МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Кружок «Математические ступени 5-6-7»

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 521 группы

направления 44.03.01 Педагогическое образование

механико-математического факультета

Сариевой Ольги Вячеславовны

Научный руководитель

зав. кафедрой, к.п.н., доцент ______________________ И. К. Кондаурова

Зав. кафедрой

к.п.н., доцент ______________________ И. К. Кондаурова

Саратов 2021

Введение. Основной формой организации работы с учащимися в дополнительном математическом образовании являются занятия математического кружка. Математические кружки несут основную содержательно-обучающую нагрузку дополнительного математического образования учащихся. Изучением проблем организации досуговой деятельности школьников заложены в трудах М.Б. Балка, П.М. Горева, Н.М. Епифановой, И.С. Петракова, А.В. Фаркова, А.А. Гусева и др. Однако проблема продолжает оставаться актуальной, в частности в плане обновления имеющегося методического обеспечения.

Цель работы: теоретически обосновать и практически проиллюстрировать возможность реализации дополнительного образования детей в формате математического кружка.

Задачи работы:

1. Уточнить определение и цели работы математического кружка.

2. Раскрыть организационные вопросы создания и эффективного функционирования математического кружка (планирование работы кружка, формы работы на кружке, особенности проведения занятий).

3. Разработать методическое обеспечение работы математического кружка «Ступени 5-6-7» (тематика и планы занятий кружка).

Методы работы: анализ и систематизация психолого-педагогической и методико-математической литературы; обобщение опыта работы действующих кружков; разработка методических материалов.

Структура работы: титульный лист; введение; два раздела; заключение и список использованных источников.

Основное содержание работы. Первый раздел «Математический кружок: теоретические аспекты» посвящен решению первой и второй задачам бакалаврской работы. Проанализировав имеющуюся в нашем распоряжении литературу, мы уточнили определение и цели работы математического кружка и раскрыли организационные вопросы создания и эффективного функционирования математического кружка (планирование работы кружка, формы работы на кружке, особенности проведения занятий); обобщили опыт современного состояния кружкового математического образования.

При этом под математическим кружком мы понимали самодеятельное объединение учащихся под руководством педагога, в рамках которого проводятся систематические занятия с учащимися во внеурочное время.

Основными целями проведения кружковых занятий по математике являются: привитие интереса учащимся к предмету; углубление и расширение их знаний, умений и навыков; развитие математического кругозора, мышления, исследовательских умений, творческих способностей; воспитание настойчивости, инициативы; обучение учащихся самостоятельно добывать знания из дополнительной литературы.

В работе математических кружков можно выделить два направления. Первое ориентировано на формирование первоначального интереса к математике, второе – на углубление и расширение знаний по предмету и работу по развитию математического мышления.

Также мы установили, что в основе кружковой работы лежат принципы *доступности* и *строгой добровольности*. Кружок может проводиться при любом числе желающих, но оптимально комфортное количество членов кружка варьируется от 5 до 15 человек. Кружковые занятия должны проходить в *разнообразных формах*, учитывающих индивидуальные особенности учащихся и организационные факторы, связанные со временем, местом проведения и содержанием изучаемого материала. Система кружковых занятий должна быть максимально *гибкой*: учитывать интересы и способности каждого школьника, давать возможность вновь прибывающим учащимся начинать заниматься в кружке с любого момента. В то же время содержание кружковых занятий должно отвечать принципу *концентрической последовательности*: один и тот же материал изучается несколько раз на разных этапах с различным уровнем сложности.

На первом занятии кружка надо разработать устав (права и обязанности членов кружка). Желательно также, чтобы кружок имел своё название, эмблему, девиз.

Занятия кружка обычно проводятся 1 раз в 1-2 недели, продолжительность занятий кружка может составлять 30-90 минут в зависимости от возраста учащихся. Для учащихся 5 классов рекомендуется продолжительность занятий 30-45 минут, для 6-7 классов – 60-90. Начинать работу кружка лучше с середины сентября или с 1 октября. А завершать в конце апреля – начале мая.

Прежде чем создать кружок, будущий руководитель должен разработать его план и программу. План работы кружка составляется на год. Форма плана более информативна в виде календарно-тематического планирования.

Программа кружка может содержать пояснительную записку, учебно-тематический план, содержание занятий, цели занятий: основные знания и умения, формируемые у учащихся, литературу, а может содержать только план занятий.

Обобщая опыт современного кружкового математического образования, мы выявили организацию работы кружков в системе дистанционного обучения, речь идет об онлайн-кружках, которые массово проводились во время весеннего карантина 2019/2020 учебного года.

Далее в нашей работе были описаны концептуальные основы создания кружка «Математические ступени 5-6-7»: выделены пояснительная записка, цели кружка, основные формы работы на занятиях, планируемые результаты освоения программы кружка, календарно-тематическое планирование, возможные критерии оценок на кружке, подведение итогов работы, инструментарий для оценивания результатов.

Во втором разделе «Кружок «Математические ступени 5-6-7»: практические аспекты» представлено методическое обеспечение работы школьного математического кружка «Математические ступени 5-6-7», апробированное в МБОУ СОШ с.Канавка Александрово-Гайского района

Саратовской области в сентябре-октябре 2020 года в период второй педагогической практики с 12 учащимися 7 класса. Было проведено два занятия кружка («Формулы включений и исключений». «Сравнимость чисел по модулю».), на которых учащиеся работали с большим интересом, осмысленно, не просто изучая теоретический материал.

В качестве примера приведем фрагмент занятия кружка «Сравнимость чисел по модулю».

Цель занятия: дать представление о понятии «сравнимости чисел по модулю».

Задачи занятия: развивать самостоятельность и мышление учащихся; формировать у учащихся навыков применения понятия «сравнимости чисел по модулю» к решению простейших задач.

Ход занятия

Учащимся выдаются тезисы занятия, в которых пропущены основные понятия и выводы, которые объясняются руководителем кружка.

По ходу занятия ученик должен все это вставить.

Пропущенные понятия в данном тексте выделены курсивом.

Каждые 3-5 минут в ходе занятия ученикам задаются краткие устные или письменные экспресс-задания, позволяющие проверить усвоение материала. В конце занятия проводится викторина по основным изученным понятиям.

Каков будет остаток от деления числа $(7778 \cdot 7779 \cdot 7780 \cdot 7781 \cdot 7782 \cdot 7783)$ на 7? Для решения этой задачи нам не потребуется ЭВМ. Немного терпения, и можно научиться решать такие задачи в уме. Надо только знать немного арифметику, но не обычную арифметику, которую учат в школе, а так называемую «Арифметику остатков». Так называется глава серьёзной математической науки – «теории чисел».

С арифметикой остатков мы буквально сталкиваемся на каждом шагу. Вот несколько примеров.

Пример первый.

Когда вы пошли в школу, на часах было ровно восемь. Когда вы ложились спать, часы показывали десять, а $10 - 8 = 2$. Но разве прошло два часа с того момента, как вы ушли в школу? Нет не два, а целых четырнадцать.

Дело в том, что стрелки, дойдя до показания 12-00, каждый раз начинают отсчёт времени заново, с нуля, часы нам показывают не полное время, прошедшее с момента, когда они показывали 00-00, а лишь остаток от деления его на двенадцать.

Пример второй.

В коридоре висит счётчик. Взгляните на него. Он показывает, предположим, 0729 киловатт/часов. А на самом деле, сколько электроэнергии израсходовано с момента установки счётчика? 729 кВт/ч? Или 10729? Или, может быть, 30729? По показанию счётчика этого не скажешь. Ведь после 9999 на счётчике будет 0000, и счёт начнется сначала.

Счётчик так задуман, что указывает не полный расход электроэнергии, а только остаток от деления израсходованного числа киловатт/часов на 10000.

Пример третий.

В 1984 г. 1 января приходится на воскресенье. А каким днем недели будет 1 января 1988 г.?

Решение.

Если бы число дней в году делилось на 7, то 1 января приходилось бы на один и тот же день недели, скажем на воскресенье, как в 1984 г. Но в високосном 1984 г. 366 дней.

Разделив 366 на 7, получаем 52 полные недели и ещё 2 дня в остатке. Значит, 1985 г. начнётся не с воскресенья, а со вторника.

В 1985 г. 365 дней, и остаток от деления на 7, будет равен 1, что приведёт к «сдвигу». Нового года ещё на один день недели; то же самое произойдёт в 1986 и 1987 гг. Значит, 1 января 1988 г. будет пятница.

Можно привести ещё много примеров и задач, в которых основную роль играет не частное, а остаток. Для начала займёмся арифметикой остатков от деления на 7.

Делитель в теории чисел называют «модулем», а числа, дающие при делении на модуль 7 одинаковые остатки, называют «равноостаточными» или «сравнимыми по модулю 7». Тот факт, что два числа А и В при делении на некоторый модуль М дают одинаковые остатки, т.е. сравнимы по модулю М, записывают так: $A \equiv B \pmod 7$.

То, что знак сравнения напоминает по своему виду знак равно, не случайно, как будет видно из дальнейшего. Рассмотрим, по какому принципу построена следующая таблица:

0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34
35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Точки, как обычно в математике, означают, что по этому же принципу расположены в таблице и все прочие натуральные числа.

Этот принцип весьма прост. Все целые неотрицательные числа вписаны подряд: в первой строке – первые семь, во второй – семь последующих и т.д. – семёрка за семёркой. Какие же числа при этом оказались в одном столбце? Это тоже ясно.

Соседние числа столбца отличаются на 7, так что в третий слева столбец попали числа 2, $2 + 7 = 9$, $9 + 7 = 16$ и т.д. При делении на 7 все они дают в остатке 2. Числа 3-го слева столбца при делении на 7 дают в остатке 2. Числа четвёртого слева столбца при делении на 7 дают в остатке 3, числа седьмого столбца – 6, числа первого столбца – 0, т.е. делятся на 7 без остатка.

Остатки в таблице выделены жирным шрифтом – это первые, верхние числа каждого столбца. Можно сказать, что в один столбец попали те и только те числа, которые при делении на 7 равноостаточны, т.е. сравнимы друг с другом по модулю 7.

Например: *171≡3 (mod 7)*, т.к. при делении 171 на 7 получим в остатке 3.

Итак, все целые неотрицательные числа разбились на семь классов: в класс с индексом 0 попали все числа, которые при делении на 7 дают в остатке 0 (делятся на 7 без остатка) – это числа левого столбца таблицы. В класс с индексом 1 попадают числа следующего столбца, дающие при делении на 7 в остатке 1, и т. д. Отсюда вытекает:

Правило определения класса. *Чтобы узнать, в каком классе находится некоторое число, надо найти остаток от деления этого числа на 7. Этот остаток равен индексу класса.*

Экспресс-задание 1 *(устная работа с таблицей):*

Определите, в каком классе находятся числа 85, 117, 124, 213, 1084? (Ответ:1,5,5,3,6).

Заметим ещё, что если разность двух чисел делится на 7 без остатка, то оба числа попадают в один столбец, в один класс.

Например: *266 – 168 = 98* и 98 делится на 7, и 266 делится на 7, и 168 делится на 7. Делаем выводы:

Выводы:

Вывод первый.

В один класс попадают все числа, дающие при делении на модуль один и тот же остаток, т.е. если при делении чисел a и b на число m получаются равные остатки, то a и b называются сравнимыми по модулю m.

Например: *12≡7(mod 5)*, т.к. остатки от деления 12 и 7 на 5 будут равными.

Если а делится на m, то *a≡0(mod m)* и наоборот, если *a≡0(mod m),* то а делится на *m*.

Вывод второй.

Два числа принадлежат к одному классу тогда и только тогда, когда их разность делится без остатка на модуль.

Теперь я выберу любое число класса «3» (т.е. из четвертого столбца), например, 395 и прибавлю к нему любое число класса «5» (из шестого столбца), например, число 173. Если всё правильно сделать, то сумма окажется в классе один (во втором столбце).

В самом деле, $395+173=568\equiv 1 (mod\ 7)$, если какое-нибудь слагаемое в сумме заменить числом того же класса, то и это слагаемое, и вся сумма увеличится или уменьшится на несколько семёрок, т.е. останутся в том же классе. Достаточно сложить 3 и 5 и определить, что 8 попадает в класс «1». Отсюда получаем:

Вывод третий.

Остаток от деления суммы на модуль не изменится, если одно из слагаемых или каждое слагаемое заменить другим числом этого класса (в частности, индексом этого класса, т.е. сравнимым с ним по этому модулю).

Используя этот вывод не трудно решить следующую задачу:

Не проводя обычных вычислений, найти остаток от деления на 7 следующей суммы: $8+79+780+7781+77782+777783$.

Решение: Как легко заметить, остатки от деления слагаемых на 7 равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6; например, $77782=77777+5$, а $777783=77777+6$. Таким образом, индексы классов, равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Воспользуемся выводом третьим и заменим в данной сумме каждое слагаемое индексом его класса – индекс суммы при этом не изменится. Остаётся найти остаток от деления суммы на 7.

$1+2+3+4+5+6=21$

Эта сумма делится на 7 без остатка, значит, и данная в условии сумма делится на 7 без остатка.

Пользуясь обозначениями сравнения чисел по модулю, можно так сформулировать третий вывод:

Если $A \equiv B \ (mod\ M)$ и $C \equiv D (mod\ M)$, то $A+C \equiv D+B (mod\ M)$. Другими словами, сравнения по одному и тому же модулю можно складывать. Таким же свойством, как мы знаем, обладают и обычные равенства.

Используя эти обозначения, можно решение задачи записать так:

$8 \equiv 1 (mod\ 7),\ 79 \equiv 2 (mod\ 7),\ 7781 \equiv 4 (mod\ 7),\ 77782 \equiv 5 (mod\ 7),\ 777783 \equiv 6 (mod\ 7)$,

Откуда,

$$8+79+780+7781+77782+777783 \equiv 1+2+3+4+5+6 \equiv 21 \equiv 0 (mod\ 7),$$

а это как раз и означает, что данная в условии задачи сумма делится на 7 без остатка, это было первое свойство сравнений.

Теперь мы уже можем попытаться решить задачу, с которой начали. Она несколько напоминает предыдущую задачу, но вместо суммы там стоит произведение. Посмотрим, не обладает ли произведение таким же свойством, как и сумма.

Рассмотрим произведение нескольких, скажем, трёх чисел: A, B и C. Что произойдёт, если в произведении ABC число A заменить другим числом того же класса A_1? Так как A_1 отличается от A на число, кратное 7, то $A_1=A+7K$, где K – некоторое целое число. Значит $A_1BC=(A+7K)\ BC=ABC+KBC$. Отсюда видно, что ABC и A_1BC принадлежат к одному классу (отличаются на число, кратное 7). Следовательно, справедлив следующий вывод:

Вывод четвёртый.

Остаток от деления произведения нескольких чисел на модуль M не изменится, если один из сомножителей (или даже каждый из сомножителей) заменить числом того же класса.

В частности, мы можем заменить каждое число индексом его класса. Пользуясь обозначениями теории чисел, можно записать: если $A \equiv B \ (mod\ M)$, $C \equiv D \ (mod\ M)$, то $AC \equiv BD \ (mod\ M)$, т.е. сравнения по одному и тому же модулю можно перемножать. И это свойство тоже аналогично свойству обычного равенства.

Теперь не трудно решить данную в начале задачу.

Интересующий нас остаток не изменится, если мы все сомножители заменим индексами их классов, равными: 1, 2, 3, 4, 5 и 6 соответственно. Так как $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720\equiv20\equiv6 \pmod 7$, *то искомый остаток равен 6, т.е.* $7778\equiv1 \pmod 7$, $7779\equiv2 \pmod 7)\ldots7783\equiv6 \pmod 7 \Rightarrow$ $7778\cdot7779\cdot\ldots7783\equiv1\cdot2\cdot3\cdot\ldots6\equiv720\equiv20\equiv6 \pmod 7 \Rightarrow$ *искомый остаток 6.*

Все наши рассуждения применимы и в том случае, когда вместо модуля 7 используется любое другое натуральное число М, отличное от единицы. В этом случае, вместо таблицы из семи столбцов придётся рассматривать таблицу, содержащую М столбцов.

Экспресс-задание 2:

Составьте таблицу двузначных чисел, сравнимых по модулю 9. Ответ:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24	25	26
…	…	…	…	…	…	…	…	…
99								

Пример: Число 137 возвели в сотую степень. Какова последняя цифра десятичной записи результата?

Решение:

Прежде всего, заметим, что последняя цифра натурального числа есть остаток от деления этого числа на 10. Согласно выводу 4 нам достаточно найти остаток от деления на 10 числа 7^{100}, т.к. $137\equiv7 \pmod{10}\Rightarrow137^{100}\equiv7^{100}\pmod{10}$. Но в арифметике сравнений по модулю 10 всякое натуральное число и его последняя цифра находятся в одном классе, поэтому при возведении 7 в степень нам достаточно следить лишь за последней цифрой степени:

$7^1\equiv7,\ 7^2\equiv9,\ 7^3\equiv7^2\cdot7\equiv9\cdot7\equiv3,$

аналогично

$7^4=7^3\cdot7\equiv3\cdot7\equiv1,\ 7^5=7^4\cdot7\equiv1\cdot7\equiv7,$

и дальше вся последовательность 7, 9, 3, 1 будет периодически повторяться (все сравнения здесь даны по модулю 10). Отсюда видно, что на 4-м, 8-м, 12-м, 16-м и т.д., вообще на любом месте, кратном 4, в этой последовательности стоит 1.

Значит, и на сотом месте стоит 1, т.е. 137^{100} оканчивается цифрой 1.

Викторина

1. Какие числа называются равноостаточными или сравнимыми по модулю?

2. Что означает запись $A \equiv B(\mathrm{mod}\ n)$?

3. Как узнать, в каком классе находится некоторое число?

4. Изменится ли остаток от деления суммы на модуль, если одно из слагаемых или каждое слагаемое заменить другим числом, сравнимым с ним по этому модулю?

5. Будут ли сравнимы по модулю 21 числа:

а) 43 и 106; б) 84 и 128; в) 343 и 481; г) 1240 и 980; д) 129 и 192?

Проведенная экспериментальная работа позволила нам сделать вывод: целенаправленные систематические занятия математического кружка с учащимися 5-7 классов способствуют повышению интереса к математике.

Заключение.

1. Уточнены определение и цели работы математического кружка.

2. Раскрыты организационные вопросы создания и эффективного функционирования математического кружка (планирование работы кружка, формы работы на кружке, особенности проведения занятий).

3. Разработано и апробировано методическое обеспечение работы математического кружка «Ступени 5-6-7» (программа кружка и планы-конспекты двух занятий кружка для учащихся 7 класса – («Формулы включений и исключений». «Сравнимость чисел по модулю»).