

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического анализа

**«Электронный образовательный курс**

**«Элементы комбинаторики»**

**Автореферат магистерской работы**

студентки 3 курса 322 группы

направление *44.04.01 Педагогическое образование*

*механико-математического факультета*

Колесниченко Екатерины Юрьевны

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м. наук, доцент \_\_\_\_\_

Разумовская Е.В.

Заведующий кафедрой

И.о. зав. кафедрой

к.ф.-м. н., доцент \_\_\_\_\_

Разумовская Е.В.

Саратов 2021

**Введение.** В повседневной жизни нередко перед нами возникают проблемы, которые имеют не одно, а несколько различных вариантов решения. Чтобы сделать правильный выбор, очень важно не упустить ни один из них. Для этого используются различные методы: надо осуществить перебор всех возможных вариантов или хотя бы подсчитать их число. Такого рода задачи называют комбинаторными. С решением комбинаторных задач связаны многие задачи статистики, теории вероятностей, теории рисков. Для школьников эти задачи еще связаны с целым «пластом» олимпиадных приемов.

Магистерская работа является разработкой электронного образовательного курса (ЭОК) «Комбинаторика».

В настоящее время широкое распространение и большую популярность приобрела форма обучения, реализуемая дистанционным образом с использованием информационных технологий. Дистанционное обучение, подразумевает получение знаний без непосредственного присутствия преподавателя с использованием технологий, позволяющих это реализовать.

Развитие электронного образования в современном мире происходит стремительными темпами, что обусловлено условиями жизни и потребностями общества в обучении. Процесс обучения не должен быть привязан к месту и условиям жизни человека. Он должен быть при необходимости реализуем в любом месте и в любое время, вне зависимости от места проживания обучающегося. Электронные курсы позволяют этого добиться. Повышение доступности образования, реализуемое через внедрение новых образовательных технологий, можно назвать ключевой целью дистанционного и электронного обучения. Разработка электронных образовательных ресурсов, охватывающих разные разделы математики, является актуальной темой педагогических исследований.

Целью данной магистерской работы является разработка электронно-образовательного курса, призванного помочь учащимся среднего и старшего

звена общеобразовательной школы лучше разобраться в теме «Комбинаторика», повысить к данной теме интерес, мотивировать учащихся изучать ее более глубоко, сформировать у учащихся компетентность, предполагающую самостоятельно получать навыки, используя различные источники информации. В данном курсе рассмотрены задачи различного уровня сложности, показаны различные методы решения комбинаторных задач по принципу «от простого к сложному».

Для создания ЭОК необходимо было решить следующие задачи:

- изучить потребности и способности учащихся с учетом их индивидуальных особенностей

- осуществить анализ литературы по теме «Комбинаторика»

- выявить наиболее значимые теоретические сведения и осуществить подборку практических примеров, заданий для самостоятельного решения и тестовых заданий

- разработать теоретическое и практическое содержание ЭОК.

Для решения этих задач применялся анализ математической и учебно-методической литературы по теме курса, апробация теоретического материала в ходе практики, педагогический эксперимент, анализ экспериментальных данных.

Научная новизна работы состоит в разработке дидактического материала трех уровней сложности.

Выпускная работа состоит из введения, исторической справки, теоретической части, тестов трех уровней, заключения и списка литературы.

Во введении рассмотрены цели и задачи курса, показана научная новизна данной работы, приведены результаты тестирования учащихся.

В исторической справке была затронута история возникновения комбинаторики, ее поэтапное развитие и совершенствование, а также приведены примеры некоторых трудов, внесших значительный вклад в развитие этой темы.

Теоретическая часть содержит основной материал по данной теме. В нее вошли основные методы решения комбинаторных задач, такие как перечисление перестановок, дерево возможных вариантов, графы, таблицы, изучены правила суммы и умножения. Рассмотрены комбинации, удовлетворяющие некоторым общим условиям: перестановки, размещения и сочетания с повторениями и без. Также приведены примеры решения олимпиадных задач.

В дидактической части разработаны контрольные вопросы по теоретической части и тесты трех уровней сложности по практике. Тесты первого и второго уровней сложности содержат пять вариантов заданий по десять вопросов. Тесты третьего уровня содержат три варианта по восемь вопросов. Все тесты даны с решениями, вариантами ответов и ключами к ним.

В заключении работы сформулированы основные выводы.

Список использованных источников состоит из 20 наименований.

Структура электронного образовательного курса

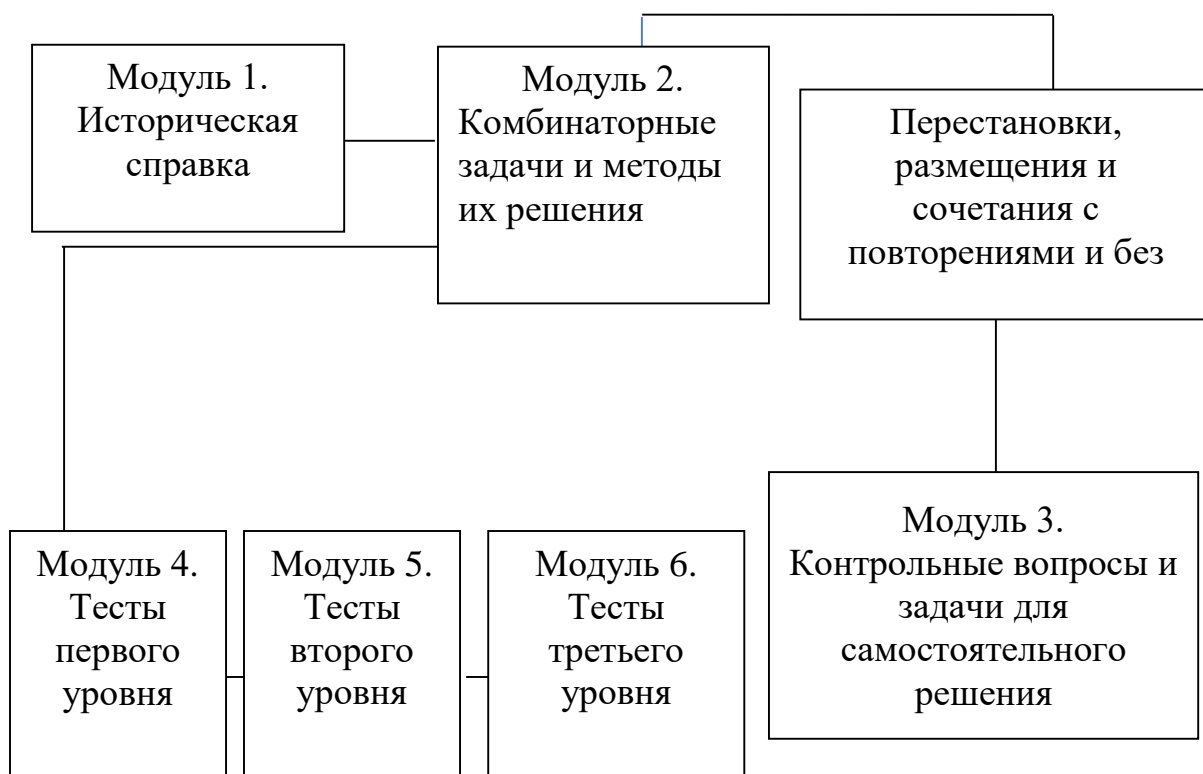


Рисунок 1

Рекомендуется следующий порядок прохождения курса. Сначала ознакомиться с исторической справкой для получения общей информации о развитии изучаемой темы. После чего приступить к изучению теоретической части, включающей разделы «комбинаторные задачи и методы их решения» и «перестановки, размещения и сочетания без повторений». В результате прохождения теории по данным разделам можно перейти к задачам для самостоятельного решения для тренировки перед выполнением контрольного теста первого уровня. Каждая задача в тесте данного уровня будет оцениваться в 1 балл. Модуль считается успешно пройденным, если учащийся набрал от 9 до 10 баллов, за такой результат выставляется оценка «5». Если набирается от 6 до 8 баллов, то выставляется оценка «4». При наборе количества баллов от 3 до 5, обучающийся получает оценку «3». Если полученный результат будет составлять 0-2 балла, то тема считается неосвоенной и имеет смысл вернуться к изучению теоретического материала и более детальному разбору примеров по заданным разделам.

После получения удовлетворительных результатов по первым разделам, можно продолжить изучением модуля «перестановки, размещения и сочетания с повторениями». После изучения данного блока также можно перейти к тренировочным задачам, после чего приступить к тестам второго уровня. В этих тестах первые семь заданий оцениваются в 1 балл, последние три по 2 балла. Итого максимально можно получить 13 баллов. После прохождения данного контрольного материала рекомендуется следующая шкала выставления оценок: 11-13 баллов – оценка «5», 7-10 баллов – оценка «4», 4-6 баллов – оценка «3», 0-3 балла – оценка «2». При получении неудовлетворительного результата необходимо снова обратиться к изучению теоретического материала.

При более высоком интересе к данной теме можно перейти к изучению раздела «олимпиадные задачи». В этом блоке рассмотрены примеры решения олимпиадных задач различных лет. После окончания изучения данного

материала рекомендовано пройти контрольные тесты по теоретической части. Материал считается усвоенным, если набрано более 50% правильных ответов.

В завершение изучения данного курса даются тесты третьего уровня, состоящие из 8 вопросов, каждый из которых оценивается в два балла. Оценку «5» учащийся получает за 14-16 набранных баллов. За 10-13 баллов рекомендована оценка «4», 5-9 баллов – оценка «3». При получении 4 баллов и менее необходимо вернуться к разделу «олимпиадные задачи» для повторного изучения.

На освоение данного электронного образовательного курса в среднем предполагается затратить около недели. Но необходимо учитывать уровень знаний учащихся, и в каком классе предлагается прохождение данного курса.

Созданный ЭОК был апробирован в МАОУ «ФТЛ №1» г. Саратов.

По результатам тестирования были выявлены недочеты теоретической и тестовой части ЭОК и проведена соответствующая корректировка. Также были подведены итоги тестирования и получены следующие результаты:

### **Основное содержание работы. Комбинаторные задачи и методы их решения**

Слово «комбинаторика» произошло от латинского слова *combinare* - «соединять, сочетать».

Задачи, решая которые приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число комбинаций, называются комбинаторными.

Комбинаторика - это раздел математики, в котором исследуются и решаются задачи выбора элементов из исходного множества и расположения их в некоторой комбинации, составляемой по заданным правилам [4].

#### **Составление комбинаций. Перебор вариантов.**

Перечисление вариантов (полный перебор) осуществляется с помощью таблиц, графов (деревьев), либо заданием алгоритма, обеспечивающего получение всех возможных вариантов. Табличный и графический методы

перебора, а также алгоритмы «ручного» перебора используются только при малых значениях  $m$  и  $n$ . Машинные алгоритмы перебора вариантов по мере развития вычислительной техники находят все более широкое применение. До настоящего времени они являются единственным средством решения некоторых комбинаторных задач.

### **Правила сложения и умножения.**

Одними из важнейших правил комбинаторики являются правило суммы и правило произведения.

#### **Правило суммы.**

Пусть объект  $A$  выбирается  $m$  способами, а объект  $B$  выбирается  $n$  способами, тогда выбрать «либо  $A$ , либо  $B$ » можно  $m+n$  способами.

Закон сложения используется тогда, когда нужно выбрать только 1 элемент.

Чтобы использовать закон сложения:

1. нужно понять, каковы группы, из которых нужно выбрать 1 элемент;
2. нужно выяснить количество элементов в каждой группе;
3. нужно убедиться, что в различных группах, из которых выбирают элемент, нет одинаковых элементов.

Пример:

Вика должна выбрать только один десерт из 8 видов коктейля, 5 видов мороженого. Сколькими способами она может выбрать десерт?

Решение

Используется закон сложения, т. к. Вика должна выбрать или коктейль, или мороженое.

$$8+5=13.$$

Ответ: Вика может выбрать десерт 13 способами.

#### **Правило умножения.**

Пусть объект  $A$  выбирается  $m$  способами, а объект  $B$  выбирается  $n$  способами, тогда выбрать пару  $A$  и  $B$  можно  $m \cdot n$  способами.

Используя правило произведения можно подсчитать количество способов выбора комбинаций из большего числа элементов.

Пусть требуется выполнить последовательно  $k$  действий. Если первое действие можно выполнить  $n_1$  способами, второе действие  $n_2$  способами, третье –  $n_3$  способами и так до  $k$ -го действия, которое можно выполнить  $n_k$  способами, то все  $k$  действий вместе могут быть выполнены:  $N=n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$  способами.

Среди комбинаций попадаются те, которые должны удовлетворять достаточно общим условиям. В комбинаторике среди таких выделяют комбинации, называемые перестановкой, размещением и сочетанием. Сначала остановимся подробнее на комбинациях без повторений, то есть составленных из элементов без повторений.

**Перестановки** - это комбинации, составленные из всех  $n$  элементов данного множества и отличающиеся только порядком их расположения.

Название тут говорит само за себя. Чтобы получить всевозможные перестановки некой совокупности объектов, нужно просто по очереди выставлять их в ряд в любом возможном порядке. Разные порядки предметов в ряду и будут перестановками. Число перестановок вычисляется по следующей формуле:  $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

**Размещения** – комбинации из  $m$  элементов множества, содержащего  $n$  различных элементов, отличающихся либо составом элементов, либо их порядком.

Итоговое выражение для числа размещений:

$$A_n^m = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - m + 1)$$

С факториалами эта формула записывается ещё лаконичнее:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n - m)!}$$

Эта величина называется убывающим факториалом из  $n$  по  $m$ .



**Сочетания** – неупорядоченные наборы из  $m$  элементов множества, содержащего  $n$  различных элементов (то есть наборы, отличающиеся только составом элементов).

Для получения числа сочетаний необходимо поделить число размещений на число перестановок:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

### **Перестановки с повторениями**

**Определение** Последовательность длины  $n$ , составленная из  $m$  разных символов, первый из которых повторяется  $k_1$  раз, второй -  $k_2$  раз, ...,  $m$ -й -  $k_m$  раз (где  $n=k_1+k_2+\dots+k_m$ ), называется перестановкой с повторениями из  $n$  элементов.

Число различных перестановок с повторениями из  $m$  различных элементов  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , в которых элементы  $a_1, a_2, \dots, a_m$  повторяются  $k_1, k_2, \dots, k_m$  раз и  $n$  – общее количество элементов,  $n=k_1+k_2+\dots+k_m$ , равно

$$\bar{P}_{k_1, k_2, \dots, k_m}^n = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_m)!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

### **Размещения с повторениями**

**Определение** Размещение с повторениями – это размещение элементов в предположении, что каждый элемент может участвовать в размещении несколько раз.

Число размещений с повторениями из  $n$  элементов по  $m$  выражается формулой  $\bar{A}_n^m = n^m$

### **Сочетания с повторениями**

**Определение** Сочетанием с повторениями называются наборы, в которых каждый элемент может участвовать несколько раз.

Число сочетаний с повторениями из  $n$  элементов по  $m$  выражается формулой  $\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$

### **Примеры задач для самостоятельного решения:**

1. В цветочный магазин завезли пять сортов роз, четыре сорта хризантем, герберы и два сорта лилий. Сколькими способами можно составить букет из этих цветов (каждый цветок может быть только одного сорта)?

2. К кухонному гарнитуру можно подобрать семь видов обоев, четыре вида плитки и три цвета пластика. Сколькими способами можно сделать ремонт на кухне: а) используя один из материалов; б) сочетая обои и плитку; в) сочетая плитку и пластик?

**Заключение.** Данная работа представляет собой электронный образовательный курс, в котором была рассмотрена тема «Комбинаторика». Образовательный процесс при дистанционном обучении базируется на самостоятельной работе детей. Многие учащиеся предпочитают электронную форму обучения в связи с тем, что они могут учиться в любое удобное для них время, в любом удобном месте, выбирать интересующие их курсы по различным направлениям и согласовывать контакт с преподавателем в процессе обучения.

Электронный образовательный курс «Комбинаторика» был апробирован в МАОУ «Физико-технический лицей № 1» города Саратова, в результате чего были реализованы следующие задачи: – изучен и проанализирован теоретический материал по данной теме; – определены методические особенности данной темы, – разработана тестовая система, дифференцированная по уровню сложности; – сокращено время, затрачиваемое на обработку результатов контроля, – повышена объективность результатов контроля.

В результате прохождения данного ЭОК учащиеся ознакомились с теорией по теме «Комбинаторика», подкрепленной примерами. выполнения тестовых заданий второго уровня наибольшие затруднения вызвали последние вопросы. Проведенные уроки показали, что дети, повторяя пройденный материал, гораздо лучше усвоили его, чем при первичном изучении. После прохождения перестановок, размещений и сочетаний с

повторениями детям по-прежнему сложнее всего было отличить друг от друга сочетания и размещения, а также не всегда с первого раза удавалось определить, какое правило нужно применить в конкретной задаче: суммы или произведения, при комбинированном применении формул для перестановок, сочетаний и размещений. При решении комбинаторных уравнений основные ошибки остались теми же. Учащиеся регулярно забывают про область допустимых значений, а если накладывают ограничения, то, зачастую, учитывают не все условия, в результате чего выборка корней не производится совсем или производится неправильно. Пройденный материал был усвоен 97,6% учащихся. На все 10 вопросов верно ответили 20,1% учащихся. В ходе проведения уроков теоретический материал был усвоен в достаточной степени. Желательно увеличение объема практических заданий различных типов и различного уровня сложности. При решении тестов второго уровня порог не перешли два человека из 85.

Были получены профессиональные умения и опыт профессиональной деятельности посредством проведения уроков, подготовки планов уроков и тестовых материалов.

Данный ЭОК может использоваться как в общеобразовательных учебных заведениях, так и в школах с углубленным изучением математики и в средних профессиональных учебных заведениях. Теоретический материал систематизирован и расширен по сравнению с материалом школьных учебников. Решение задач по комбинаторике от простых к сложным позволяет справляться с практико-ориентированными стохастическими задачами. Данная тема содержит как применение стандартных рассуждений, так и творческий подход, и сулит немало открытий при ее изучении. Разработанный дидактический материал охватывает оба эти аспекта

#### **Список используемых источников:**

1. <https://studopedia.org/8-27327.html>

2. <https://infourok.ru/zanyatie-po-matematike-na-temu-binom-nyutona-kurs-1413463.html>
3. <https://matica.org.ua/metodichki-i-knigi-po-matematike/matematika-3-chast-institut-mirovoi-ekonomiki-i-informatizacii/15-model-dnk>
4. Сачков, В. Н. Комбинаторный анализ / В. Н. Сачков. — Москва: издательство Советская Энциклопедия, 1979. — Т. 2. — 1104 с.
5. Буркатовская, Ю. Б. Теория графов / Ю.Б. Буркатовская. — Томск: издательство Томского политехнического университета, 2014. — Т. 1. — 200 с.
6. <https://www.yaklass.ru/p/algebra/11-klass/nachalnye-svedeniia-kombinatoriki-9340/pravilo-summy-9342/re-e895b44a-cf83-4e02-9293-1fbf0e0496f0>
7. Окулов, С. М. Дискретная математика. Теория и практика решения задач по информатике: учебное пособие/ С.М. Окулов. — Москва: издательство БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. — 422 с.
8. <http://math.siomax.ru/Combinatorics.html>
9. Богословская, Н.М., Харитонов, И. Ю. Решение задач по комбинаторике: Методические указания для студентов всех форм обучения спец. НГТУ/ Н.М. Богословская, И. Ю. Харитонов. - Н. Новгород: издательство НГТУ, 2006. – 24с.
10. Виленкин, Н. Я. Индукция. Комбинаторика. Пособие для учителей/Н.Я. Виленкин. - Москва: издательство «Просвещение», 1976. – 48с.
11. <https://pdnr.ru/a8782.html>
12. Захарова, Т.В., Панфёров, С.В. Задачи начального курса теории вероятностей: учеб. пособие / Т.В. Захарова, С.В. Панфёров. – Москва: издательство КУРС, 2018. – 64с.
13. Виноградов, И.М. Комбинаторный анализ/ И. М. Виноградов. — Москва: издательство «Просвещение» 1977. — Т. 2. — С. 974.