

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

**Конструирование исследовательских задач
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студентки 5 курса 521 группы
направления 44.03.01 Педагогическое образование
механико-математического факультета

Никитиной Елены Петровны

Научный руководитель

старший преподаватель

Зав. кафедрой

к.п.н., доцент

С. В. Лебедева

И. К. Кондаурова

Саратов 2021

Введение. Согласно основным положениям, утвердившимся в методической науке, решение задач в обучении математике является видом учебной деятельности, обеспечивающим и усвоение математического содержания, и формирование умений и навыков, и достижение развивающих и воспитательных целей образования. Эффективность учебной работы напрямую определяется тем, какие именно задачи, и в какой последовательности предлагаются учащимся, какими способами они решаются и насколько велика доля активности, самостоятельности учеников в процессе их решения. Организовать работу детей по решению задач и управлять ею – большое искусство, основным инструментом которого является целесообразная задачная конструкция, позволяющая надолго увлечь школьников решением и вести их по ступеням познания к открытию математических истин, а, может быть, даже и к созданию небольших теорий, обеспечивать возникновение атмосферы продуктивной исследовательской деятельности.

Теоретическим и практическим аспектам задачных конструкций, а также вопросами конструирования исследовательских задач посвящены работы: группы арзамасских ученых под руководством профессора М. И. Зайкина: С. В. Арюткина, Р. М. Зайкин, Н. Н. Егулмова, О. М. Абрамова и др.; варьирование текстовых задач стало объектом исследований А. А. Смирновой; теория школьных математических задач, теория обучения логическому поиску решения школьных математических задач, продуктивные задачи в обучении математике школьников подробно освещены в диссертации и многочисленных статьях А. А. Аксёнова; конструирование математических задач как средство творческого развития исследовательских способностей учащихся рассматривает Л. В. Шоркина, как средство формирования математической компетентности учащихся 5-6 классов – Е. Л. Шквыря; задачам и задачным конструкциям посвящены работы С. В. Лебедевой.

Цель бакалаврской работы – выявить содержательные и процессуальные особенности конструирования исследовательских задач (на предметном содержании 5-9 классов).

Для достижения поставленной цели сформулированы и решены следующие задачи: 1) уточнить понятие исследовательской задачи (как школьной задачи предметной области «Математика»), 2) сформулировать основные требования к структуре и содержанию исследовательской задачи (как школьной задачи предметной области «Математика»), 3) разработать несколько задачных конструкций, включающих исследовательские задачи (для учащихся 5-9 классов общеобразовательной школы).

Методы исследования: анализ научной, методико-математической, учебной математической литературы; теоретический анализ (теоретическое обобщение, системный анализ, моделирование); педагогическое методическое проектирование (разработка задачных конструкций).

Бакалаврская работа состоит из введения, двух разделов основной части («Исследовательские задачи для школьников как обязательный структурный компонент предметной области «Математика»»; «Методика разработки некоторых видов исследовательских задач для школьников»), заключения, списка из 31 использованных источников и приложения.

Результаты работы докладывались на ежегодной научной студенческой конференции «Математика. Механика» (Саратов, СГУ, механико-математический факультет, 24 апреля 2021 г.).

Основное содержание работы. В первом разделе основной части работы уточнено понятие исследовательской задачи как школьной задачи предметной области «Математика», которой присущи *эвристичность* (решающему при первом обращении к задаче не известны ни теоретический базис, ни способ её решения; при анализе данных условия и требования теоретический базис решения может быть определён частично или полностью, но способ решения всегда будет новым по отношению к имеющемуся практическому базису), *корректность* (определяется согласованностью между собой всех компонентов информационной структуры задачи в смысле сущности их предметного содержания) и *нечёткость* (в задаче при всей её корректности первоочередные

компоненты нуждаются в конкретизации и уточнения на основе строгих логических рассуждений).

Выявлены следующие особенности исследовательских задач предметной области «Математика» общего образования:

1) неперенные этапы работы с исследовательскими задачами: I – анализ данных, требования, устранение нечёткости, определение базиса решения; II – построение информационной модели (при отсутствии таковой) и поиск пути, метода, способа решения; III – осуществление решения; IV – анализ решения;

2) два типа исследовательских задач – задачи с планом (указанием) исследования и без такового; исследовательские задачи с планом решения будем называть *исследовательскими работами*;

3) общие подходы к решению: а) с построением адекватной информационной модели и решением-рассуждением «на этой модели»; б) с построением адекватной информационной модели и последующим построением математической модели решения; в) с построением адекватной математической модели решения;

4) различные уровни сложности исследовательских задач, соответствующих уровням функциональной грамотности школьников; при этом исследовательские логические задачи с реальной проблемной ситуацией, требующей построения математической модели, могут быть решены учащимися верно, но недостаточно обоснованно;

5) любая исследовательская задача имеет естественное продолжение, то есть позволяет решающему сформулировать новую задачу для исследования;

6) все рассмотренные задачи предлагаются ученикам на уроках (или учебных занятиях) в готовом виде;

7) способ решения исследовательской задачи должен быть найден учащимся самостоятельно; в исследовательских работах этому способствует план (ход работы), в остальных случаях можно, при необходимости, предложить перечень вопросов-указаний и других «подсказок». Кроме того, полезно на этапе анализа решения осуществить рефлексию.

Выделены учебные (предлагается школьникам в готовом виде) и продуктивные (формулируется школьником самостоятельно) исследовательские задачи. Указана их связь с функциональной математической грамотностью.

Выявленные особенности исследовательских задач позволяют отнести их к числу обязательных структурных компонентов предметной области «Математика», и, следовательно, рекомендовать к регулярному использованию этих задач в процессе изучения математики школьниками.

Во втором разделе основной части работы описывается методика разработки некоторых видов исследовательских задач для школьников и школьниками.

Помимо требований эвристичности, корректности и нечёткости, заложенных в самом определении исследовательской задачи, сформулировали ряд вспомогательных требований к структуре и содержанию, позволяющих самостоятельно конструировать исследовательские задачи.

Требование концентрации внимания на задаче исследования предполагает такую структуру задачи, в которой:

(а) требование предшествует данным условия, например, задача 7: «Увеличивай дробь 0,6 в 10 раз, в 100 раз, в 1000 раз. Наблюдай, что будет изменяться. Сделай вывод»;

(б) задача сформулирована в форме проблемного вопроса, в котором одновременно присутствуют и данные условия, и требование, например, задача: «По какому признаку числа 12,16,17,18,20,21,45,98 можно разбить на две группы?»;

(в) задача начинается с описания некоторой проблемной ситуации, требующей постановки задачи или завершающейся проблемным вопросом, например: «Как узнать, в каком порядке и с каким отставанием от победителя велогонки финишировали Дима, Саша, Андрей и Вася, если известно, что они заняли со второго по пятое места, при этом Саша обогнал Диму на 39 секунд, но отстал от Васи на 41 секунду, Андрей был впереди Васи на 12 секунд, но отстал от победителя на 13 секунд?».

Требование ориентации на уровень развития функциональной грамотности предписывает:

(1) в структуру задач, формирующих исследовательские умения (то есть низкого уровня сложности), включать ориентировочную основу действий, то есть разрабатывать такие задачи как исследовательские работы учащихся;

(2) в структуру задач, развивающих исследовательские умения (то есть среднего уровня сложности), включать цепочку проблемных, восполняющих или уточняющих вопросов;

(3) структуру задач, совершенствующих исследовательские умения (то есть высокого уровня сложности) дополнять логической составляющей: включать логические проблемы, как например; формулировать задачу в общем виде; ставить вопрос о существовании и т.п.

Требование мотивационной основы исследовательской деятельности обязывает при составлении исследовательских задач учитывать разнообразие интересов учащихся, охватывать объем учебной темы или раздела курса или иметь интегрированный характер (надпредметный, внутрипредметный, межпредметный).

Описан процесс конструирования простой и расширенной вариаций математической задачи, и этот процесс рассматривается в качестве новой для учеников исследовательской задачи.

Простая вариация задачи – множество задач, полученных из данной путём перестановки числовых величин – обладает неявно выраженной исследовательской функцией, поэтому её, как правило, снабжают дополнительным побуждающим к исследованию условием. Без этого условия простая вариация превращается в серию тренировочных задач, которую можно использовать в компьютерных тренажёрах.

На примере показано, как составить простую вариацию. Для этого сначала задача записывается в общем виде, например: «В велогонке Дима, Саша, Андрей и Вася заняли со второго по пятое места. Саша обогнал Диму на a секунд, но отстал от Васи на b секунд. Андрей был впереди Васи на c секунд,

но отстал от победителя на d секунд. В каком порядке финишировали мальчики, и с каким отставанием от победителя?». Далее, будем подставлять вместо букв a, b, c, d значения из множества $\{12, 13, 39, 41\}$; получим $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ задачи, которые можно предложить учащимся для индивидуальной исследовательской работы. Если вместо этого сформулировать дополнительное побуждающее к исследованию условие: как изменится результат, если числовые данные в задаче переставить произвольным образом? – то учащиеся, для того, чтобы ответить на этот вопрос, будут вынуждены самостоятельно составить простую вариацию.

Расширенная вариация задачи – множество задач, полученных из некоторой общей задачи путём подстановки числовых величин из наперёд заданных множеств значений каждого параметра.

На примере показано, как составить расширенную вариацию. Записываем задачу в общем виде: «Существует ли такое положительное число, при сложении которого с числом, ему обратным, получится сумма, которая в a раз меньше суммы кубов этих чисел?». Будем подставлять вместо единственного параметра a значения из множества $\{2, 3, 4, \dots, N + 1\}$, где N – количество учеников в классе; получим ровно столько задач, сколько учеников в классе. Каждый получает свою задачу, решает её, формулирует гипотезу о справедливости общего утверждения ([не]существует положительное число, при сложении которого с числом, ему обратным, получится сумма, которая в a раз меньше суммы кубов этих чисел). Далее – беседа и коллективное доказательство гипотезы – решение задачи в общем виде.

Простая и расширенная вариации некоторой исследовательской задачи выполняют двоякую функцию в обучении математике: обеспечивают алгоритмическую деятельность учащихся (выполнение по образцу или изученному правилу вычислений, измерений, построений и т.п.) и формируют исследовательские умения (проводить анализ наблюдаемых объектов и выполнять описание наблюдений; классифицировать объекты (выделять существенные признаки объекта или последовательности объектов,

устанавливать основание классификации или делать выбор основания); обобщать и находить закономерности; конструировать математические объекты). Простые и расширенные вариации задач могут быть использованы учителем для развития активного, самостоятельного, творческого мышления школьников на любом этапе урока. Включение таких заданий в содержание математической деятельности школьников позволяет формировать исследовательские умения наилучшим образом.

В качестве специфической продуктивной исследовательской задачи рассматривается задача реальной математики; на конкретных примерах иллюстрируются принципы конструирования таких задач школьниками.

Задачами реальной математики называют задачи школьного курса математики, которые отражают реальную действительность, и к решению которых можно применить кроме практических математические методы. *Продуктивная задача реальной математики* – задача, которую школьник сформулировал самостоятельно на материале реальной жизненной ситуации одним из следующих способов:

1) Учитель предлагает некоторую полезную информацию и формулирует один вопрос. Ученики формулируют новые вопросы.

2) Учитель предлагает составить свою собственную задачу по мотивам данной ситуации, при этом ученик может внести изменения в описательную часть ситуации, оставив требование задачи без изменения.

3) Учитель предлагает составить свою собственную задачу «о будущем», используя форму некоторой практической задачи, например, «Вы хотите купить . Какая сумма будет напечатана в кассовом чеке, если стоит рублей, и вы оплачиваете покупку по дисконтной карте с 10 %-ной скидкой?»

4) Учитель предлагает составить свою собственную задачу по определено теме, например, «Рецепт любимого блюда», указав состав продуктов на 100 г готового изделия, а затем сформулировать на основании этих данных не менее 3 вопросов. Задание сложное, ученики могут и не

составить нужное число вопросов. В качестве примеров (при необходимости) можно дать заготовки.

Продемонстрированы на конкретном примере возможности организовать исследование и конструирование новых задач на материале логических задач из контрольно-измерительных материалов современных итоговых проверочных/экзаменационных работ.

Под *логической задачей* понимают класс задач, обладающих следующими характеристическими особенностями: 1) словесная формулировка условия, возможно с опорой на некоторую информационную модель (рисунок, таблица, схема и т.п.); 2) это качественная задача, её основное требование – выявление свойств данного объекта (атрибутивность) и/или отношений между данными объектами (реляционность), а нахождение количественных характеристик объекта является дополнительным или вспомогательным требованием; 3) отношение между условием и требованием потенциально содержит в себе способ решения задачи – предписание совершить определенные действия (анализа, абстрагирования, сравнения, классифицирования, обобщения, оперирования свойствами и др.) и указания на объект, относительно которого предлагается совершить данные действия; 4) решение опирается в первую очередь на знание и использование *логических операций и законов логики*, и только затем, на предметные (в нашем случае, математические теоретические и операциональные) знания; 5) решение строится на информационном моделировании (составление и заполнение таблиц, построение графиков, моделирование на полупрямой, моделирование с помощью блок-схем и т.д.), построении определённой схемы операций, системы выводов и т.п.; 6) решение изначально эвристично, алгоритмичность возможна только после появления идеи решения.

Такие задачи включаются в содержание всех современных итоговых проверочных/экзаменационных работ. Например, задача «В семье Михайловых пятеро детей – три мальчика и две девочки. Выберите верные утверждения. 1) У каждой девочки в семье Михайловых есть две сестры. 2) Дочерей у

Михайловых не меньше трёх. 3) Большинство детей в семье Михайловых – мальчики. 4) У каждого мальчика в семье Михайловых сестёр и братьев поровну» – из демоверсии ВПР 2021 по математике 6 класс. Решение нужно начинать с классификации утверждений на «чисто логические» и «математические».

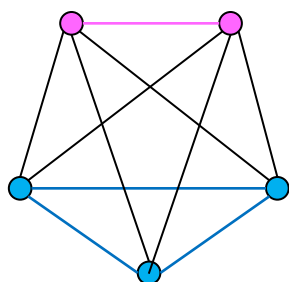


Рисунок 1

К «чисто логическим» (говорится о родственных отношениях) отнесем утверждения (1) и (4), к «математическим» (говорится о количестве) – (2) и (3).

Для «чисто логических» построим схему родственных связей – рисунок 1. Цветными точками, розовыми и голубыми, будем обозначать соответственно девочек и мальчиков, а отрезками – родственные связи. Все точки должны быть соединены отрезками, так как все дети из задачи – родственники: розовые отрезки соответствуют отношению «сёстры», голубые – «братья», черные – «брат – сестра».

Осталось интерпретировать каждое утверждение – таблица 1.

Таблица 1

Утверждение	На схеме должно быть	Выполняется или нет
1) У каждой девочки в семье Михайловых есть две сестры.	Из розовой точки выходит два розовых отрезка	нет
4) У каждого мальчика в семье Михайловых сестёр и братьев поровну.	Из голубой точки выходит 2 черных и 2 голубых отрезка	да

«Математические» утверждения переведем на математический язык и проанализируем – таблица 2.

Таблица 2

Утверждение	На математическом языке	Выполняется или нет: доказательство
В семье Михайловых пятеро детей – три мальчика и две девочки.	Пусть d – число девочек, m – число мальчиков в семье, тогда $d = 2, m = 3$	дано
2) Дочерей у Михайловых не меньше трёх.	$d \geq 3$	нет: $d = 2, d \geq 3 \Rightarrow 2 \geq 3$ (л)
3) Большинство детей в семье Михайловых – мальчики.	$m > d$	да: $d = 2, m = 3, m > d \Rightarrow 3 > 2$ (и)

После решения предлагаем ученикам: сформулировать другие утверждения по условию задачи, обменяться ими в паре, проверить на истинность; составить задачу про свою семью, обменяться ими в паре, решить.

Умелое сочетание индивидуальной, групповой и коллективной форм деятельности по решению логических задач, основанное на принципах педагогики сотрудничества, позволяет учащимся провести решить эти задачи частично или полностью самостоятельно.

Заключение. В работе на предметном содержании математических дисциплин курса математики 5-9 классов выявлены содержательные и процессуальные особенности конструирования исследовательских задач – полностью решены поставленные задачи исследования и получены следующие результаты: 1) уточнено понятие исследовательской задачи как школьной задачи предметной области «Математика», которой присущи *эвристичность*, *корректность* и *нечёткость*; выявлены особенности исследовательских задач предметной области «Математика» общего образования, которые позволяют отнести их к числу обязательных структурных компонентов предметной области «Математика», и, следовательно, рекомендовать к регулярному использованию этих задач в процессе изучения математики школьниками; выделены учебные и продуктивные исследовательские задачи, указана их связь с функциональной математической грамотностью; 2) сформулирован ряд вспомогательных требований к структуре и содержанию исследовательских задач, позволяющих самостоятельно их конструировать; 3) описан процесс конструирования простой и расширенной вариаций математической задачи, и этот процесс рассматривается в качестве новой для учеников исследовательской задачи; 4) в качестве специфической продуктивной исследовательской задачи рассматривается задача реальной математики; 5) рассмотрены возможности организовать исследование и конструирование новых задач на материале логических задач из контрольно-измерительных материалов современных итоговых проверочных/экзаменационных работ.