МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ СО ВТОРЫМ ЗАКОНОМ НЬЮТОНА

наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 - Прикладная математика и информатика

код и наименование направления

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Кусакиной Ангелиной Дмитриевной

фамилия. имя, отчество

Научный руководитель

профессор, д.ф-м.н., профессор ____________ Г.В.Хромова

должность, уч. степень, уч.эвание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

д.ф-м.н., профессор ____________ В.А. Юрко

должность, уч. степень, уч.эвание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2022

Введение. Обратные и некорректные задачи играют важную роль во многих областях естествознания — в физике, геофизике, медицине, астрономии, в частности в таких областях знаний, где применимы математические методы. Это связано с появлением мощных ЭВМ, быстро растущее использование которых требует развития вычислительных алгоритмов для решения широких классов задач.

Прямая задача относится к теории дифференциальных уравнений, а обратная — к теории некорректно поставленных задач.

Цель настоящей дипломной работы заключается в решении прямой и обратной задачи, связанных со вторым законом Ньютона и оценки их на графиках.

Работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка использованных источников и приложения.

В первом разделе рассмотрены определения некорректных задач по Адамару и по Тихонову, приведены примеры некорректных математических задач и рассказано про устойчивость в различных пространствах .

Во втором разделе рассмотрен решение прямой задачи и приведены графики, сделанные с помощью кода Приложения А.

В третьем разделе рассмотрено решение обратной задачи и привиден график, сделанный с помощью кода Приложения Б. Для реализации данной задачи был использован метод средних прямоугольников.

В приложениях приводится код программы и результаты численного эксперемента, согласно второму и третьему разделу.

Основное содержание работы.

Определение корректных и некорректных задач. При исследовании решения задачи математической физики центральное место занимают вопросы существования решения, единственность решения, зависимость от малых изменений исходных данных. Если малые изменения исходных данных приводят к малым изменениям решения, то будем говорить, что решение устойчиво.

Определение. Задача называется корректно поставленной, если ее решение существует, единственно и устойчиво. Некорректно поставленная задача — задача, необладающая каким либо из свойств корректно поставленной задачи.

Формулировка задач, связанных со вторым законом Ньютона. Рассмотрим второй закон Ньютона

$$ma = F$$

Прямая задача сводится к решению дифференциального уравнения вида

$$mS''(t) = F(t),$$

В нашем случае $m = 1$ — масса тела. А $S(t)$ и $F(t)$ — это функции пути и величины силы, действующей на тело. Следовательно,

$$S''(t) = F(t). \tag{1}$$

Обратная задача формулируется следующим образом:

Пусть $S(t) \in C[a, b]$ и задана $S_\delta(t)$ такая, что $\|S_\delta - S\|_{L_2} \leq \delta$. И дан оператор

$$T_\alpha S = a(\alpha)\alpha^{-5} \int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha} (\alpha^2 - (\xi - t)^2)^2 S(\xi) d\xi$$

Требуется восстановить вторую производную функций при помощи сглаживающего оператора $T_\alpha S$ с нормированным ядром.

Решение прямой задачи

Постановка задачи: Рассмотрим задачу из примера 16. Требуется найти $S(t)$ по известной $F(t)$.

Для того чтобы задача была корректно поставлена, нужно чтобы решения были единственными(а также устойчивыми), добавим начальные условия:

$$\begin{cases} S(0) = 0 \\ S'(0) = 0 \end{cases}$$

Воспользуемся формулой Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_0^t F(\eta)\,d\eta = S'(t) - S'(0) \quad \overset{S'(0)=0}{\Longrightarrow}$$

$$S'(t) = \int\limits_0^t F(\eta)\,d\eta,$$

Проделаем те же действия и получим

$$S(t) - S(0) = \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\eta F(\xi)\,d\xi \right) d\eta \quad \overset{S(0)=0}{\Longrightarrow}$$

$$S(t) = \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\eta F(\xi)\,d\xi \right) d\eta$$

Применяем формулу интегрирования по частям, где $u = F(\xi)$, $dv = d\xi$, получим следующие решения

$$S(t) = \int\limits_0^t (t-\eta) F(\eta)\,d\eta$$

Теперь считаем, что $F(t)$ задана приближенно:

$$\|F_\delta(t) - F(t)\|_C \le \delta$$

Подставим $F_\delta(t)$ в его уравнение решений, получим

$$S_\delta(t) = \int\limits_0^t (t-\eta) F_\delta(\eta)\,d\eta$$

Покажем, что

$$\|S_\delta(t) - S(t)\|_l \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0$$

Это можно сделать аналитески, подставив $F(t) = 2$:

$$S(t) = 2\int\limits_0^t (t-\eta)\,d\eta = 2\left(t\eta - \frac{\eta^2}{2}\right)\Big|_0^t = t^2$$

Используя Приложение А, получим следующие графики.

Решение обратной задачи.

Метод восстановления $S''(t)$.

1. Пусть $\|S_\delta - S\|_{L_2} \le \delta$ и дан оператор

$$T_\alpha S = a(\alpha)\int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha} (\alpha^2 - (\xi - t)^2)^2 S(\xi) d\xi$$

Находим $a(\alpha)$ из условия $T_\alpha 1 \equiv 1$:

$$T_\alpha 1 = a(\alpha)\int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha} (\alpha^2 - (\xi - t)^2)^2 d\xi = 1;$$

$$a(\alpha)\int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha} (\alpha^4 - 2\alpha^2(\xi - t)^2 + (\xi - t)^4) d\xi = 1;$$

$$a(\alpha)\left(\alpha^4\xi - \frac{2}{3}\alpha^2(\xi - t)^3 + \frac{(\xi - t)^5}{5}\right)\Big|_{t-\alpha}^{t+\alpha} = 1;$$

Тогда

$$a(\alpha) = \frac{15}{16}\alpha^{-5}$$

Получим следующий интегральный оператор

$$T_\alpha S = \frac{15}{16}\alpha^{-5}\int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha} (\alpha^2 - (\xi - t)^2)^2 S(\xi) d\xi$$

Теорема 1. Для непрерывной на $[a, b]$ функции $S(t)$ выполняется

$$\|T_\alpha S - S\|_{C_\varepsilon[a,b]} \to 0 \qquad \text{при} \quad \alpha \to 0$$

2. Строим операторы для приближения $S'(t)$ — скорости движения тела и $S''(t)$ —ускорения тела по второму закону Ньютона.

а) Рассмотрим оператор

$$T'_\alpha S = \frac{15}{16}\alpha^{-5}\int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha}\frac{d}{dt}(\alpha^2-(\xi-t)^2)^2S(\xi)d\xi,$$

$$T'_\alpha S = \frac{15}{16}\alpha^{-5}\int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha}(4\alpha^2(\xi-t)-4(\xi-t)^3)S(\xi)d\xi,$$

$$T'_\alpha S = \frac{15}{4}\alpha^{-5}\int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha}(\alpha^2-(\xi-t)^2)(\xi-t)S(\xi)d\xi,$$

Теперь найдем T''_α:

$$T''_\alpha S = \frac{15}{4}\alpha^{-5}\int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha}\frac{d}{dt}(\alpha^2-(\xi-t)^2)(\xi-t)S(\xi)d\xi,$$

$$T''_\alpha S = \frac{15}{4}\alpha^{-5}\int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha}(3(\xi-t)^2-\alpha^2)S(\xi)d\xi. \qquad (2)$$

Теорема 2. Справедливо равенство:

$$T''_\alpha S = T_\alpha S''$$

Доказательство. Запишем $T_\alpha S$ как

$$T_\alpha S = \frac{15}{16}\alpha^{-5}\int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha}K_\alpha(t,\xi)S(\xi)d\xi$$

Тогда

$$T''_\alpha S = \frac{15}{16}\alpha^{-5}\int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha}\frac{d^2}{dt^2}K_\alpha(t,\xi)S(\xi)d\xi = \frac{15}{16}\alpha^{-5}\int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha}\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}K_\alpha(t,\xi)S(\xi)d\xi\right] =$$

$$= \frac{15}{16}\alpha^{-5}\int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha}-\frac{d}{d\xi}\left[-\frac{d}{d\xi}K_\alpha(t,\xi)\right]S(\xi)d\xi$$

Теперь можно брать интеграл по частям — 2 раза и тогда придем к утверждению теоремы. $\square$

Следствие 1. Для $S''(t) \in C[a,b]$ имеет место сходимость

$$\|T''_\alpha S - S''\|_{C_\varepsilon} \to 0 \qquad \text{при} \quad \alpha \to 0$$

Теперь посчитаем норму

$$\|T''_\alpha\|_{L_2} = \frac{15}{4}\alpha^{-5}\max_{a\le t\le b}\sqrt{\int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha}(3(\xi-t)^2-\alpha^2)^2 d\xi} = 3\sqrt{\frac{5}{2}}\alpha^{-5/2}$$

Получаем следующую оценку.

Следствие 2. Имеет место оценка:

$$\|T''_\alpha(S_\delta - S)\| \le 3\sqrt{\frac{5}{2}}\alpha^{-5/2}\delta$$

Теорема 3. Для того, чтобы $\|T''_\alpha S_\delta - S''\|_C \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$, достаточно выбрать такое согласование, чтобы $\alpha = \alpha(\delta)$:

1. $\alpha(\delta) \to 0$;
2. $\delta(\alpha(\delta))^{-\frac{5}{2}} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Численная реализация.

Рассмотрим обратную задачу из примера 16. При численной реализации моделью задачи будет $S(t) = t^2$ непрерывная, интегрируемая на отрезке $t \in$

$[0,1]$ и помимо подсчета формулы 2, нужно вычислить

$$T''_\alpha S_\delta = \frac{15}{4}\alpha^{-5}\int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha}(3(\xi-t)^2-\alpha^2)S_\delta(\xi)d\xi \tag{3}$$

Смоделируем фукнцию S_δ, которая будет удовлетворять следующему неравенству:

$$\|S_\delta - S\|_{L_2} \le \delta$$

и она будет строится с помощью "всплесков" следующим образом

$$\begin{aligned} S_\delta(t_i) &= S(t_i) + A_i N_m \delta \qquad && i \in [0,2,4\ldots] \\ S_\delta(t_i) &= S(t_i) - A_i N_m \delta \qquad && i \in [1,3,5\ldots] \end{aligned}$$

Разобьем отрезок $[0,1]$ на $n = 10$ частей. Шаг будет равен $h = \frac{1}{10}$, т.е. $t_i = ih$. Получим

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1, \qquad \{t_i\}_{i=0}^{n}\text{— точки разбиений}$$

Следовательно,

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1

После разбиения получим

$$T''_\alpha S = \frac{15}{4}\alpha^{-5}\int\limits_{t_i-\alpha}^{t_i+\alpha}(3(\xi-t_i)^2-\alpha^2)S(\xi)d\xi$$

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой левых прямоугольников

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) \tag{4}$$

Разобьем сегмент $[t_i - \alpha, t_i + \alpha]$ на N узлов, т.е $\xi_k = (t_i - \alpha) + kh$, $k \in [0, N-1]$. Посчитаем шаг

$$h = \frac{t_i - \alpha - t_i + \alpha}{N} = \frac{2\alpha}{5}$$

Тогда

$$T''_\alpha S = \frac{15}{4}\alpha^{-5} \int\limits_{t_i-\alpha}^{t_i+\alpha} (3(\xi - t_i)^2 - \alpha^2) S(\xi) d\xi \approx \frac{3}{2}\alpha^{-4} \sum_{0}^{N-1} (3(\xi_k - t_i)^2 - \alpha^2) S(\xi_k) \quad (5)$$

Получим следующие графики при $\alpha = 0.07$ и $\delta = 0.05$.

Здесь возникают трудности, связанные с малыми α^5 (для сходимости нам нужны малые α и малые δ), в итоге будут грубые результаты.

Проведем некоторые теоретические исследования операторов T''_α в случае данной модели задачи. Оказывается, что $T''_\alpha s = s''(t)$ (т. е приближения к производной совпадает с точной производной).

$$T''_\alpha S = \frac{15}{4}\alpha^{-5} \int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha} (3(\xi - t)^2 - \alpha^2) \xi^2 d\xi$$

Замена $\xi - t = \tau$, $\xi = \tau + t$. Тогда

$$T''_\alpha S = \frac{15}{4}\alpha^{-5} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} (3\tau^2 - \alpha^2)(\tau + t)^2 d\tau =$$

$$= \frac{15}{4}\alpha^{-5} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} (3\tau^4 + 6t \cdot \tau^3 + 3t^2 \cdot \tau^2 - \alpha^2(\tau + t)^2) d\tau =$$

$$= \frac{15}{4}\alpha^{-5} \left(\frac{3}{5}\,\tau^5 + \frac{3}{2}\,t\tau^4 + t^2\tau^3 - \frac{\alpha^2}{3}\,(\tau + t)^3 \right) \Bigg|_{-\alpha}^{\alpha} =$$

$$= \frac{15}{4}\alpha^{-5} \left(\frac{6}{5}\,\alpha^5 + 2t^2\alpha^3 - \frac{\alpha^2}{3}\,(6t^2\alpha + 2\alpha^3) \right) = \frac{15}{4}\alpha^{-5} \cdot \frac{8}{15}\alpha^5 = 2.$$

Таким образом, получим $2 = s''(t)$.

В тоже время, если мы вычислим $T''_\alpha S$ по квадратурной формуле в каждой точке t_i, то получим плохие графики, как показано выше. Для наглядности, посчитаем значение в $t_2 = 0.2$, тогда $\xi_k = 0.2 + \alpha(0.4k - 1)$, где $k \in [0, 4]$, т.е $N = 5$. Подставим в (5)

$$\frac{3}{2}\alpha^{-4}\sum_0^4(3\alpha^2 \cdot (0.4k-1)^2 - \alpha^2)S(\xi_k) =$$

$$= \frac{3}{2}\alpha^{-2}\sum_0^4(3(0.4k-1)^2 - 1) \cdot (0.2 - \alpha + 0.4\alpha k)^2 = [\alpha = 0.07]$$

$$\frac{3}{2}0.07^{-2}\sum_0^4(3(0.4k-1)^2 - 1) \cdot (0.13 + 0.028k)^2 \approx 8.56.$$

Заключение. В настоящей работе был рассмотрен интегральный метод для восстановления непрерывной второй производной. Для получения результатов численного эксперемента использовался язык программирования Python. Были получены численные результаты в прямой и обратной задачах функции пути $s(t) = t^2$ в случае, когда она задана с погрешностью в метрике пространства $L_2[0, 1]$.