы, посвященные тождественным преобразованиям: многочлены и действия над ними; квадратный трехчлен; формулы сокращенного умножения; разложение многочлена на множители; числовое значение буквенного выражения; тождественные преобразования; рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами.

3. При изучении тождественных преобразований в 7 классе учащиеся допускают ошибки и испытывают трудности при сложении и вычитании многочленов, при умножении одночлена на многочлен, при умножении многочлена на многочлен, при изучении формул квадрата суммы, квадрата разности и разности квадратов, при изучении приема выделения полного квадрата, при изучении формул суммы и разности кубов и формул куба суммы и куба разности, при разложении многочленов на множители вынесением общего множителя за скобки и способом группировки. В преодолении указанных трудностей и снижении числа ошибок большую роль может сыграть система задач, обеспечивающая преемственность преподавания, постепенное нарастание трудностей, закрепление оперативных навыков.

4. Основными требованиями к системе упражнений и задач по математике являются использование принципов однотипности, непрерывного повторения, наличия контрпримера, сравнения, полноты, сознательности и активности, доступности.

5. В работе приведены примеры систем задач на формирование умений разложения многочленов на множители с помощью формул сокращенного умножения, приема вынесения общего множителя за скобки и способа группировки, а также примеры серий практических и занимательных задач по теме для учащихся 7 класса.