

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Конструктивное решение обратной задачи рассеяния для системы Захарова-Шабата

наименование темы курсовой работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 - Прикладная математика и информатика

код и наименование направления

 механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Маслова Андрея Владимировича

фамилия. имя, отчество

Научный руководитель

 доцент, к.ф-м.н., доцент

должность, уч. степень, уч.звание

подпись, дата

 М. Ю. Игнатьев

инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

 д.ф-м.н., профессор

должность, уч. степень, уч.звание

подпись, дата

 В.А. Юрко

инициалы, фамилия

Введение. Система Захарова–Шабата в последнее время привлекает большое внимание специалистов в области математической физики и инженеров. Данная система имеет множество приложений, начиная от проектирования и изготовления волоконных брэгговских решеток и заканчивая решением нелинейных уравнений с помощью метода обратной задачи рассеяния. Ценность изучения системы Захарова–Шабата значительно возрастает благодаря ее связи с нелинейным уравнением Шредингера (НУШ), имеющим ряд применений в физике, биологии и инженерии. Поэтому эффективное численное решение задачи рассеяния для этой системы является важным с практической точки зрения.

Метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) — аналитический метод решения задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений. Он основан на связи нелинейного уравнения с данными рассеяния семейства вспомогательных линейных дифференциальных операторов, дающей возможность по эволюции данных рассеяния восстановить эволюцию решения нелинейного уравнения. Метод представляет собой аналог метода Фурье решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Роль преобразования Фурье при этом играет отображение коэффициентных функций линейного дифференциального оператора в совокупность данных рассеяния. При применении метода необходимо решать обратную задачу рассеяния, которая состоит в восстановлении линейного дифференциального оператора по его данным рассеяния.

Целью данной бакалаврской работы является изучение численных методов задачи рассеяния для системы Захарова–Шабата.

Основное содержание работы. Бакалаврская работа содержит введение, пять разделов, заключение, список использованной литературы и одно приложение.

В введении обоснована актуальность работы, сформулированы цели и задачи исследования, а также его теоретическое и практическое применение.

В первом разделе содержится теоретическая информация о прямой и обратной задаче рассеяния для системы Захарова–Шабата.

Во втором разделе приведены численные методы для прямой задачи рассеяния.

В третьем разделе приведены численные методы для обратной задачи рассеяния.

В четвертом разделе находится информация о сведении нелинейного уравнения Шредингера к системе Захарова–Шабата и эволюции данных рассеяния.

В пятом разделе содержится информация об альтернативных методах решения эволюционных уравнений, цифровой модуляции сигналов, используемых на практике, а так же численный эксперимент.

Прямая задача рассеяния для системы Захарова–Шабата. Рассмотрим задачу Захарова–Шабата на собственные значения.

$$\frac{dv_1}{dx} = -i\zeta v_1 + qv_2, \quad (1)$$

$$\frac{dv_2}{dx} = i\zeta v_2 + rv_1. \quad (2)$$

Прежде всего мы предположим, что q и r достаточно быстро стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. Отметим, что это предположение очень важно, поскольку теория рассеяния с другими граничными условиями приводит к совершенно другим результатам. Быстрое убывание позволяет определить собственные функции $\varphi, \bar{\varphi}, \psi, \bar{\psi}$ со следующими граничными условиями при $\zeta = \xi$ ($\zeta = \xi + i\eta$ – собственное значение):

$$\left. \begin{aligned} \varphi &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ \bar{\varphi} &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \end{aligned} \right\} \text{при } x \rightarrow -\infty \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \\ \bar{\psi} &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \end{aligned} \right\} \text{при } x \rightarrow +\infty \quad (4)$$

Рассмотрим вронскиан $W(\varphi, \bar{\varphi}) = -1$ и $W(\psi, \bar{\psi}) = 1$. Решения $\psi, \bar{\psi}$

являются линейно независимыми; таким образом, мы можем написать

$$\varphi = a(\xi)\bar{\psi} + b(\xi)\psi, \quad (5)$$

$$\bar{\varphi} = -\bar{a}(\xi)\psi + \bar{b}(\xi)\bar{\psi}. \quad (6)$$

Здесь $a(\xi)$ и $b(\xi)$ являются искомыми коэффициентами рассеяния.

Обратная задача рассеяния для системы Захарова–Шабата. В данном разделе содержится описание подхода для обратной задачи рассеяния. Вначале мы примем следующие интегральные представления для функций ψ , $\bar{\psi}$:

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} + \int_x^\infty K(x, s) e^{i\zeta s} ds, \quad (7)$$

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} + \int_x^\infty \bar{K}(x, s) \bar{e}^{i\zeta s} ds \quad (8)$$

где $\zeta = \xi + i\eta$, $\eta \geq 0$ и K , \bar{K} являются двухкомпонентными векторами, т. е.

$$K(x, s) = \begin{pmatrix} K_1(x, s) \\ K_2(x, s) \end{pmatrix}.$$

Интегральный член, содержащий K , \bar{K} , определяет отличие асимптотик при $x = \infty$ от истинной собственной функции. Чтобы удовлетворить граничным условиям, естественно считать ядро K треугольным, т. е. $K(x, s) = 0$ при $x > s$. Наиболее важным звеном этой конструкции является независимость ядер K , \bar{K} от ζ . Теперь введем линейные интегральные уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко) обратной задачи рассеяния:

$$K_1(x, y) \mp R^*(x + y) \pm \int_x^\infty \int_x^\infty K_1(x, z) R(z + s) R^*(s + y) ds dz = 0. \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{R}(x) &= \mp R^*(x), \\ K(x, y) &= \begin{pmatrix} K_2^*(x, y) \\ \pm K_1^*(x, y) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

и

$$R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{a}(\xi) e^{i\xi x} d\xi - i \sum_{j=1}^N C_j e^{i\zeta_j x}, \quad (11)$$

$$C_j = \frac{b(\zeta_j)}{a'(\zeta_j)}, \quad \bar{C}_j = \frac{\bar{b}(\tilde{\zeta}_l)}{\bar{a}'(\zeta_j)}. \quad (12)$$

Когда $r = \mp q$, q вещественно, то $R(x)$, $K(x, z)$ также вещественны. Тогда можно получить потенциал по формуле

$$q(x) = -K_1(x, x). \quad (13)$$

Потенциал $r(x)$ определяется по формуле

$$r(x) = -2\bar{K}_2(x, x).$$

Метод Абловица–Ладика. Основная идея метода заключается в том, что система (1)–(2) при переходе к дискретной сетке по переменной x , $q(x, 0) = q_n = const$, $x_n = n\Delta x$, $\Delta x = L/M$, дает эволюцию спектральной собственной функции φ на каждом интервале Δx :

$$\varphi(x_n + \Delta x) = U(q_n)\varphi(x_n), \quad (14)$$

где

$$U(q_m) = \frac{1}{\sqrt{1 \pm \Delta x^2 |q_m|^2}} \begin{pmatrix} Z & \Delta x q_m \\ \mp \Delta x \bar{q}_m & Z^{-1} \end{pmatrix}, \quad Z = e^{i\zeta \Delta x}. \quad (15)$$

$k^2 = |q|^2 - \zeta^2$ – постоянная величина внутри интервала Δx .

С помощью вышеизложенного метода мы можем решить задачу рассеяния, то есть определить коэффициенты $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$.

Layer-peeling Метод. Введём следующее обозначение для матрица рассеяния, содержащей коэффициенты $a(\zeta)$, $b(\zeta)$:

$$S_{m_1 \rightarrow m_2}(\zeta) = \prod_{j=m_2}^{m_1} U(q_j), \quad (16)$$

где $U(q_j)$ (15). Тогда $S_{1 \rightarrow m}(\zeta)$ является полиномом Лорана степени m ,

$$S_{1 \rightarrow m}(\zeta) = \sum_{k=-m}^m U_{1 \rightarrow m}^{(k)} \zeta^k, \quad (17)$$

с особым свойством, заключающимся в том, что q_m может быть восстановлен из двух самых, больших коэффициентов

$$\mp \Delta x \bar{q}_m = \frac{\left[U_{1 \rightarrow m}^{(m-1)} \right]_{21}}{\left[U_{1 \rightarrow m}^{(m)} \right]_{11}}. \quad (18)$$

Матрицы-коэффициенты $U_{1 \rightarrow m}^{(m-1)}$ и $U_{1 \rightarrow m}^{(m)}$ могут быть вычислены по известной формуле:

$$U_{1 \rightarrow m}^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|} \frac{S_{1 \rightarrow m}(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta. \quad (19)$$

Тогда q_1, \dots, q_m , могут быть восстановлены при помощи $S(\zeta) = S_{1 \rightarrow m}(\zeta)$ итеративным путём следующим шагом:

$$q_m = \pm \Delta x^{-1} \frac{\left[U_{1 \rightarrow m}^{(m-1)} \right]_{21}}{\left[U_{1 \rightarrow m}^{(m)} \right]_{11}}, \quad S_{1 \rightarrow m-1}(\zeta) = U(q_m)^{-1} S_{1 \rightarrow m}(\zeta). \quad (20)$$

Связь НУШ и системы Захарова–Шабата. Покажем связь системы (1)–(2) с НУШ. Наиболее общая временная зависимость (1)–(2), содержащая первые производные по t , имеет вид

$$\frac{dv_1}{dt} = Av_1 + Bv_2, \quad (21)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = v_1 + Dv_2, \quad (22)$$

где A, B, C, D — скалярные функции, не зависящие от v . Интересно отметить, что в случае $r = -1$ или $r = \pm q^*$ (или $r = \pm q$, если q вещественно) из указанного формализма вытекают нелинейные эволюционные уравнения, важные для физических приложений. Кроме того, для $r = -1$, т. е. когда мы

имеем уравнение Шрёдингера

$$-\frac{1}{2}a_1q_{xx} = q_t - a_2q^2r, \quad (23)$$

$$-\frac{1}{2}a_2r_{xx} = r_t - a_2q^2r, \quad (24)$$

Это пара связанных нелинейных эволюционных уравнений, которые напоминают нелинейное уравнение Шрёдингера. Действительно, нелинейное уравнение Шрёдингера получится, если мы положим $r = \mp q^*$. При этом уравнения (23) и (24) будут совместными тогда и только тогда, когда $a_2 = i\alpha$, α вещественно. Если мы положим $\alpha = 2$, то получим уравнение

$$iq_t = q_{xx} \pm 2q^2q^*. \quad (25)$$

Эволюция данных рассеяния В предыдущем разделе мы вывели уравнения обратной задачи для обобщенной задачи рассеяния Захарова — Шабата. Точнее говоря, имея данные рассеяния

$$S(\zeta) = \left\{ \{\zeta_j\}_{j=1}^N, \quad \{C_j\}_{j=1}^N, \quad \rho(\zeta) = \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)} \right\}$$

(т. е. дискретные собственные значения, нормировочные константы и коэффициент отражения), мы можем составить и в принципе решить линейные интегральные уравнения обратной задачи рассеяния, что позволяет восстановить рассеивающий потенциал (см. (13)). Поскольку нас интересует решение нелинейного эволюционного уравнения, то мы будем действовать следующим образом. Пусть при $t = 0$ заданы начальные условия системы Захарова—Шабата. Решим прямую задачу рассеяния и отобразим эти начальные потенциалы в данные рассеяния $S(\zeta, t = 0)$ т.е. мы вычислим собственные функции и по ним найдем данные рассеяния). В этом разделе покажем, как можно получить данные рассеяния $S(\zeta, t)$ в любой момент времени $t > 0$. Восстановив по этим данным потенциал, мы получим решения нелинейного эволюционного уравнения в любой момент времени t .

Зависящие от времени собственные функции определяются следующим

способом:

$$\begin{aligned}\varphi^{(t)} &= \varphi e^{A_- t}, & \psi^{(t)} &= \psi e^{-A_- t} \\ \bar{\varphi}^{(t)} &= \varphi e^{-A_- t}, & \bar{\psi}^{(t)} &= \bar{\psi} e^{A_- t},\end{aligned}\tag{26}$$

где $\varphi, \bar{\varphi}, \psi, \bar{\psi}$ удовлетворяют (1)–(2) с зафиксированными граничными условиями (3)–(4). Таким образом,

$$\begin{aligned}b(\xi, t) &= b(\zeta, 0)e^{-2A_-(\zeta)t} \\ a(\xi, t) &= a(\zeta, 0).\end{aligned}\tag{27}$$

Для НУШ (25) из (??) можем получить, что

$$A_-(\zeta) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} A(\zeta) = 2i\zeta^2.\tag{28}$$

В заключение подведем итог вышеприведенным этапам. Сформулируем основные этапы метода обратной задачи рассеяния.

- Решить прямую задачу рассеяния: по заданному начальному условию $q(t, 0)$, найти данные рассеяния.
- По начальным данным рассеяния найти их эволюцию, используя формулы для эволюции данных рассеяния
- Решить обратную задачу рассеяния: по данным рассеяния восстановить функцию $q(x, t)$ - искомое решение задачи Коши.

Численный эксперимент

В данной работе в качестве исходного сигнала для реализации численных методов обратной задачи рассеяния будет использован 16QAM сигнал с апсеймплингом посредством rc (Raised Cosine) фильтра. Для получения коэффициентов рассеяния был выбран метод Абловица–Ладика, а для восстановления исходного сигнала — Layer-peeling метод. Данная связка является одной из самых распространённых в сфере передачи сигнала.

Для реализации алгоритмов был выбран язык Python ввиду его простоты работы с комплексными числами и огромному спектру вспомогательных библиотек.

SSFM

Для демонстрации этого подхода запишем нелинейное уравнение Шре-

дингера в следующем виде:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - |u|^2 u, \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned} \quad (29)$$

Это уравнение может быть записано как общее нелинейное эволюционное уравнение вида

$$\begin{aligned} i\frac{\partial u}{\partial t} &= (\mathcal{L} + \mathcal{N})u, \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned} \quad (30)$$

где $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $\mathcal{N} = -|u|^2$ — независимые от времени линейные и нелинейные операторы соответственно. Чтобы решить эту задачу, следует разделить её на две части. Нелинейная составляющая запишется следующим образом

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{N}u. \quad (31)$$

Чтобы продвинуть нелинейную часть, возьмём

$$\mathcal{N} = q|u(x, \tau + \Delta t)|^2 \approx q|u(x, \tau)|^2,$$

и, таким образом, аналитическое решение дается с помощью

$$u(x, \tau + \Delta t) \approx \exp(i\Delta t \mathcal{N})u(x, \tau) = \exp(iq\Delta t|u(x, \tau)|^2) u(x, \tau). \quad (32)$$

Линейный шаг задается формулой:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u. \quad (33)$$

Линейная часть для этого случая не изменилась и может быть обработана снова с помощью преобразования Фурье. Если \mathcal{L} дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, получаем:

$$u(x, \tau + \Delta t) = \mathcal{F}^{-1}(\exp(i\Delta t \hat{\mathcal{L}}) \cdot \mathcal{F}(\exp(i\Delta t \mathcal{N})u(x, \tau))). \quad (34)$$

Эксперимент На данном этапе с учётом всех проведённых рассуж-

дений и изложенных выкладок можем приступить к численной модуляции 16QAM сигнала и решения задачи рассеяния для такого сигнала. Для начала сгенерируем случайные 100 точек из созвездия 16QAM. Далее нужно провести апсеймлинг при помощи гс фильтра.

Затем для нахождения коэффициентов рассеяния определим сетку ξ таким образом, чтобы значения Z в формуле (15) лежали на единичной окружности. Таким образом результат метода Абловица–Ладика для параметров $\xi \in [-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}]$, $\Delta x = L/M$, где M – количество сгенерированных точек q_m из созвездия 16QAM.

Результат должен соответствовать условию на коэффициенты $|a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2 = 1$, чтобы убедиться в этом найдём максимум и минимум из значений $|a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2$ для всех ξ из сетки. В результате вычислений получаем:

$$\max(|a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2) = 1.00000000000000233,$$

$$\min(|a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2) = 0.99999999999999843.$$

Теперь нужно получить эволюцию данных рассеяния и восстановить сигнал $q(x, t)$ где t – любое положительное число. Для этого воспользуемся следующим свойством матрицы (16):

$$S_{1 \rightarrow m} = \Phi(l, \zeta)$$

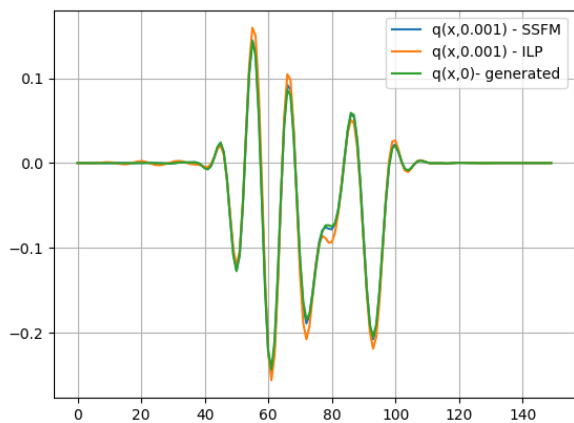
где

$$\Phi = (\varphi, \bar{\varphi}) \tag{35}$$

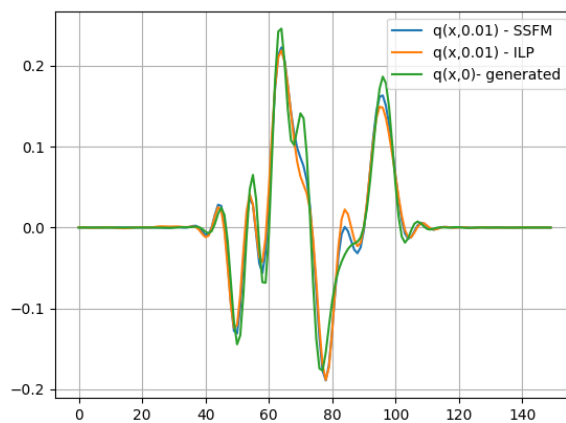
здесь φ и $\bar{\varphi}$ определяются соотношениями (4). Воспользуемся свойством (5)–(6), таким образом для получения матрицы (16), необходимо по коэффициентам a, \bar{a}, b, \bar{b} , найти $\varphi, \bar{\varphi}$, а затем найти Φ по формуле (35). Построив матрицу $S_{1 \rightarrow m} = \Phi(l, \zeta)$, можно восстановить $q(x, t)$ в любой точке $t > 0$ посредством Layer-peeling метода.

Для демонстрации работы метода наберём несколько различных сигналов и найдём $q(x, t)$ методом обратной задачи рассеяния и сравним результат с методом фурье разделённого шага.

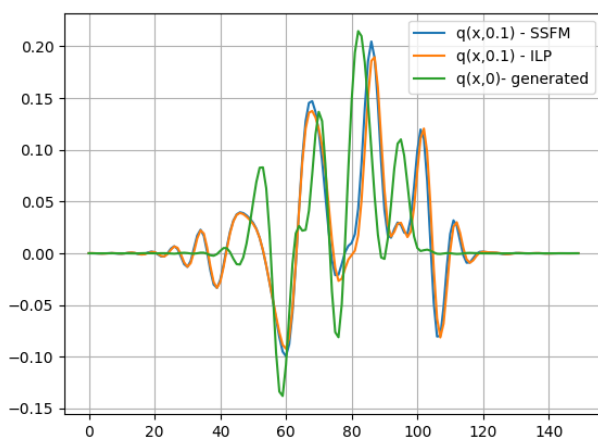
В соответствие с рисунком 1 можно видеть, что решение, найденное



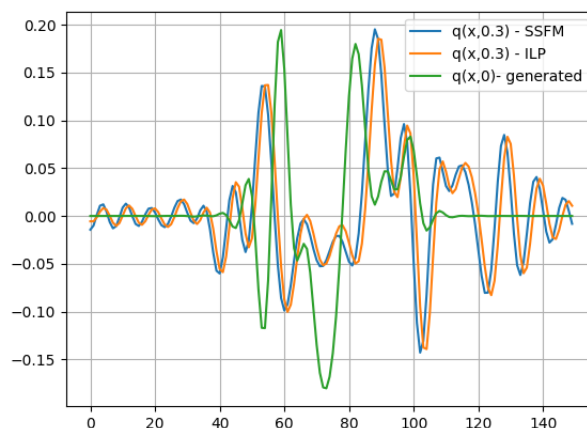
$$M = 50, L = 15, t = 0.0001$$



$$M = 50, L = 15, t = 0.01$$



$$M = 50, L = 15, t = 0.1$$



$$M = 50, L = 15, t = 0.3$$

Рисунок 1 – Результат работы программы для различных параметров.

методом обратной задачи рассеяния показывает схожий с SSFM результат, однако при росте t начинает отклоняться от него. Из результатов можно сделать вывод, что данная имплементация метода обратной задачи рассеяния достаточно точно восстанавливает $q(x, t)$ при помощи эволюции данных рассеяния, если брать SSFM за эталон.

Заключение.

В ходе работы были рассмотрены численные методы решения прямой и обратной задачи рассеяния для системы Захарова–Шабата. В качестве начального этапа были приведены основные сведения из теории рассеяния для этой системы.

Далее была показана связь системы Захарова–Шабата с нелинейным уравнением Шредингера, был представлен способ получения эволюции дан-

ных рассеяния.

В заключительном этапе была продемонстрирована имплементация вышеизложенных численных методов при помощи программного кода на Python.

Численный эксперимент показал, что метод обратной задачи рассеяния хорошо справляется с получением решений нелинейных эволюционных уравнений.

Данный метод имеет большой потенциал, ожидается, что результаты разработки численных алгоритмов МОЗР окажутся полезными в различных сферах, например:

- в фотонике для синтеза волоконных решеток, для разработки перспективных волоконно-лазерных устройств;
 - в гидродинамике для нелинейного анализа океанских волн;
 - в геофизике для анализа сейсмологических эффектов;
- и многих других областях, тесно связанных с нелинейными уравнениями.