МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики её преподавания

Задачи «на части» в математическом образовании школьников

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 521 группы

направление 44.03.01 Педагогическое образование

механико-математического факультета

Крук Олеси Андреевны

Научный руководитель

Старший преподаватель ________________________ С.В. Лебедева

Зав.кафедрой

доцент, к.п.н. ________________________ И.К. Кондаурова

Саратов 2021

Введение. Вопрос формирования умений и навыков решения задач у учащихся является одним из главных вопросов в методике обучения математики. Основным средством усвоения учениками понятий и методов школьного курса математики считаются задачи. Задачи «на части» (на пропорциональное деление) являются классическим типом задач, решаемых различными методами и способами, а также классическими учебными и критериальными задачами начального и общего математического образования на протяжении всей его истории (достаточно посмотреть учебники разных эпох и задачи переводных и выпускных испытаний).

Специально методикой обучения решению задач «на части» в разное время занимались исключительно авторы школьных учебников, а также педагоги-математики, исследовавшие прикладные, практические, практико-ориентированные, реальные, контекстные задачи школьного курса математики и различные аспекты формирования функциональной грамотности школьников: М. Е. Головин (Руководство к арифметике. 1786), П. С. Гурьев (Арифметические листки. 1832), Н. В. Бугаев (Руководство к арифметике. Арифметика дробных чисел. 1886), Ф. И. Егоров *(*Руководство арифметики : для средних учеб. заведений и гор. училищ.1907), *Н. А.* Извольский Арифметика. 1911), А. П. Киселев *(*Систематический курс арифметики. 1915; Арифметика: учебник для 5-го класса семилет. и сред. школы / перераб. проф. А. Я. Хинчина. 1947), К. Ф. Лебединцев (Счет и мера. Арифметика в связи с начатками геометрии. 1924), И. Г. Попов (Арифметика: учебник для 5 и 6 классов. 1936), И. К. Андронов и В. М. Брадис (Арифметика: пособие для средней школы. 1957), Ю. М. Колягин и В. А. Оганесян (Учись решать задачи, 1980), И. Я. Депман и Н. Я. Виленкин (За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра. Геометрия: Кн. для учащихся 10-11-х кл. общеобразовательных учреждений. 1996), Г. В. Дорофеев (Пособие по математике для поступающих в вузе: избранные вопросы элементарной математике, 1968; Процентные вычисления: Пособие по математике для общеобразоват. кл. и кл. экон. профиля, 1997), В. А. Далингер (Текстовые задачи на проценты, смеси, сплавы и концентрацию: учебное пособие. 2006) и другие. Имеются и психолого-педагогические исследования этого вопроса. Однако эти материалы должным образом не обобщены и не систематизированы с точки зрения единого подхода к методике обучения решению задач «на части».

Цель бакалаврской работы: выявить специфические особенности задач «на части» как одного из основных средств обучения математике.

Задачи бакалаврской работы: 1) уточнить понятие задачи «на части» (выявить её структуру, провести классификацию и т.п.); 2) выявить основные этапы решения различных классов задач «на части»; описать разнообразные подходы, методы, способы и приемы их решения; 3) решить ряд частных методических вопросов, которые возникнут в процессе исследования.

Методы исследования: теоретические (системный анализ, обобщение и конкретизация), педагогические моделирование и проектирование.

Структура работы: введение, два раздела («Задачи «на части»: особенности структуры и решения» и «Методические аспекты изучения задач «на части»), заключение, список использованных источников, приложение.

Основное содержание работы. В первом разделе «Задачи «на части»: особенности структуры и решения» уточняется определение задачи «на части»: пусть некоторое целое A (число, множество, величину, отрезок и т.п.) разделили на n частей (n – больше 1) в отношении $a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n$; если такая ситуация явно или неявно описана в задаче, то будем называть её *задачей «на части»*.

Если целое A – математический объект (число, геометрическая фигура), то задачу «на части» назовём *математической,* если – нематематический, то задачу «на части» назовём *практической.*

Задача «на части» называется *простой (элементарной),* если в отношении $a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n$ данные не связаны друг с другом или с целым другими отношениями. Если, в задаче «на части» данные связаны друг с другом или с целым помимо отношения $a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n$ ещё и другими отношениями, то такая задача называется *составной*.

По представлению данных условия и требования задачи можно выделить: *явные числовые* задачи «на части», в которых явно указано, в каком отношении произведено разбиение объекта на части; *явные словесные* задачи «на части», в которых числовое отношение заменяется на *слово или словосочетание адекватное* этому отношению; *явные приведенные к 1/100 или 1/1000 части* – задачи «на проценты» и «на промилле»; *явные комбинированные,* в которых фигурируют различные способы представления отношений частей целого; *неявные* задачи «на части», в тексте которых не фигурируют части, как таковые, но указано арифметическое (на *a* больше/меньше) или геометрическое (в *b* раз больше/меньше) отношение величин.

Если отношения частей в задаче выражено исключительно натуральными числами, то это *задачи «на части» в натуральном отношении*, если отношения частей в задаче допускают дробные числа – *задачи «на части» в рациональном отношении*; все остальные задачи – *задачи «на части» в действительном отношении.* Практически все геометрические задачи «на части» – задачи в действительном отношении.

Задачи «на части» разделов «Арифметика» и «Алгебра» и большая часть геометрических задач «на части» школьного курса математики являются *количественными* задачи, т. е. их требование предполагает выполнение вычислительных процедур. *Качественные* задачи «на части» (процедурные: на построение, доказательство, разрезания и т.п.), если и содержат вычисления, то только в качестве вспомогательных процедур, встречаются в школьном курсе геометрии, а также входят в содержание занятий математических кружков.

Возможны следующие методы и способы решений задач «на части».

1. Решение на информационных моделях.

Задача 1. Одинъ безродный оставляетъ послѣ себя имѣнiе трём друзьямъ, и даётъ первому треть, второму двѣ пятыя, а остальныя 3200 рублей третьему; требуется узнать, какъ велико было имѣнiе покойника, и части двухъ первых наслѣдниковъ.

Построение модели начинаем с изображения прямоугольника – рисунок 1 – «стоимость имения». Этот прямоугольник нужно разделить на равные части так, чтобы выполнялись все условия задачи.

Разобьем его сначала на 3 равные части (для этого изобразим такой же прямоугольник, и далее новое разбиение будем проводить на других равных прямоугольниках, которые будем изображать ниже первого «на одной из его сторон»), чтобы выделить наследство 1-ого друга. Второму досталось 2/5, значит, каждую треть нужно разделить ещё на 5 частей, выделить 5 равных прямоугольников, а затем справа отделить два из них – наследство 2-го друга. Оставшийся прямоугольник – наследство 3-го друга – составляет 4/15 стоимости имения (как следует из модели – в соответствии с рисунком 1) и = 3200.

Дальнейшие вычисления проводятся на информационной модели устно:

2/5 = 6/15 – часть наследства 2-го друга.

1/3 = 5/15 – часть наследства 1-го друга.

3200 : 4 = 800 (руб.) –1/15 часть наследства.

800 · 5 = 4000 (руб.) –1получил 1-й друг.

800 · 6 = 4800 (руб.) –1получил 2-й друг.

800 · 15 = 12000 (руб.) – стоимость имения.

Стоимость имения														
1-ому другу					3-му другу 3200				2-му другу					
					3200 : 4 = 800									
800	800	800	800	800	800	800	800	800	800	800	800	800	800	800
4000					3200				4800					
12000 руб.														

Рисунок 1

Ответ. Первый друг получил 4000 рублей, второй – 4800 рублей , а само имение оценено в 12000 рублей.

2. Решение методом редукции практических задач «на части» на примере задачи 1.

1) Если 1-му другу досталось 1/3 имения, а 2-му другу 2/5 имения, значит,

всё имение можно разделить на равных $3 \cdot 5 = 15$ (частей).

2) Найдём, сколько частей от всего имения составляет наследство 1-го друга: $1/3 \cdot 15 = 5$ (частей)

3) Теперь найдём, сколько частей составляет наследство 2-го друга от всего имения: $2/5 \cdot 15 = 6$ (частей)

4) Теперь можем посчитать, сколько частей составляет имение 3-го друга: $15 – (5 + 6) = 4$ (части)

5) Так как наследство 3-го друга составляет 3200 рублей и это 4 части стоимости имения, можем найти, сколько составляет одна часть наследства:
$3200 : 4 = 800$ (рублей)

6) Найдём, сколько получил 1-ый друг за своё наследство, если оно составляет 5, а одна часть – 800 руб.: $800 \cdot 5 = 4000$ (рублей)

7) Найдём, сколько получил 2-ой друг за своё наследство, если оно составляет 6 частей, а одна часть – 800 руб.: $800 \cdot 6 = 4800$ (рублей)

8) Найдём, сколько составляет стоимость всего имения:
$4000 + 4800 + 3200 = 12\,000$ (рублей)

3. Математические моделирование составных задач «на части».

Простые задачи «на части» можно решать по редукции или на информационных моделях, составные же проще решаются составлением адекватной алгебраической модели. К математическому моделированию прибегают и при решении геометрических задач алгебраическими методами.

Задача 2. Разделить отрезок на две части так, чтобы меньшая часть относилась к большей, как большая – к длине самого отрезка.

Решение. Пусть a – длина первой части отрезка, b – длина второй части отрезка. $a > 0$, $b > 0$. Найдём, чему равны длины a и b. Алгебраической моделью решения данной задачи, будет являться равенство $\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$ на множестве положительных чисел.

Преобразуем его к виду $b^2 = a^2 + ab$, и далее к виду $b^2 – ab – a^2 = 0$

Пусть $a = 1$, тогда $b^2 – b – 1 = 0$. $D = 1 + 4 = 5$.

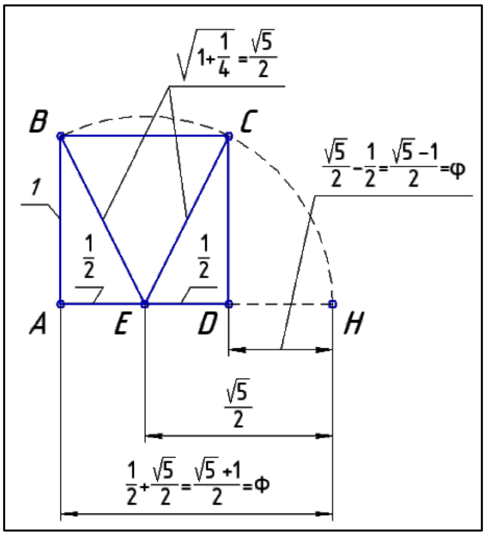

Рисунок 2

$$b_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx\frac{1+2{,}2}{2}\approx 1{,}6$$

Если меньшую часть принять за 1, то большая часть отрезка равна $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Само построение показано на рисунке 2.

4. Качественные геометрические задачи «на части» предполагают, в первую очередь, разработки процедуры для выполнения требования, а затем, при необходимости, реализацию этой процедуры.

Задача 3. Дан квадрат. Сколько есть различных способов разделить его на две части в отношении 2 : 3 отрезком или ломаной, состоящей не более чем из 3 звеньев.

Задача состоит из двух задач: (3.1) Сколько есть различных способов разделить отрезком квадрат на две части с отношением площадей 2 : 3? (3.2) Сколько есть различных способов разделить квадрат на две части с отношением площадей 2 : 3 ломаной, состоящей не более чем из 3 звеньев?

Эти задачи имеют бесконечное множество решений.

Покажем для задачи 3.1. Известно, что для выпуклого четырёхугольника, имеющего пару параллельных сторон a, b и высоту h справедлива формула для вычисления площади: S = (a + b)h : 2. Или S = ch, где c = (a + b) : 2 – средняя линия. Имеются два крайних (вырожденных) случая, когда:

a = 0, и тогда мы имеем треугольник, площадь которого S = ah/2 = ch.

a = b, и тогда мы имеем прямоугольник, площадь которого S = ah = ch.

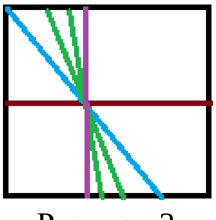

Рисунок 3

Если a = h, то прямоугольник является квадратом, а его площадь S = a^2.

Все эти рассуждения подводят нас к решению задачи 3.1 – в соответствии с рисунком 3:

1) Провести среднюю линию квадрата.

2) Разделить среднюю линию в отношении 2 : 3.

3) Любой отрезок, соединяющий стороны квадрата, параллельные его средней линии, делит квадрат на две части с отношением площадей 2 : 3.

Доказательство. Площадь первой части $S_1 = 2h$, а второй $S_2 = 3h$. Их отношение $S_1 : S_2 = 2h : 3h = 2 : 3$.

Покажем для задачи 3.2. Разделим наш квадрат последовательно на 5, 10, 15, … 5n равных частей и отделим отрезком или 2-3 звеньевой ломаной на две части с отношением площадей 2 : 3. Поскольку последовательность разбиений 5, 10, 15, … 5n бесконечна, то задача имеет бесконечно много решений. На рисунке 4 показаны некоторые.

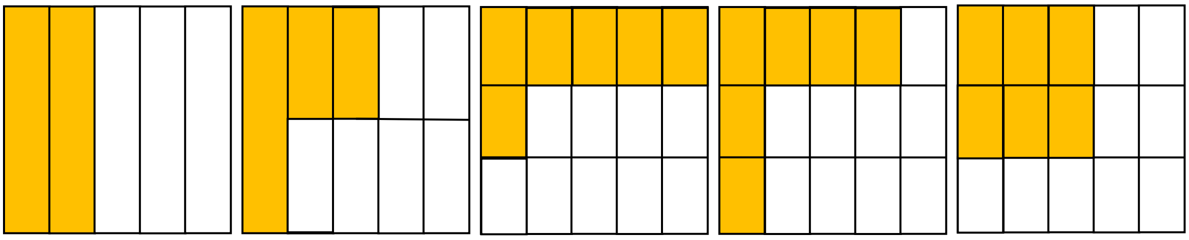

Рисунок 4

Рассматривая процесс решения задач «на части», неоднократно использовался термин «модель» или «моделирование». Под *подходящей моделью* решения задач «на части» понимается модель адекватная задаче и позволяющая быстрее решить задачу, избегая при этом громоздких процедур и технически сложных вычислений (при которых есть вероятность арифметической ошибки).

Приведенные текстовые задачи «на части» решают по редукции, в развивающих целях – устно. Для неприведенных задач «на части» сначала строится подходящая информационная модель, затем при необходимости, переходят к построению алгебраической модели. Задачи «на части» в натуральном и рациональном отношениях можно пробовать решать с использованием информационных графических моделей, задачи «на части» в действительном отношении – построением алгебраических моделей.

Наиболее сложным типом задач школьники, абитуриенты и даже студенты считают задачи «на проценты», и это вполне понятно: формируемые с начальной школы умения выполнять действия над числами к двенадцати годам (моменту обучения решению задач на проценты) принимают характер обобщенного умения, автоматизируются и обращаются в навык. Эти навыки «переносятся» учениками и на действия с процентами, которые являются не числами, а отношениями. Для решения задач «на проценты» используются, как правило, табличные модели.

<u>Задача 4</u>. На первом поле 65% площади засеяно овсом. На втором поле овсом занято 45% площади. Известно, что на первом и втором полях вместе под овсом занято 53% общей площади. Какую часть всей площади составляет первое поле?

Информационная модель задачи описывается таблицей 1. Анализ вспомогательной модели показывает, что для решения необходимо ввести две переменные, поскольку в задаче не указаны отношения между известными и неизвестными величинами. Построим вторую информационную модель на основе первой, вводя буквенные величины и выполняя возможные действия (1)-(4) – таблица 2.

Таблица 1 – Информационная табличная модель задачи 4

ПОСЕВЫ ОВСА						
	I		II		I + II	
	%	га	%	га	%	га
Засеяно	***65%***	*?*	***45%***	*?*	***53%***	*?*
Не засеяно	–	–	–	–	–	–
Всего	***100%***	*?*	***100%***	*?*	***100%***	*?*

?

Таблица 2 – Информационная табличная модель задачи 4

ПОСЕВЫ ОВСА						
	I		II		I + II	
	%	га	%	га	%	га
Засеяно	***65%***	$^{1)}0,65x$	***45%***	$^{2)}0,45y$	***53%***	$^{3)}0,65x+0,45y$ / $^{4)}0,53(x+y)$
Не засеяно	–	–	–	–	–	–
Всего	***100%***	x	***100%***	y	***100%***	$x+y$

$$\frac{x}{x+y} = ?$$

Используя таблицу в качестве вспомогательной информационной модели, построим разрешающую алгебраическую модель задачи. Пусть x и y –

соответственно площади 1-го и 2-го полей. Тогда, *0,65x* – площадь 1-го поля, засеянного овсом; *0,45y* – площадь 2-го поля, засеянного овсом; *0,53 (x + y)* – площадь двух полей, засеянная овсом и *0,65x + 0,45y* – площадь двух полей, засеянных овсом. Одна и та же величина «площадь двух полей, засеянных овсом» выражена двумя способами – двумя выражениями, которые можно уравнять. Итак, разрешающей моделью задачи стало линейное уравнение с двумя неизвестными, позволяющее выполнить требование задачи, то есть определить нужное отношение: $0,65x + 0,45y = 0,53 (x + y)$.

Выделим требуемое отношение $\frac{x}{x+y}$ и найдём его значение $\frac{2}{5}$.

<u>Ответ</u>. $\frac{2}{5}$ часть засеянной площади составляет первое поле.

Другие методы и способы решения дают историко-педагогические задачи «на части» Под историко-педагогической задачей «на части» понимается задача, являющаяся частью педагогического наследия отечественной системы образования и имеющая различия в решении принятом в своей исторической эпохе и современном решении.

Историко-педагогическая задача «на части» (как, например, задача 1) может быть предложена современным ученикам как на уроках математики по соответствующим темам: «Задачи на дроби», «Задачи на доли», «Проценты» и т.п., а также при введении, закреплении, повторении и контроле знаний.

<u>Задача 5:</u> «Одинъ безродный оставляетъ послѣ себя имѣеніе трём друзьямъ, и даётъ первому треть, второму двѣ пятыя, а остальныя 3200 рублей третьему; требуется узнать, какъ велико было имѣеніе покойника, и части двухъ первых наслѣдниковъ».

Проанализируем решение, предложенное Этьеном Безу, автором книги «Курс математики. Часть I содержащая въ себѣ Ариѳметику и таблицу Логариѳмовъ простыхъ чиселъ отъ 1 до 10000»: «*Явствуетъ ещё по содержанію сего вопроса, что имѣніе должно дѣлиться на 3 и на 5; и такъ беру число 15, изъ котораго вычитаю треть и двѣ пятыя части его, и въ* *остаткѣ получаю 4; потомъ говорю, как 4 содержится къ 3200, такъ 15 къ четвёртому члену, которой выходитъ 12000 рублей, и представляетъ всё имѣеніе. Части же наслѣдниковъ будутъ 4000, 4800 и 3200»* .

Решение, предложенное Безу, выступает в качестве правила, относящимся к пропорциям, называется оно «Правило положения». Суть этого правила заключается в том, что для решения задачи брали произвольное число, соответствующее условиям задачи, над которым выполняли действия для получения ответа. В данной задаче произвольное число равно 15.

Заключение. Основные результаты, полученные при написании бакалаврской работы: 1) уточнено определение понятия задача «на части», на основе этого определения была составлена классификация задач и для более понятного представления подобраны примеры задач «на части» к этой классификации; 2) выявлены основные методы, способы и приёмы решения количественных задач «на части»: на информационных моделях, методом редукции, математического моделирования; предложены рекомендации по решению качественных геометрических задач «на части»; эти методы проиллюстрированы на задачах из классификации; 3) решены методические проблемы, возникшие в процессе исследования: выбор подходящей модели, использование историко-педагогических задач «на части» в обучении математике современных школьников.

Материалы бакалаврской работы могут быть полезны учителям, работающим в общеобразовательных школа, лицеях, гимназиях.