МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математики и методики её преподавания

Элементы векторной алгебры в подготовке будущих педагогов-математиков

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 3 курса 323 группы

направления 44.04.01 Педагогическое образование

механико-математического факультета

Красножен Екатерины Вадимовны

Научный руководитель

доцент, к.п.н., доцент ____________________ Т. А. Капитонова

подпись, дата

Зав. кафедрой

к.п.н., доцент ____________________ И. К. Кондаурова

подпись, дата

Саратов 2021

Введение. Первое, с чем встречаются студенты-математики педагогического вуза, приступая к изучению высшей геометрии, это векторная алгебра на примерах двумерных и трехмерных пространств. Такой выбор не случаен, а продиктован принципом преемственности: в школьном курсе уделяется внимание изучению векторов на плоскости и в пространстве. В вузе же эта тема углубляется и расширяется, за ней логически следуют большие тематические блоки «Прямая на плоскости», «Прямая и плоскость в пространстве», которые нельзя в должной мере освоить без повторения и более глубокого изучения векторной алгебры. Более того, в этом небольшом по времени изучения (менее семестра) разделе происходит предварительное знакомство студентов (пропедевтика) с фундаментальными понятиями высшей алгебры.

В науке имеется достаточно исследований, образующих теоретический базис работы. Методическими аспектами изучения векторной алгебры занимались все авторы учебных пособий по геометрии, в том числе: Л. С. Атанасян, В. Г. Болтянский, В. А. Волков, И. Г. Габович, Д. Глейзер, Э. Г. Готман, В. А. Гусев, П. Б. Гусятников, Ю. И. Ионин, В. М. Майоров, З. А. Скопец, М. И. Фридман и т. д.

Многочисленные статьи педагогов-математиков, посвященные различным методическим аспектам изучения векторной алгебры студентами, выходили и выходят в ведущих научно-популярных, научно-методических и методических журналах, в сборниках статей и материалах научных конференций: Т. П. Григорьева, Т. К. Гараев, В. И. Игошин, Г. А. Клековкин, В. М. Клопский, Т. М. Корикова, Е. В. Ковешников, В. Кучеров, С. А. Либер, С. Овчинников, Н. А. Прокопенко, О. В. Уваровская, А. В. Фарков и др.

Цель магистерской работы – разработать тесты раздела «Элементы векторной алгебры на плоскости и в пространстве» для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Педагогическое образование», профиль «Математическое образование».

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Провести анализ рабочей программы дисциплины «Геометрия» для бакалавров направлению подготовки «Педагогическое образование», профиль «Математическое образование».

2. Рассмотреть содержание разделов «Элементы векторной алгебры на плоскости» и «Элементы векторной алгебры в пространстве».

3. Спроектировать варианты тестов для осуществления различного вида контроля и провести опытно-экспериментальную проверку разработанных материалов.

Для решения поставленных задач применялись следующие методы исследования: анализ научной, учебно-методической литературы, теоретическое обобщение, педагогическое проектирование, педагогический эксперимент.

Практическая значимость результатов исследования заключается в том, что разработанный тестовый материал может быть использован при обучении бакалавров направления «Педагогическое образование» (профиль «Математическое образование»).

Структура работы: титульный лист, введение, два раздела («Элементы векторной алгебры в подготовке будущих педагогов-математиков: теоретические аспекты», «Элементы векторной алгебры в дисциплине «Геометрия»: практические аспекты»), заключение, список использованных источников.

Основное содержание работы. В первом разделе «Элементы векторной алгебры в подготовке будущих педагогов-математиков: теоретические аспекты» решались первые две задачи магистерской работы.

В ходе анализа содержания рабочей программы дисциплины «Геометрия» было выявлено, что программой не предусмотрено использование тестов для осуществления различного вида контроля. Возникла необходимость разнообразить существующие формы контроля и оценки знаний бакалавров, обучающихся по направлению подготовки «Педагогическое образование» (профиль «Математическое образование»), по разделам «Элементы векторной алгебры на плоскости» и «Элементы векторной алгебры в пространстве» курса «Геометрия», дополнив их тестами для осуществления диагностического (входного), текущего, итогового контроля и контроля остаточных знаний, что было сделано в разделе 2 магистерской работы.

Во втором пункте первого раздела рассмотрено содержание разделов «Элементы векторной алгебры на плоскости» и «Элементы векторной алгебры в пространстве» дисциплины «Геометрия» для бакалавров направления подготовки «Педагогическое образование» (профиль «Математическое образование»). Приводятся и разбираются наиболее сложные моменты раздела. Показывается связь со школьным курсом геометрии и с дисциплиной «Алгебра», изучаемой студентами уже в вузе, а также общая пропедевтическая роль раздела.

Раздел «Элементы векторной алгебры на плоскости и в пространстве» начинается с определения его фундаментального понятия – понятия вектора.

В вузовском курсе дисциплины «Геометрия» преобладает множественный подход. Вектор определяется как множество всех попарно эквиполентных направленных отрезков пространства (плоскости или трехмерного), как класс эквивалентности по отношению эквиполентности, потому что отношение эквиполентности рефлексивно, симметрично и транзитивно на множестве всех направленных отрезков.

Об отношении эквивалентности студенты узнают уже на своей самой первой лекции по геометрии, что весьма полезно, ведь бинарные отношения чуть позже, но гораздо продолжительнее, более строго и подробно изучаются в курсе алгебры.

Понятие коллинеарности двух векторов студентам знакомо со школы, а вот понятие компланарности трех векторов для них несколько ново.

В вузовском курсе векторной алгебры существенный упор делается на детализацию темы «Операции над векторами» (сложение, вычитание, умножение на число). Что касается умножения вектора на число, то здесь важным моментом является то, что студентов учат строить векторы типа $\pm\frac{m}{n}\vec{a}$ и $\pm\sqrt{n}\vec{a}$, где m, n – натуральные числа, $\vec{a}$ – данный вектор.

Впервые с понятиями линейной зависимости и независимости векторов учащиеся вуза знакомятся в геометрии, но свое логическое развитие данная тема получает в курсе алгебры. Опираясь на линейную независимость векторов, учащихся подводят к определению базиса пространства. Понятие базиса является одним из основополагающих понятий высшей геометрии и алгебры и в обеих дисциплинах встречается довольно продолжительное время.

Далее в курсе идут три блока: скалярное, векторное и смешанное произведения. Со скалярным произведением тесно связано понятие скалярной проекции одного вектора на направление другого. Векторное произведение – совершенно новый материал для студентов, изучается только в вузе. Однако для того чтобы говорить о векторном произведении, необходимо сначала ввести понятие правой и левой троек векторов и научить студентов четко различать их на чертеже. При изучении свойств векторного произведения студенты впервые сталкиваются с тем фактом, что известный им еще по школе переместительный (коммутативный) закон умножения, работая и для скалярного произведения, для векторного оказывается неверен. При изучении темы «Векторное произведение» студенты впервые знакомятся с понятием определителя, и, в частности, определителя второго порядка. При изучении темы «Смешанное произведение векторов» теорема о вычислении смешанного произведения в координатах не вызывает затруднений, если студенты хорошо усвоили векторное произведение. Здесь же они вновь сталкиваются с определителем, но уже третьего порядка.

Во втором разделе «Элементы векторной алгебры в подготовке будущих педагогов-математиков: практические аспекты» решалась третья задача магистерской работы.

Тестовый блок к разделам «Элементы векторной алгебры на плоскости» и «Элементы векторной алгебры в пространстве» включает следующие элементы: (1) инструкция по прохождению теста (к каждому тесту прилагается инструкция); (2) входной контроль (диагностическое тестирование); (3) раздел 1 «Векторы и линейные операции с ними»; (4) раздел 2 «Скалярное произведение векторов»; (5) раздел 3 «Векторное произведение векторов»; (6) раздел 4 «Смешанное произведение векторов»; (7) итоговое тестирование; (8) тест на проверку остаточных знаний.

Представим задания проведенного теста на проверку остаточных знаний раздела «Элементы векторной алгебры на плоскости» и «Элементы векторной алгебры в пространстве».

1. Из представителей векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ можно построить треугольник тогда и только тогда, когда …

1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$; 2) $\vec{a}+\vec{c}=\vec{0}$; 3) $\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$; 4) $\vec{a}\perp\vec{c}=\vec{0}$.

2. Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число (скаляр) α называется новый вектор, обозначаемый $\alpha\vec{a}$ и удовлетворяющий двум требованиям:

1) его длина (модуль): $\left|\alpha\vec{a}\right|=|\alpha|\cdot\left|\vec{a}\right|$;

2) его направление: $\alpha\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$, если $\alpha\geq 0$, $\alpha\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$, если $\alpha\leq 0$;

3) его направление: $\alpha\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$, если $\alpha>0$, $\alpha\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$, если $\alpha<0$;

4) его длина (модуль): $\left|\alpha\vec{a}\right|=\left|\vec{a}\right|$.

3. Продолжите предложение. Совокупность векторов $\vec{a_1}, \overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ называется линейно зависимой, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2,...,\alpha_n$, … / из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$

4. Базисом некоторой совокупности (пространства) V векторов называется такая упорядоченная система векторов $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}\}$ этой совокупности, которая удовлетворяет двум условиям:

1) система В линейно зависима;

2) система В линейно независима;

3) каждый вектор из V представим в виде линейной комбинации векторов из В;

4) каждый вектор из V представим в виде упорядоченной пары неколлинеарных векторов [16].

5. В треугольной пирамиде ABC известны векторы $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$. Выразить через них векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{SQ}$, где M – середина ребра BC, а Q – центр тяжести грани ABC (в соответствии с рисунком 9).

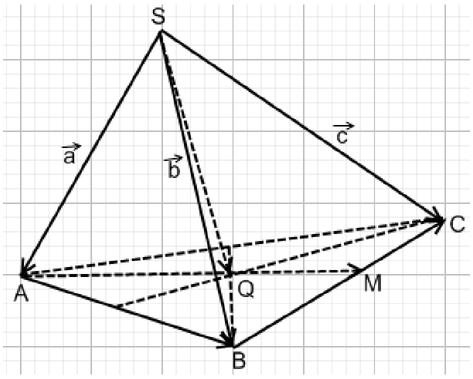

Рисунок 1 – Геометрическая модель задачи 5

1) $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{SQ} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$;

2) $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{SQ} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;

3) $\overrightarrow{AM} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{SQ} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$;

4) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{SQ} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

6. Зная разложения векторов $\vec{I}, \vec{m}, \vec{n}$ по трем некомпланарным векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, выяснить, будут ли векторы $\vec{I}, \vec{m}, \vec{n}$ компланарны. В случае утвердительного ответа указать линейную зависимость, их связывающую. В случае отрицательного ответа указать разложения векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ по векторам $\vec{I}, \vec{m}, \vec{n}$. $\vec{I} = \vec{c}$, $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

1) компланарны, $\vec{I}+\vec{m}+\vec{n}=\vec{0}$;

2) некомпланарны, $\vec{a}=\vec{I}-\vec{m},\ \vec{b}=-\vec{I}+2\vec{m}+\vec{n},\ \vec{c}=-\vec{I}+\vec{m}-\vec{n}$;

3) компланарны, $2\vec{I}+\vec{m}-\vec{n}=\vec{0}$;

4) некомпланарны, $\vec{a}=\vec{I}+\vec{m},\ \vec{b}=\vec{I}+2\vec{m}+\vec{n},\ \vec{c}=-\vec{I}+\vec{m}-\vec{n}$.

7. Найти координаты вектора $\vec{a}(11,-6,5)$ в базисе $\vec{e_1}(3,-2,1)$, $\vec{e_2}(-1,1,-2)$, $\vec{e_3}(2,1,-3)$, предварительно доказав, что векторы $\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3}$ образуют базис совокупности всех векторов пространства. (Координаты векторов даны в некотором первоначальном базисе).

1) $\vec{a}(2,-3,1)$; 2) $\vec{a}(1,-3,1)$; 3) $\vec{a}(2,-3,0)$; 4) $\vec{a}(2,-2,-1)$.

8. Доказать, что точки A, B, C лежат на одной прямой, если $4\vec{r_A}-7\vec{r_B}+3\vec{r_C}=\vec{0}$, где $\vec{r_A},\ \vec{r_B},\ \vec{r_C}$ – радиус-векторы точек A, B, C соответственно относительно общего начала. Заполните пропуски в доказательстве.

Доказательство задачи 8. Преобразуем левую часть этого равенства:

$4\vec{r_A}-4\vec{r_B}+3\vec{r_C}-3\vec{r_B}=\vec{0}$,

$4\ldots+3\ldots=\vec{0}$,

$4\vec{\ldots}+3\vec{\ldots}=\vec{0}$.

На последнем шаге воспользовались выражением вектора через радиус-векторы его конца и начала. Последнее равенство означает, что векторы $\vec{\ldots}$ и $\vec{\ldots}$ линейно зависимы и следовательно, коллинеарны: $\vec{\ldots}\parallel\vec{\ldots}$. Поскольку представители этих векторов имеют общую точку …, поэтому точки A, B, C лежат на одной прямой.

9. Продолжите предложение. Скалярным произведением двух векторов называется … / число равное произведению длин этих векторов и косинуса угла между ними

10. Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ равно нулю тогда и только тогда, когда …

1) $\vec{a}\perp\vec{b}$; 2) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; 3) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$; 4) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ несонаправлены.

11. Скалярное произведение положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами:

1) прямой; 2) развернутый; 3) тупой; 4) острый.

12. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \hat{\ } \vec{b}) = 150^0$:

1) $-7\sqrt{3}$; 2) $7\sqrt{2}$; 3) 12; 4) $10\sqrt{2}$.

13. Скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ называется …

1) длина вектора $\vec{a}$; 2) $\vec{0}$; 3) скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$; 4) $|\vec{a}|$.

14. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ и $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Вычислить: $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

1) 10; 2) $\vec{0}$; 3) 13; 4) 4.

15. Какой угол образуют векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что $\vec{p} + 3\vec{q} \perp 7\vec{p} - 5\vec{q}$ и $\vec{p} - 4\vec{q} \perp 7\vec{p} - 2\vec{q}$?

1) 90^0; 2) 30^0; 3) 60^0; 4) 5^0.

16. Даны векторы своими координатами в ортонормированном базисе $\vec{i}, \ \vec{j}, \ \vec{k}$: $\vec{a}(3,-1,5)$ и $\vec{b}(1,2,-3)$. Найти вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x} \perp \vec{k}$, $\vec{x} \cdot \vec{a} = 9$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -4$.

1) $\vec{x}(2,-3,0)$; 2) $\vec{x}(2,2,0)$; 3) $\vec{x}(2,-3,1)$; 4) $\vec{x}(0,1,1)$.

17. Векторным произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется новый вектор, обозначаемый $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, и удовлетворяющий следующим условиям:

1) его модуль $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$;

2) его модуль $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$;

3) его направление таково, что: а) $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \perp \vec{a}$, $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \perp \vec{b}$; б) тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ правая;

4) его направление таково, что: а) $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \perp \vec{a}$, $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \perp \vec{b}$; б) тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ левая.

18. Вычислите площадь параллелограмма ABCD, если: $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $(\vec{a}, \hat{} \ \vec{b}) = 45^0$.

1) 10; 2) 20; 3) 5; 4) 1.

19. Найдите площадь треугольника ABC, если: $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}, \hat{} \ \vec{b}) = 45^0$.

1) $50\sqrt{2}$; 2) $25\sqrt{2}$; 3) 20; 4) 10.

Опытно-экспериментальная работа по теме магистерской работы представляла собой частичную апробацию разработанного методического обеспечения обязательной дисциплины «Геометрия», которая проводилась со студентами 3 курса 361 и 362 группы (27 человек), обучающимися по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование (профиль Математическое образование).

По результатам проведенного теста на проверку остаточных знаний было установлено, что все студенты (за исключением двух студентов, не выполнявших тест) показали достаточный уровень математической подготовки по разделам «Элементы векторной алгебры на плоскости» и «Элементы векторной алгебры в пространстве».

При проведении итогового теста были выявлены задания, которые вызвали наибольшее затруднение при решении. К ним относятся задача на доказательство по теме «Радиус-вектор точки»; задача на применение свойств векторного произведения; теоретический вопрос о свойствах векторного произведения; теоретический вопрос по теме «Свойства смешанного произведения векторов»; задача по теме «Смешанное произведение векторов в координатах».

Заключение. В процессе теоретического и практического исследования в соответствии с целью и задачами магистерской работы сформулированы следующие выводы:

1. В ходе анализа содержания рабочей программы дисциплины «Геометрия» установлено, что программой дисциплины «Геометрия» не

предусмотрено использование тестов для осуществления различного вида контроля. В связи с этим возникла необходимость разнообразить существующие формы контроля и оценки знаний бакалавров, обучающихся по направлению подготовки «Педагогическое образование» (профиль «Математическое образование»), по разделам «Элементы векторной алгебры на плоскости» и «Элементы векторной алгебры в пространстве» курса «Геометрия», дополнив их тестами для осуществления диагностического (входного), текущего, итогового контроля и контроля остаточных знаний.

2. В работе описано содержание разделов «Элементы векторной алгебры на плоскости» и «Элементы векторной алгебры в пространстве» дисциплины «Геометрия» для бакалавров направления подготовки «Педагогическое образование» (профиль «Математическое образование»). Приводятся и разбираются наиболее сложные моменты раздела. Показывается связь со школьным курсом геометрии и с дисциплиной «Алгебра», изучаемой студентами уже в вузе, а также общая пропедевтическая роль раздела.

3. Спроектированы варианты тестов для осуществления различного вида контроля и проведена опытно-экспериментальная проверка разработанных материалов.

Тестовый блок к разделам «Элементы векторной алгебры на плоскости» и «Элементы векторной алгебры в пространстве» включает следующие элементы: (1) инструкция по прохождению теста (к каждому тесту прилагается инструкция); (2) входной контроль (диагностическое тестирование); (3) раздел 1 «Векторы и линейные операции с ними»; (4) раздел 2 «Скалярное произведение векторов»; (5) раздел 3 «Векторное произведение векторов»; (6) раздел 4 «Смешанное произведение векторов»; (7) итоговое тестирование; (8) тесты на проверку остаточных знаний.

Опытно-экспериментальная проверка разработанных материалов проходила на базе механико-математического факультета ФГБОУ ВО «СНИГУ им. Н. Г. Чернышевского». Опытно-экспериментальная проверка показала, что использование тестов различного вида контроля параллельно с традиционными видами учебной работы способствует оптимизации учебного процесса за счет включения в образовательную траекторию каждого студента индивидуальной самостоятельной работы.

Разработанные тесты разделов «Элементы векторной алгебры на плоскости» и «Элементы векторной алгебры в пространстве» могут быть использованы в целях повышения эффективности образовательного процесса бакалавров направления «Педагогическое образование» (профиль «Математическое образование»).

По результатам исследования опубликована статья «Разработка тестов раздела «Элементы векторной алгебры» дисциплины «Геометрия»».

Список использованных источников состоит из 38 наименований.