МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

«Электронный образовательный курс «Аналитические методы решения геометрических задач»

Автореферат магистерской работы

студентки 3 курса 322 группы

направление *44.04.01 Педагогическое образование*

механико-математического факультета

Бойковой Марианны Сергеевны

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м. наук, доцент ________________ Тимофеев В.Г.

Заведующий кафедрой

И.о. зав. кафедрой

к.ф.-м. н., доцент ________________ Разумовская Е.В.

Саратов 2021

Введение. Аналитическая геометрия — раздел геометрии, в котором геометрические фигуры и их свойства исследуются средствами алгебры. В основе этого метода лежит так называемый метод координат, впервые примененный Декартом в 1637 году. Аналитическая геометрия занимает важное место в процессе изучения математики и развития личности в целом. Аналитическими методами решаются достаточно многие задачи планиметрии и стереометрии. Процесс решения таких задач включает в себя многие знания и умения, которые приобретаются при изучении и применении теорем на плоскости и в пространстве. Умения и навыки решать геометрические задачи являются очень важными, их развитие требует значительных усилий, как со стороны ученика, так и со стороны учителя. Магистерская работа представляет собой электронно-образовательный курс " Аналитические методы решения геометрических задач". Данный образовательный курс предназначен для обучающихся 10-11 классов. Геометрические задачи рассмотрены и проанализированы на конкретных примерах. Электронно-образовательный курс содержит задания различного уровня сложности и, следовательно, больше подходит для классов с профильным уровнем подготовки. Цель магистерской работы - разработка электронного образовательного курса (ЭОК) " Аналитические методы решения геометрических задач " для учеников 10-11 классов, а также для учителей.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи: 1. Изучить и провести анализ литературы по выбранной теме. 2. Разработать теоретическое и практическое содержание ЭОК «Аналитические методы решения геометрических задач "

Для того, чтобы решить поставленные задачи, необходимо применить следующие методы: сбор и анализ математической и учебно-методической литературы по данной теме, наблюдение за образовательным процессом, педагогический эксперимент, систематизация и анализ экспериментальных данных.

Электронный образовательный курс " Аналитические методы решения геометрических задач " был несколько раз апробирован в МАОУ "Лицей математики и информатики" города Саратова. После проведения тестирования по теме " Аналитические методы решения геометрических задач " среди 9-11 классов была проведена корректировка и доработка тестов базового, среднего и повышенного уровня сложности.

Диагностируемые цели изучения электронного образовательного курса «Аналитические методы решения геометрических задач»:

1. Приобретение учебной информации по заданной теме.
2. Контроль за усвоением теоретических знаний посредством ответов на контрольные вопросы.
3. Применение приобретённых знаний и умений при решении аналитическими методами геометрических задач различного уровня сложности.
4. Формирование коммуникативных навыков посредствам участия в групповой работе.
5. Формирование самоконтроля познавательных действий.

Средневзвешенное значение показывает, что 43,3 % учащихся успешно прошли тестирование. После проведение тестирования была проведена соответствующая корректировка курса для более оптимального изучения.

При апробации пришли к выводу: разработанный курс заданий по теме: «Аналитические методы решения геометрических задач», предназначенный для уроков математики, а также элективных курсов по математике, послужит хорошей основой для усвоения данной темы на более глубоком уровне.

Научная новизна магистерской работы состоит в разработке дидактического материала трех уровней сложности.

Во введении обоснована актуальность исследования, кратко описана степень его разработанности, сформулированы его цель, задачи, методы исследования, практическая значимость, описана структура работы по главам.

В начале работы описана история становления знаний, применение алгебры к изучению свойств геометрических фигур, разросшееся в самостоятельную науку - аналитическую геометрию. Возникновение аналитической геометрии связано с открытием метода координат, являющегося основным методом. Геометрические фигуры, представляющие собой множества точек плоскости, оказываются состоящими из таких точек, координаты которых удовлетворяют некоторым алгебраическим соотношениям (уравнениям, неравенствам или их системам). В результате изучение свойств геометрических фигур заменяется изучением свойств алгебраических соотношений, описывающих эти фигуры.

В работе описаны методы решения геометрических задач аналитическими методами от простейших к сложным и разработаны тесты трех уровней сложности для ступенчатого контроля.

В заключении работы сформулированы основные выводы.

Список использованных источников состоит из 20 наименований.

Основные цели создания электронного образовательного курса:

- применение дистанционных образовательных программ и электронного обучения с целью повышение качества обучения при реализации образовательных программ;
- работа с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий для оптимизации деятельности педагогического состава;
- создание электронной информационно-образовательной среды, позволяющей осуществлять возможность дистанционного обучения.

Задачи создания электронного образовательного курса:

- соответствие единым требованиям к структуре, отдельным элементам

ЭОК и технологиям обучения по нему в системе дистанционного образования;
- обновления комплекса учебно-методических материалов по данной теме с целью совершенствование курса.

Диагностируемые цели обучения по теме «Аналитические методы решения геометрических задач» с помощью электронного курса:
Приобрести умения и навыки, которые формируются курсом, изучить учебную информацию и установить интеллектуальные умения при изучении планиметрии и стереометрии.

Цель считается достигнутой, если ученик:

а) работая в группе, оказывает помощь, рецензируют ответы товарищей по выполненным заданиям предыдущих уровней с обоснованием, организует взаимоконтроль; б) составляет контрольную работу в соответствии со своим уровнем освоения темы, в) формулирует цели своей учебной деятельности;
г) выбирает задачи и решает их; д) осуществляет самопроверку; ж) составляет контрольную работу для своего уровня усвоения; з) оценивает свою итоговую деятельность по данным объективным критериям; по собственным критериям, сравнивая их с объективными критериями;
и) делает выводы о дальнейших действиях, планирует коррекцию учебной познавательной деятельности.

В целом, успешное освоение данного электронного образовательного курса окажет помощь при сдаче Единого государственного экзамена (ЕГЭ).

Тесты базового уровня сложности, состоящие из 10 заданий, предложенные по вариантам, считаются успешно пройденными, если учащийся набрал от 8 до 10 баллов. Один балл ставится за верно полученный обоснованный ответ. Такое количество баллов можно приравнять к оценке «5». Если учащийся набрал от 6 до 7 баллов, это говорит о менее успешном освоении модуля и приравнивается к оценке «4», от 3 до 5 баллов – это оценка «3». Наконец, если набрано менее 3 баллов, значит, есть необходимость снова вернуться к изучению теоретической части.

Когда задания базового уровня сложности не будут вызывать затруднений, стоит переходить к тестам повышенного уровня сложности. Для многих учащихся материал этого раздела станет совершенно новой и очень полезной информацией, поэтому на изучение теории можно отвести несколько занятий. При успешном прохождении данных тестов, есть смысл закрепить теоретические знания и перейти к тестам высокого уровня сложности. Более одаренные учащиеся или желающие испытать свои умственные способности могут приступать к тренировочным задачам высокого уровня. В работе представлены 3 варианта тестов по три задания в каждом.

На освоение данного электронного образовательного курса в среднем можно затратить несколько недель. Но это касается учащихся 10-х-11-х классов, освоивших темы, необходимые для решения некоторых задач среднего и повышенного уровней сложности. Необходимо учитывать уровень знаний учащихся, и в каком классе предлагается прохождение данного курса.

Основное содержание работы . Аналитические методы решения геометрических задач.

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в котором простейшие линии и поверхности (прямые, плоскости, кривые и поверхности второго порядка) исследуются средствами алгебры. Основной метод аналитической геометрии - метод координат, в ней изучаются свойства геометрических фигур с помощью уравнений, которые исследуются алгебраическими методами.

Аналитическая геометрия — область математики, изучающая геометрические образы алгебраическими методами. Еще в XVII в. французским математиком Декартом был разработан метод координат, являющийся аппаратом аналитической геометрии.

В основе метода координат лежит понятие системы координат.

Прямоугольная система координат

Две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oу, имеющие общее начало O и одинаковую масштабную единицу, образуют прямоугольную систему координат на плоскости.

Ось Oх называется осью абсцисс, ось Oy— осью ординат, а обе оси вместе — осями координат. Точка O пересечения осей называется началом координат. Плоскость, в которой расположены оси Ox и Oy, называется координатной плоскостью и обозначается Oxy .Пусть M — произвольная точка плоскости. Опустим из нее перпендикуляры MA и MB на оси Ox и Oy. Прямоугольными координатами x и у точки M будем называть соответственно величины ОА и ОВ направленных отрезков ОА и ОВ, причем $x = OA$, у $=$ OB.

Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

Расстояние между двумя точками.

Теорема.Для любых двух точек плоскости $A(x1, y1)$ и $B(x2, y2)$ расстояние d между ними выражается формулой

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$$

Площадь треугольника.

Для любых точек $A(x1, y1)$ и $B(x2, y2), C(x3; y3)$, не лежащих на одной прямой, площадь S треугольника ABC выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}(|(x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)|)$$

Пример

Даны точки A (1; 1), B (6; 4), C (8; 2). Найти площадь треугольника ABC. По формуле:

$$S = \frac{1}{2}(|(6 - 1)(y2 - 1) - (8 - 1)(4 - 1)|) = \frac{1}{2}|-16| = 8$$

Деление отрезка в данном отношении. Пусть на плоскости дан произвольный отрезок AB и C —любая точка этого отрезка, отличная от точек A и B. Число λ, определяемое равенством

$$\lambda = \frac{AC}{CB}$$

называется отношением, в котором точка C делит отрезок AB.

Задача о делении отрезка в данном отношении состоит в том, чтобы по данному отношению и данным координатам точек A и B найти координаты точки C.

Теорема:

Если точка C (x; y) делит отрезок AB в отношении, то координаты этой точки определяются формулами

$$x = \frac{x1+\lambda x2}{1+\lambda}, \; y = \frac{y1+\lambda y2}{1+\lambda}$$

где $x1, y1$ — координаты точки А, а $x2, y2$ — координаты точки B.

Следствие.

Если $A(x1, y1)$ и $B(x2, y2)$ — две произвольные точки и точка M (x; y) — середина отрезка AB, $\lambda = 1$, по формулам получаем координаты середины отрезка AB

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}; \; y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

Таким образом, каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат.

Пример:

Даны точки M1(1;1) и M2(7;4). Найти точку M (x; y), которая в два раза ближе к M1, чем M2.

Решение:

Искомая точка М делит отрезок $M1M2$ в отношении λ=1\2. Применяя формулы, находим координаты этой точки: $\mathrm{x} = 3, \mathrm{y} = 2$.

Ответ: $\mathrm{x} = 3, \mathrm{y} = 2$.

Формула для вычисления расстояния от точки до прямой на плоскости

Если задано уравнение прямой Ax + By + C = 0, то расстояние от точки $M(Mx, My)$ до прямой можно найти, используя следующую формулу

- **Уравнение прямой с угловым коэффициентом**

$$y - yo = k\,(x - xo),$$

где k - угловой коэффициент прямой, то есть $k = tg\ a$, где a - величина угла, образованного прямой с осью $0x, M\ (xo, yo\ )$ - некоторая точка, принадлежащая прямой.

Уравнение принимает вид $y = kx + b,$ если $M\ (0, b)$ есть точка пересечения прямой с осью $0y$.

Уравнение прямой в отрезках

$x/a + y/b = 1,$

где a и b - величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки –

$\boldsymbol{A}(x1, y1)$ и $B(x2, y2\ )$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов.

Уравнение прямой, если известны ее угловой коэффициент k и величина b отрезка , который она отсекает на оси y (т. е. данная прямая не перпендикулярна оси Ox вида $y = kx + b$ называют уравнением прямой с угловым коэффициентом. Если к $= 0$, то прямая параллельна оси Ox, и ее уравнение имеет вид $y = b$.

Общее уравнение прямой

Теорема: В прямоугольной системе координат любая прямая задается уравнением первой степени $Ax + By + C = 0$,

и обратно, уравнение при произвольных коэффициентах A, B, C (A и B не равны нулю одновременно) определяет некоторую прямую в прямоугольной системе координат Oxy. Вектор n (A, B) ортогонален прямой, числа A и B одновременно не равны нулю.

порядка есть прямая.

Уравнение вида $Ax + By + C = 0$ называется общим уравнением прямой. Оно содержит уравнение любой прямой при соответствующим выборе коэффициентов A, B, C.

Линии второго порядка

Эллипс.

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек $F1$ и $F2$, есть величина постоянная, равная длине большой оси 2а.

Это геометрическое определение выражает **фокальное свойство эллипса**.

Точки $F1$ и $F2$ называются фокусами эллипса, расстояние между ними - фокусным расстоянием, середина отрезка — центром эллипса, число 2а- длиной большой оси эллипса (соответственно, число а— большой полуосью эллипса). Отрезки, соединяющие произвольную точку эллипса с его фокусами, называются фокальными радиусами. Отрезок, соединяющий две точки эллипса, называется хордой эллипса.

Определение: Если $a > b$, то параметр а называется большой полуосью, а параметр b - малой полуосями эллипса.

Определение: Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокусного расстояния к большой полуоси эллипса $\boxed{\varepsilon = c / a}$.

Гипербола

Гипербола определяется каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

причем a, b>0 , a и b называются полуосями гиперболы, точки $A_1(-a, 0), A1(-a, 0)$ − ее вершинами. Оси симметрии Ox и Oy - действительной и мнимой осями, а центр симметрии O− центром гиперболы. Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$ являются асимптотами гиперболы.

Парабола

Парабола с каноническим уравнением y^2=2px, p>0, имеет форму изображенную на рисунке.

Число p называется параметром параболы. Точка O− ее вершиной, а ось Ox - осью параболы.Директриса параболы — **такая прямая**, кратчайшее расстояние от

которой до любой точки, принадлежащей параболе, точно такое же, как

расстояние от этой точки до фокуса. Вершина параболы — точка

пересечения параболы с ее осью.

Любое уравнение линии второго порядка приводится к одному из следующих видов: a и b –положительные действительные числа.

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$ – каноническое уравнение эллипса;

2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы;

3) $y^2 = 2px \quad (p > 0)$ – каноническое уравнение параболы;

Аналитическая геометрия в пространстве

1)Нахождение угла между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью можно найти, используя угол между направляющим вектором $\underset{p}{\rightarrow}(a;b;c)$ прямой l и вектором $\underset{n}{\rightarrow}(A;B;C)$ нормали к плоскости α.

$$\sin \llcorner (l;\alpha) = \cos \llcorner (\vec{p};\vec{n}) = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Угол между прямой и плоскостью -это угол между прямой и ее проекцией на данную плоскость.

В качестве **угла между прямой и плоскостью** выбираем острый **угол**. Если прямая параллельна плоскости, значит угол между прямой и и плоскостью равен нулю.

Если прямая перпендикулярна плоскости, то ее проекцией на плоскость окажется точка. Очевидно, что в этом случае угол между прямой и плоскостью равен 90°.

2) Расстояние от точки до плоскости в координатах

Расстояние от точки до плоскости – это кратчайший из отрезков, соединяющий исходную точку с точкой плоскости.

Расстоянием от точки $\boldsymbol{Mo}$ до плоскости α, не проходящей через эту точку, является длина перпендикуляра $M0M1$, опущенного из данной точки M0 на плоскость α , а основание M1 этого перпендикуляра есть ближайшая к т. M0 точка плоскости α.

Расстояние $\boldsymbol{\rho}$ от точки $M0(xo;y0;z0)$, не лежащей на плоскости α до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле:

$$\rho = \frac{|Ax0 + By0 + Cz0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

3) Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми является расстояние от любой точки одной прямой до плоскости, проходящей через другую прямую, параллельно первой прямой, а также расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проведенными через две данные скрещивающиеся прямые.

Задача Найти расстояние от точки $K\ (1; -2;\ 3)$ до плоскости $3x + 2y - 6z +$ 5=0

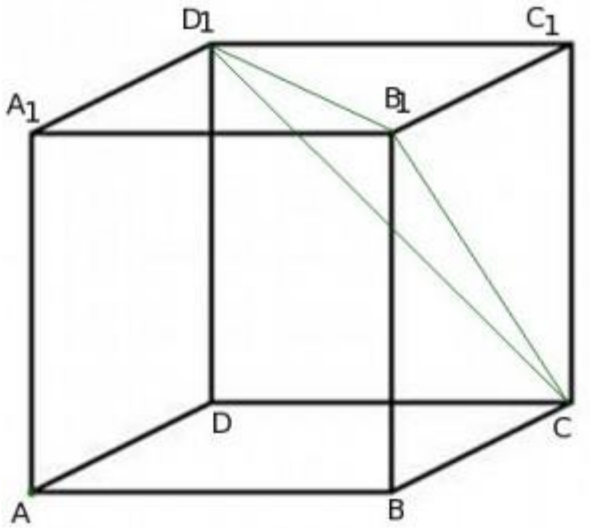
Решение: Находим координаты вектора нормали $\vec{n}$ плоскости $\vec{n}$(3;2;-6).Тогда

$d = \frac{|3*1+2*(-2)+(-6)*3+5)|}{\sqrt{3^2+2^2+(-6)^2}}$=2

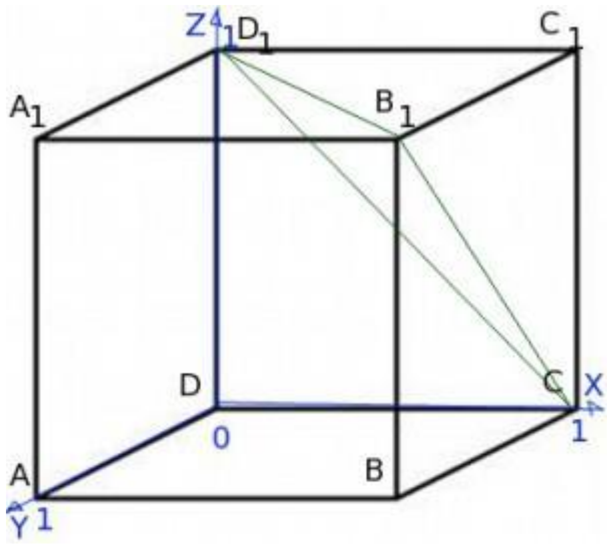
Ответ: 2

Задача В единичном кубе $ABCDA1B1C1D1$ найдите расстояние от точки A до плоскости $CB1D1$.

Решение:



Решим с помощью метода координат. Для этого представим куб в системе координат:



В данной задаче роль точки $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ играет точка $A\left(0,1,0\right)$. То есть $x_0=0$, $y_0=1$, $z_0=0$

Задача Найдите угол между прямой $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - t \\ z = -4t \end{cases}$ и плоскостью x+2y-z+1=0

Решение

Угол между прямой и плоскостью можно найти по формуле

$$\sin\angle(l;\alpha) = |\cos\angle(\vec{p};\vec{n})| = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\sin\angle(l;\alpha) = |\cos\angle(\vec{p};\vec{n})| = \frac{|-3*1-1*2-4*(-1)|}{\sqrt{1^2+2^2+1}\sqrt{9+1^2+4^2}} = \frac{1}{2\sqrt{39}}$$

Ответ: $\sin\angle(l;\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{39}}$

Заключение. В данном электронном образовательном курсе реализована тема «Аналитические методы решения геометрических задач».

В основу образовательного процесса при дистанционном обучении положена целенаправленная и контролируемая интенсивная самостоятельная работа обучаемого, который мог бы учиться в удобное для себя время, по индивидуальному расписанию, имея при себе комплект специальных средств обучения и согласованную возможность контакта с преподавателем в процессе обучения.

К достоинствам дистанционного обучения можно отнести:

Для обучаемого:

1) гибкость графика обучения;

2) возможность учиться по индивидуальному расписанию согласно собственным делам и занятости в секциях и иных образовательных центрах;

3) независимая от преподавателя методика оценки знаний, а в следствии более объективная;

4) возможность консультироваться с преподавателем в ходе обучения;

Так же такая форма обучения удобна и для преподавателей, потому что является дополнительной возможностью подачи материала обучающимся, то есть фактически появляется возможность при той же нагрузке обучать большее количество людей.

Неудивительно, что, при всех своих очевидных достоинствах, дистанционная форма обучения быстро завоевала огромную популярность в образовательном мире. Электронное обучение сегодня - это учебный процесс, в котором используются интерактивные электронные средства доставки информации: различные курсы, образовательные платформы; компакт-диски и конечно же Internet.

Помимо решения своей первоочередной задачи - обучения на расстоянии посредством Интернет – электронное обучение также является отличным дополнением очной формы обучения и может служить хорошим подспорьем для повышения качества и эффективности традиционного обучения.

В целом, основными достоинствами ЭОК являются:

1) Большая свобода доступа - учащийся имеет возможность доступа через Интернет к электронным курсам из любого места, где есть выход в

глобальную информационную сеть.
2) Компетентное, качественное образование - курсы создаются при участии целой команды специалистов, что делает ЭО качественным обучением.
3) Более низкие цены на доставку обучения - в электронном обучении процесс доставки образования включает в себя только обмен информацией через Интернет без затрат со стороны учащегося на покупку учебно-методической литературы.
4) Возможность разделения содержания электронного курса на модули - небольшие блоки информации позволяют сделать изучение предмета более гибким и упрощают поиск нужных материалов.
5) Гибкость обучения - продолжительность и последовательность изучения материалов слушатель выбирает сам, полностью адаптируя весь процесс обучения под свои возможности и потребности.
6) Возможность обучения на рабочем месте - учащиеся имеют возможность получать образование без отрыва от работы (при наличии таковой), а также дома, в пути с использованием мобильного Интернета.
7) Возможность развиваться в ногу со временем - пользователи электронных курсов: и преподаватели, и учащиеся развивают свои навыки и знания в соответствии с новейшими современными технологиями и стандартами. Электронные курсы также позволяют своевременно и оперативно обновлять учебные материалы.
8) Возможность определять критерии оценки знаний - в электронном обучении имеется возможность выставлять четкие критерии, по которым оцениваются знания, полученные учащимися в процессе обучения.

Электронный образовательный курс «Аналитические методы решения геометрических задач » был апробирован в МАОУ ЛМИ, в результате чего реализованы следующие задачи:

- изучен и проанализирован теоретический материал по данной теме;
-учтены способности учащихся;

- разработана система задач, дифференцированная по уровню сложности;
- расширен кругозор учащихся, ограниченный информацией учебников по программе.

Таким образом, практическое значение данной темы заключается в том, что этот электронный образовательный курс могут использовать учащиеся общеобразовательных школ, лицеев с углубленным изучением математики, студенты средних специальных учебных заведений, студенты педагогических вузов и преподаватели. Изучение темы «Аналитические методы решения геометрических задач» является немаловажной для школьного обучения и сдачи государственных экзаменов.