МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математической физики и вычислительной математики

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОЛОГИИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки)__4___ курса ___411_____ группы

направления_01.03.02 - Прикладная математика и информатика__________________
код и наименование направления

_______________механико-математического факультета_______________________
наименование факультета, института, колледжа

_______________Петровой Анастасии Сергеевны_______________________
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ___________________ __Д.В. Поплавский__
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф-м.н., профессор________ ____________________ ____В.А. Юрко___
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2022

Введение. Интегральными уравнениями называют уравнения относительно искомой неизвестной функции, содержащейся под знаком интеграла. К интегральным уравнениям приводят самые различные модельные задачи, возникающие как в самой математике, так и в ее многочисленных приложениях.

Основанием для интегрального уравнения обычно выступает физическая модель исследуемого явления или процесса. Так, известные законы сохранения массы, импульса, энергии приводят к интегральным уравнениям. Интегральные уравнения отражают законы газовой динамики, электродинамики, экологии и многих других отраслей знаний. Достоинством таких моделей служит то, что интегральные уравнения, в отличие от дифференциальных, не содержат производных искомой функции и, следовательно, не требуют условия гладкости решения.

Объектом исследования в настоящей квалификационной работе являются уравнения Фредгольма первого и второго родов. Целью и предметом исследования является анализ иерархии численных методов для выбранного класса интегральных уравнений.

Квалификационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений.

В первой главе приводятся основные определения и понятия необходимые для дальнейшего изложения. Показывается общий вид интегральных уравнений, рассматривается понятие корректно и некорректно поставленных задач применительно к уравнениям Фредгольма первого и второго родов.

Во второй главе приводятся методы решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода. В третьей главе излагаются методы решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

В четвертой главе дан сравнительный анализ на примере метода квадратур и метода последовательных приближений применительно к уравнениям Фредгольма первого и второго родов. Для конкретных модельных интегральных уравнений реализованы численные эксперименты, в основу которых положены ранее представленные теоретические методы; получены и проанализированы результаты численных экспериментов. В приложениях представлены разработанные коды вычислительных алгоритмов, написанные на языке программирования высокого уровня C++.

В конце приводится список литературы, использованной при написании настоящей квалификационной работы.

Основное содержание работы. Интегральным уравнением называют уравнение относительно известной функции, содержащейся под знаком интеграла.

Общий вид интегральных уравнений содержится в записи

$$x(t) = \int\limits_D K(t, s, x(s))\, ds + f(t), \tag{1}$$

где D – некоторая область η - мерного пространства, x неизвестная, а f – известная векторные функции, K – в общем случае нелинейная относительная x функция.

Рассмотрим одномерное уравнение, т.е. такое, в котором искомой неизвестной является скалярная функция одной переменной и интегрирование производится по отрезку. При этом будем иметь в виду только интегральное уравнение.

Линейно интегральными уравнениями называют такие уравнения (1), в которых подынтегральная функция $K(t, s, x(s))$ представима в виде $K(x, t)y(s)$.

Линейно интегральными уравнения второго рода Фредгольма:

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(x, t)y(s)\, ds + f(x), \tag{2}$$

где заданная функция $f(x)$ – свободный член – и неизвестная функция $y(x)$ – решение – в этих уравнениях от переменной x, изменяющейся на отрезке $[a, b]$. Функция двух переменных $K(x, t)$, называемая ядром интегрального уравнения, определяется на множестве точек квадрата $a, b \times a, b$.

Введение в линейное интегральное уравнение числового параметра λ придает уравнению более общий вид и позволяет установить теорему существования решений при тех или иных значениях λ, в то время как при нейтральном значении $\lambda = 1$ решений может не оказаться. Подобно тому, как это делается в теориях линейных систем алгебраического или линейных дифференциальных уравнений, существование и единственность решений линейных неоднородных уравнений (2) изучается посредством изучения соответствующих им однородных уравнений, т.е. уравнений, получающихся из (2) при $f(t) \equiv 0$

Линейно интегральными уравнения первого рода Фредгольма:

$$\lambda \int_a^b K(x,t)y(s)\,ds = f(x). \tag{3}$$

Такое уравнение, характеризуется отсутствием отдельного слагаемого $y(x)$, имеются более ограниченную сферу применения и являются наиболее типичными представителями некорректных задач.

Многие математические задачи заключаются в нахождении решения y по исходным данным задачи f. Можно кратко можно записать как $y = R(f)$, где R – некоторый оператор. Будем считать y и f элементами метрических пространств Y и F с метриками $\rho_Y(y_1, y_2)$ и $\rho_F(f_1, f_2)$.

Решение y называется устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\rho_F(f_1, f_2) \leq \delta(\varepsilon)$ следует $\rho_Y(y_1, y_2) \leq \varepsilon$, где f_1 и f_2 – произвольные элементы F, $y_1 = R(f_1) \in Y$, $y_2 = R(f_2) \in Y$.

Задача $y = R(f)$ называется корректно поставленной на паре метрических пространств (Y, F), если выполняются условия:

- Для всякого элемента $f \in F$ существует решение $y \in Y$.
- Решение определено однозначно.
- Решение устойчиво.

Задачи, не удовлетворяющие перечисленным требованиям, называются некорректно поставленными.

Метрики в пространствах Y и F характеризуют, в каком смысле понимается малое изменение y и f. От того, каким образом выбрана метрика, может зависеть, будет ли решение y устойчиво при изменении f или нет, а следовательно, будет ли задача $y = R(f)$ корректна.

Рассмотрен интегральный оператор Фредгольма второго рода (2). Пусть ядро $K(x,t)$ непрерывно, а λ не является собственным значением. Рассмотрим метрические пространства Y и F непрерывных на $[a, b]$ функций с метрикой

$$\rho_Y(y_1, y_2) = \sup_{[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)|, \tag{4}$$

$$\rho_F(f_1, f_2) = \sup_{[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)|. \tag{5}$$

Известно, что решение $y \in Y$ уравнения определяется однозначно $f \in F$ и имеет вид

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b R(x, t, \lambda) f(t)\, dt + f(x).$$

где $R(x, t, \lambda)$ – непрерывная функция. Решение задачи устойчиво, то есть малому изменению $f(x)$ соответствует малое изменение $y(x)$. Таким образом, задача является корректно поставленной.

Рассмотрено интегральное уравнение Фредгольма первого рода (3). В предположении, что ядро $K(x, t)$ – функция непрерывная по переменным $x \in [a, b]$ и $t \in [a, b]$, решение $y(x)$ – непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция.

Метрические пространства Y и F непрерывных на $[a, b]$ функций с метриками (4), (5). Показано, что задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода в этом случае некорректно поставлена.

Для того, чтобы это показать, в частности, можно рассмотреть первое условие корректности, это условие существования решения для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$. Это условие не выполняется, существует бесконечно много непрерывных функций, для которых решения нет. Рассмотрим это утверждение на примере.

Пусть ядро $K(x, t)$ таково, что существует производная $K'_x(x_0, t)$, $x_0 \in (a, b)$ для любого $t \in [a, b]$. Тогда существует производная

$$\left(\int\limits_a^b K(x, t) y(t)\, dt \right)' \Bigg|_{x = x_0}$$

для любой непрерывной функции $y(x)$. Теперь в качестве $f(x)$ возьмем непрерывную функцию такую, что $f'(x)|_{x=x_0}$ не существует. Тогда очевидно, что решение интегрального уравнения (3) не существует.

В работе рассмотрен пример невыполнения третьего условия корректности задачи, то есть, условия устойчивости решения.

Этот пример показывает, что решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода неустойчиво относительно возмущения функции $f(x)$. Поэтому, уравнение (3) принадлежит к классу некорректно поставленных задач или, как принято для краткости говорить, является некорректной задачей.

Метод квадратур для уравнения Фредгольма 2 рода.

Найдем приближенное решение уравнения (2) методом квадратур. Построим на отрезке $[a, b]$ сетку с узлами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Запишем уравнение (2) в узлах сетки:

$$y(x_i) - \lambda \int\limits_a^b K(x_i, s) y(s)\, ds = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Аппроксимируем интегралы в равенствах (6) конечными суммами с помощью одной из квадратурных формул:

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Здесь $y_i = \widetilde{y}(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, $K_{ij} = K(x_i, x_j)$, $\widetilde{y}$ – приближение к искомой функции y, A_j – веса квадратурной формулы.

Решение системы уравнений (7) дает приближенные значения искомой функции в узлах x_i. По ним с помощью интерполяции можно построить приближенное решение интегрального уравнения (2) на всем отрезке $[a, b]$.

Пусть $\lambda = 1$, а сетка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – равномерная с шагом h. Используем квадратурную формулу трапеций. Тогда система линейных алгебраических уравнений (7) примет следующий вид:

$$y_i - h\sum_{j=1}^{n}\omega_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

где $\omega_1 = \omega_n = \frac{1}{2}$, $\omega_j = 1$ при $j = 2, 3, \ldots, n-1$.

Метод последовательных приближений для уравнения Фредгольма 2 рода.

Рассмотрим решение (2), методом последовательных приближений. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, записав его в следующим виде

$$y(x) = \lambda\int\limits_a^b K(x,t)y(s)\,ds + f(x). \tag{9}$$

Для начала (9) построим итерационный процесс. Пусть $y_0(x)$– начальное приближение искомой функции $y(x)$. Предположим что $y_0(x) = 0$. Подставим $y_0(x)$ в правую часть уравнения (9), и получим выражение для первого приближения:

$$y_1(x) = \lambda\int\limits_a^b K(x,t)y_0(s)\,ds + f(x).$$

Подставляя найденное приближение в подынтегральное выражение в (9), найдем следующее приближение

$$y_2(x) = \lambda\int\limits_a^b K(x,t)y_1(s)\,ds + f(x).$$

Аналогично, подставляя найденное на k-ой итерации приближение в подынтегральное выражение, найдем $k+1$ приближение

$$y_{k+1}(x) = \lambda\int\limits_a^b K(x,t)y_k(s)\,ds + f(x) \quad k = 0, 1, 2 \ldots.$$

Метод квадратур для уравнение Фредгольма 1 рода.

Переделаем метод квадратур для уравнение Фредгольма 2 рода (2) для 1 рода (3). В данном случаи у нас будет отсутствовать слагаемое $y(x_i)$ перед интегралом.

Построим на отрезке $[a, b]$ сетку с узлами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Запишем уравнение (3) в узлах сетки:

$$\lambda \int_a^b K(x_i, s) y(s)\, ds = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Аппроксимируем интегралы в равенствах (10) конечными суммами с помощью одной из квадратурных формул:

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Здесь $y_i = \widetilde{y}(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, $K_{ij} = K(x_i, x_j)$, $\widetilde{y}$ – приближение к искомой функции y, A_j – веса квадратурной формулы.

Решение системы уравнений (11) дает приближенные значения искомой функции в узлах x_i. С помощью интерполяции можно построить приближенное решение интегрального уравнения (3) на всем отрезке $[a, b]$.

Пусть $\lambda = 1$, а сетка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – равномерная с шагом h. Используем квадратурную формулу трапеций. Тогда система линейных алгебраических уравнений (11) примет следующий вид:

$$h \sum_{j=1}^{n} \omega_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

где $\omega_1 = \omega_n = \frac{1}{2}$, $\omega_j = 1$ при $j = 2, 3, \ldots, n-1$.

Метод последовательных приближений для уравнение Фредгольма 1 рода.

Теперь рассмотрим метод квадратур для уравнение Фредгольма второго рода (2) для первого рода (3).

Пусть $K(x, s)$ – симметричное положительно определенное и (3) однозначно разрешимо.

Тогда последовательность $\{y_n(x)\}$, определяется рекуррентном соотношением

$$y_n(x) = y_{n-1}(x) + \lambda \left[f(x) - \int_a^b K(x,s) y_{n-1}(s)\, ds \right] \tag{13}$$
$$n = 0, 1, 2 \ldots,$$

где $0 < \lambda < 2\lambda_1$, λ_1 – наименьшее характеристическое число ядра $K(x,s)$, сходятся в среднем к решению уравнения (3).

В качестве примера уравнения Фредгольма первого рода в работе будет рассмотрено

$$\int_0^1 K(x,s) y(s)\, ds = \sin \pi x,$$

где

$$K(x,s) = \begin{cases} (1-x)s & 0 \le s \le x, \\ x(1-s) & x \le s \le 1. \end{cases} \tag{14}$$

Точное решение данного уравнения $y(x) = \pi \sin \pi x$.

В качестве примера уравнения Фредгольма второго рода в работе будет рассмотрено

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 y(s)\, ds = \sin \pi x. \tag{15}$$

Точное решение данного уравнения $y(x) = \sin \pi x + \frac{2}{\pi}$.

Для уравнения Фредгольма первого рода и второго рода написаны две программы, одна на основе метода квадратур и на основе метода последовательных приближений. Эти программы вычисляют приближенные решения для двух разных уравнений.

Заключение. В работе изучены численные методы решения интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода. Особое внимание уделено базовым методам. Написаны программы для нахождения приближенных решений уравнений Фредгольма.