МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

СИСТЕМА СЖАТИЙ И СДВИГОВ В ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 - Прикладная математика и информатика
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Мешкановой Марины Юрьевны
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф-м.н. ____________ Д.С.Лукомский
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф-м.н., профессор ____________ В.А. Юрко
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2022

Введение. В данной бакалаврской работе рассматриваются системы Хаара и Фабера-Шаудера и их применение в обработке сигналов. Система Фабера-Шаудера была определена в 1910 году Фабером и стала первым примером базиса в пространстве функций, которые являются непрерывными на отрезке $[0, 1]$. Шаудер переоткрыл ее в 1927 году, и с тех пор она считалась системой Шаудера, пока в 70-х годах не вспомнили про работу Фабера. После этого систему стали называть системой Фабера-Шаудера. Она является простейшим базисом пространства $C[0, 1]$.

Шаудер стал рассматривать класс базисов пространства $C[0, 1]$. Каждый базис из этого класса определяется в зависимости от исходного, всюду плотного, счетного на $[0, 1]$ множества, которое содержит точки 0 и 1 . Если в качестве такого множества взять множество двоично-рациональных дробей, упорядоченное естественным образом, то мы получим систему $\Phi = \{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, которая совпадает с системой после нормировки последней в $\mathrm{C}[0, 1]$. Эта система $\Phi = \{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, являющаяся нормированным базисом в $\mathrm{C}[0, 1]$, и называется системой Фабера- Шаудера.

Система Хаара была определена в 1909 году в диссертации знаменитого венгерского математика А. Хаара, и она стала первой ортогональной системой, обладающий следующим свойством: каждая непрерывная на отрезке [0,1] функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по функциям системы:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(x)$$

Функции Хаара в дальнейшем появлялись во многих работах. Например, изучался характер сходимости ряда в зависимости от свойств $f(x)$ или от свойств коэффициентов c_n.

До недавнего времени область применений систем Хаара и систем Фабера-Шаудера ограничивалась теорией функций и функциональным анализом. Эти системы также присутствуют во многих работах связанных с теорией функции действительного переменного и с теорией ортогональных рядов, находят свое применение в прикладной математике. Например, функции Фабера-Шаудера и Хаара бывают полезны для построения интерполяционных формул, а также в теории вероятностей или, допустим, в теории равномерного распределения. Однако, в связи с развитием средств вычислительной техники, они распространились и на другие сферы. Так, эти преобразования стали использоваться при анализе и синтезе устройств логического типа. Особенно актуальными они являются для комбинационных схем, использующих сверхбольшие интегральные схемы, в которых находятся сотни тысяч элементов, выполняющие различные логические функции. Более того, быстрое дискретное преобразование Хаара хорошо показывает себя в практических задачах при обработке дискретных сигналов, так как оно разделимо и легко вычисляется. Быстрые дискретные преобразования позволяют значительно сократить количество арифметических операций, а, значит, и время выполнения преобразований.

Цель данной работы заключается в рассмотрении теорем о сходимости и базисности для данных функций, построении алгоритмов быстрого преобразования Хаара и разложения Фабера-Шаудера для функции f=sin(x), а также, исследование их применения к обработке сигналов.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников и приложения.

Первый раздел будет посвящен определению функциям Хаара. В нем будут сформулированы основные и вспомогательные определения, а также теоремы о базисности, абсолютной непрерывности и равномерной сходимости функций.

Второй раздел посвящен определению функций Фабера-Шаудера. Здесь дополнительно будут рассматриваться системы типа Фабера-Шаудера, которые являются обобщением классической системы Фабера-Шаудера.

Третий раздел посвящен описанию быстрых дискретных преобразований Фурье и Хаара.

В четвертом разделе будет решаться задача построения алгоритма разложения Фабера-Шаудера и Хаара. Дополнительно, будут проанализированы данные численной погрешности при различном проценте обнуления коэффициентов и графики полученных функций.

В приложении приведена программа, написанная на языке программирования Python, которая строит графики приближений функции sinx с помощью быстрых дискретных преобразований и показывает численную погрешность методов по сравнению с точной функцией. Программа написана с использованием таких дополнительных библиотек как numpy, matplotlib и pylab.

Основное содержание работы. В первом разделе изучаются системы Хаара и их разложения

Определение 1. *Двоичные интервалы - это интервалы вида:*

$$\left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), i = 1, 2, ..., 2^k, \qquad k = 0, 1, ...$$

Для

$$n = 2^k + i, \quad i = 1, 2, ..., 2^k, \quad k = 0, 1, ...$$

обозначим

$$\Delta_n = \Delta_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right); \quad \bar{\Delta}_n = \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right];$$

$$\Delta_1 = \Delta_0^0 = (0, 1); \quad \bar{\Delta}_1 = [0, 1];$$

Если $\delta \subset$ (0,1) - какой-либо интервал, то через δ^+ и δ^- обозначим соответственно левую и правую половины интервала δ. Если рассматривать частный случай ($n = 2^k + i$), то

$$\Delta_n^+ = (\Delta_k^i)^+ = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) = \Delta_{k+1}^{2i-1}; \; \Delta_n^- = (\Delta_k^i)^- = \left(\frac{2i-1}{2^k+1}, \frac{i}{2^k}\right) = \Delta_{k+1}^{2i};$$

Интервалы $\{\Delta_k^i\}_{i=1}^{2^k}$ называются также интервалами k-й пачки, k=0,1...

Определение 2. *Система Хаара - это система функций*

$$\chi = \{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad x \in [0, 1]$$

где $\chi_1(x) \equiv 1$, а функция $\chi_n(x)$ с $2^k < n \leq 2^{k+1}$, $k = 0, 1, ...$, определяемая таким образом:

Значения $\chi_n(x)$ в точках разрыва и в концах отрезка [0,1] выбираются так, чтобы $\chi_n(x) \in D_{2^k}$, т.е чтобы выполнялись равенства

$$\chi_n(x) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2}[\chi_n(x+\delta) + \chi_n(x-\delta)], \quad x \in (0,1),$$

$$\chi_n(0) = \lim_{\delta\to +0} \chi_n(\delta), \quad \chi_n(1) = \lim_{\delta\to -0} \chi_n(1-\delta).$$

Группы функций $\{\chi_n(x)\}_{n=2^{k+1}}^{2^{k+1}}$, k=0, 1,..., i=1, 2,..., 2^k,n=2^k+i

$$\chi_k^{(i)}(x) = \chi_n(x), \quad \chi_{(0)}^{(0)}(x) = 1, \quad x \in [0,1].$$

Тогда ясно, что система Хаара состоит из объединения пачек $\{\chi + k^{(i)}(x)\}_{i=1}^{2^k}$, $k = 0, 1, ...$, и функции $\chi_0^{(0)}(x)$.

Выражение для частных сумм $S_N(f,x)$ ряда Фурье-Хаара функции $f \in L^1(0,1)$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\chi_n(x),$$

где $c_n(f) = c_n(f,x)$ - коэффициенты Фурье-Хаара, такие что:

$$c_0(f) = \int_0^1 f(x)dx,$$
$$c_n(f) = 2^{\frac{k}{2}}\left[\int_{\Delta_n^+} +f(x)dx - \int_{\Delta_n^-} -f(x)dx\right], n = 2, 3\dots$$

Рассмотрим оценки, относящиеся к поведению коэффициентов Фурье по системе Хаара некотрых классов функций.

Определение 3. *Если нам дана функция $f(x) \in C(0,1)$, то функция*

$$\omega(\delta, f) = \sup_{0<h\le\delta, x,y\in[0,1]} |f(x) - f(y)|$$

где $0 \le \delta \le 1$, называется модулем непрерывности f.

Определение 4. *Если $f(x) \in L^p(0,1), 1 \le p \le \infty$, то функция*

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{0<h\le\delta, x,y\in[0,1]} \int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx^{1/p},$$

где

$$0 \leq \delta \leq 1,$$

называется интегральным модулем непрерывности.

Если проинтегрировать системы Хаара, то можно получить системы Фабера-Шаудера.

Во втором разделе изучается система Фабера-Шаудера. Даются основные определения и теоремы касательно системы и ряда Фурье по ней.

Определение 5. *Системой Фабера-Шаудера называется система функций*

$$\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, x \in [0,1]$$

В которой

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, x \in [0,1]$$

а если $n = 2^k + i, k = 0, 1, \ldots, i = 1, 2, \ldots, 2^k$, то:

$$\varphi_n(x) = \varphi_k^{(i)}(x) := \begin{cases} 0, \text{ если } x \notin \left(\frac{i-1}{2^2}, \frac{i}{2x}\right) \\ 1, \text{ если } x = \frac{2^i-1}{2^{k+1}}, \\ \text{ линейна и непрерывна} \\ \text{ на } \left[\frac{i-1}{2^x}, \frac{2i-1}{2^{2+1}}\right] \text{ и на } \left[\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^x}\right]. \end{cases} \tag{1}$$

Определение 6. *Ряд по системе Фабера-Шаудера:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x) = A_0 \varphi_0(x) + A_1 \varphi_1(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^k} A_{k,i} \varphi_k^{(i)}(x), \tag{2}$$

где коэффициенты $\{A_n\}$ однозначно определяются функцией $f(x)$, таким образом, что:

$$A_0 = A_0(x) = f(0), \quad A_1 = A_1(x) = f(1) - f(0),$$

$$A_n = A_n(f) = A_{k,i}(f) = f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right)\right], \tag{3}$$

если $n = 2^k + i, k = 0, 1, \ldots, i = 1, 2, \ldots, 2^k$.

Теорема 1. *Система Фабера-Шаудера - базис в пространстве $C(0,1)$, при этом*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(f)\varphi_n(x), f \in C(0,1)$$

частные суммы [13] $S_N(f,x)$ этого разложения принадлежат L_N и удовлетворяют соотношению

$$S_N(f,x) = f(x) \text{ при } x \in \pi_N, N = 1,2,\ldots$$

Системы типа Фабера-Шаудера. Рассмотрим последовательность точек $\left\{\left\{a_k^i\right\}_{i=0}^{2^k}\right\}_{k=0}^{\infty}$ такую, что:

$$a_0^0 = 0, a_0^1 = 1, a_k^i < a_m^j, \text{ если } \frac{i}{2^k} < \frac{j}{2^m}, a_k^i = a_m^j, \text{ если } \frac{i}{2^k} = \frac{j}{2^m},$$

и определим на отрезке $[0,1]$ с помощью этих точек систему типа Фабера-Шаудера, положив $\bar{\phi}_0(x) \equiv 1, \bar{\phi}_1(x) \equiv x$ и при $n = 2^k + i, k = 0,1,\ldots,i = 1,2,\ldots,2^k$

$$\widetilde{\phi}_n(x) = \vec{\phi}_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \notin \left(a_k^{i-1}, a_k^i\right), \\ 1, \text{ если } x = a_{k+1}^{2i-1}, \\ \text{ линейна и непрерывна} \\ \text{ на отрезках } \left[a_k^{i-1}, a_{k+1}^{2i-1}\right] \text{ и } \left[a_{k+1}^{2i-1}, a_k^i\right]. \end{cases}$$

В третьем разделе рассматривается быстрое дискретное преобразование Хаара. Быстрое дискретное преобразование Хаара основано на способе доказательства замкнутости системы в пространстве ступенчатых функций. Оно строится на преобразовании последовательности $(c_n)_{n=0}^{2^k-1}$ по базису $\chi_n(x)$. Любая ступенчатая функция может быть представлена как полином по системе Хаара:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{2^{k-1}} c_n \chi_n(x)$$

Перепишем (1) в виде:

$$f^{(k)}(x) = f^{(k-1)}(x) + r_{k-1}(x)g^{(k-1)}(x), \text{ где}$$

$g^{k-1}(x)-$ двоично-ступенчатая функция, значение которой равно $c(N)$, $N = 2^k + 1$ на Δ_i^{k-1}. Запишем это равенство на полуинтервале $\Delta_i^{(k-1)} = \Delta_{2i}^{(k)} \bigcup \Delta_{2i+1}^{(k)}$. Получаем систему

$$\begin{cases} f_{2i}^{(k)} = f_i^{(k-1)} + g_i^{(k-1)} \\ f_{2i+1}^{(k)} = f_i^{(k-1)} - g_i^{(k-1)} \end{cases}$$

Решая данную систему для $i = 0, 1, 2 \ldots 2^{k-1} - 1$, находим

$$\begin{cases} f_i^{(k-1)} = \frac{1}{2}\left(f_{2i}^{(k)} + f_i^{(k)}\right) \\ g_i^{(k-1)} = \frac{1}{2}\left(f_{2i}^{(k)} - f_{2i+1}^{(k)}\right) \end{cases}$$

Мы получили новый вектор $(f_i)_{i=0}^{2k-1}$, в котором последние компоненты равны $f_N = c(N)$, а первые компоненты $(f_i)_{i=0}^{2k-1}$ есть значения функции $f^{(k-1)}(x) = \sum_{n=0}^{2^{k-1}-1} c_n\chi_n(x)$ кусочно-постоянной на интервалах ранга $(k-1)$, причем коэффициенты Фурье-Хаара функции f^{k-1} есть первые 2^{k-1} коэффициентов исходной функции $f^{(k)}$.

Применяя к функции $f^{(k-1)}(x) = \sum_{n=0}^{2^{k-1}-1} c_n\chi_n(x)$, эти же преобразования получим вектор, в котором последние $2^{(k-2)}$ компонент есть компоненты вектора c, а первые компоненты $(f_i)_{i=0}^{2k-2}$ есть значения функции $f(k-2)(x) = \sum_{n=0}^{2^{k-1}-1} c_n\chi_n(x)$ кусочно-постоянной на интервалах ранга $(k-1)$[15], причем коэффициенты Фурье-Хаара функции f^{k-2} есть первые 2^{k-2} коэффициентов исходной функции $f^{(k)}$. Продолжая последовательное применение формул, получим после k-го шага последовательность, которая полностью совпадает с c.

Четвертый раздел будет посвящен описанию алгоритму нахождения коэффициентов разложения функций по системам Хаара и Фабера-Шаудера, а также анализу влияния коэффициентов на приближения данными функциями.

Сперва разобъем отрезок [0,1] на N частей, где $N = 1, 2..., 2^n$

Ранее в работе рассматривались частные суммы ряда по системе Хаара и Фабера-Шаудера. Так как данные выражения являются системами линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $c_n(f)$ и $a_n(f)$, то будем решать систему Хаара с помощью быстрого дискретного преобразования, а систему Фабера-Шаудера с помощью формул данных по определению системы.

После нахождения коэффициентов необходимо отсортировать их в порядке возрастания и занулить определенный процент наименьших. Меняя процентное соотношение, можно будет проанализировать, какой из методов приближает заданную функцию sin(x) лучше.

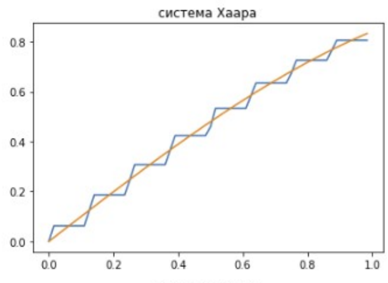
Задача, которая была поставлена в 4 разделе, была решена с помощью программы, написанной на языке программирования Python. Исходный код программы приведен в приложении А.

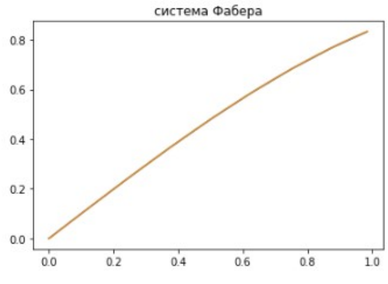
Построим и проанализируем графики при разном проценте обнуления коэффициентов.

Сравним полученные результаты погрешностей занеся их в таблицу:

Процент	Погрешность Фабера-Шаудера	Погрешность Хаара
0	0.00157386	0.0467943
10	0.05997919	0.10872595
40	0.05997919	0.22921051

Ниже представленны результаты работы программы в виде графика систем без обнуления коэффициентов. Эти приближения обладают максимальной точностью.





Теперь сравним два случая, в первом обнуление составит 10% (в соответствии с Рисунком 1), во втором 40% (в соответствии с Рисунком 2).

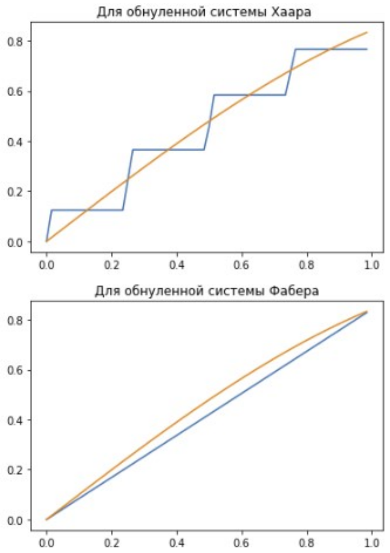


Рисунок 1 — Обнуление коэффициентов = 10%

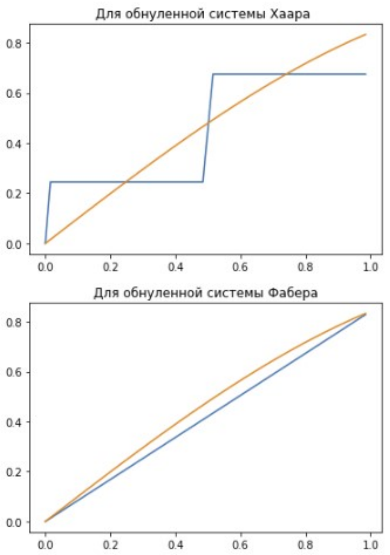


Рисунок 2 — Обнуление коэффициентов = 40%

Становится очевидным, что система Фабера-Шаудера значительно лучше приближает заданную функцию

Заключение. В бакалаврской работе были изучены основные понятия относящиеся к системам Фабера-Шаудера и Хаара, даны основные определения данных функций и их свойства. Были доказаны теоремы о базисности данных систем, сходимости функций Хаара и Фабера-Шаудера в разных пространствах, описаны алогоритмы быстрых преобразований рассматриваемых функций. Также, были заданны основные формулы разложения коэффициентов и рассмотрены системы типа Фабера-Шаудера, с доказательством того, что при наложении определённых ограничений, эти системы являются базисом пространства C(0, 1).Заключительная глава работы заключалась в реализации алгоритма нахождения коэффициентов разложения функции по системе Фабера-Шаудера и Хаара и дальнейшему анализу данных полученных коэффициентов с целью применения данного алгоритма в обработке сигналов.