МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики
наименование кафедры

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

наименование темы выпускной квалификационной работы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 - Прикладная математика и информатика
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Боровой Полины Андреевны
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф -м.н., профессор ________________ А. П. Хромов
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф -м.н., профессор ________________ С. И. Дудов
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2022

Введение. Бакалаврская работа посвящена изучению и исследованию спектральных свойств интегрального оператора с инволюцией. Отдельные дифференциальные уравнения с инволюцией известны уже давно.

Современные же исследования уравнений с различными видами инволюций привели к большому количеству результатов: изучены вопросы корректности постановок задач, качественные свойства решений, разрешимость как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнений в частных производных, спектральные задачи. К необходимости исследования таких операторов приводят различные задачи квантовой физики, механики и пр.

Для операторов с инволюцией спектральные вопросы исследовались А.П. Хромовым и его учениками: достигнуто много результатов как для интегральных операторов с инволюцией в верхнем пределе, интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях или имеющими скачки производных на диагоналях, так и для функционально-дифференциальных операторов. Рассматривались классические вопросы спектральной теории (о равносходимости, о суммируемости средних Рисса и базисности по Риссу, достаточные условия сходимости ряда Фурье по с.п.ф к заданной функции).

Исследованию дифференциального оператора с инволюцией посвящены работы с инволюцией посвящены так же работы М. Ш. Бурлуцкой, где результаты были получены с помощью метода Фурье. Поэтому тема бакалаврской работы является актуальной.

Цели работы. Цели работы:

1) овладеть теоретическими знаниями;

2) получить результаты общего характера о свойствах интегрального оператора с инволюцией;

3) освоить основные свойства данного оператора;

4) разобрать примеры операторов с различными видами инволюции.

Задачи. Задачами данной работы являются изучение понятия инволюции и ее различных видов, изучение свойств интегрального оператора с инволюцией, а так же рассмотрение простейших примеров

Структура работы. Бакалаврская работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованных источников и приложений.

В первой главе работы приводятся основные понятия и определения, необходимые для изложения материала. Приводится классификация вида инволюций и кратко излагается история вопроса.

Во второй главе работы изучается оператор интегрирования с инволюцией, имеющей степенную особенность.

В третьей главе рассматривается интегральный оператор с негладкой инволюцией.

В четвертой главе рассматривается теорема равносходимости для оператора с инволюцией.

Наконец, в Приложениях приводятся код программы, написанные на C++, представляющая собой разложение произвольной функции $f(x) \in L[0,1]$ в ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора.

В конце приводится список литературы, которая была использована в написании данной работы.

Основное содержание работы. Функция f называется инволюцией, если

$$f(f(x)) = x \,\forall\, x \in \mathcal{D}(f),$$

где $\mathcal{D}(f)-$ область определения функции $f(x)$.

Другими словами, инволюцией называется преобразование, которое является обратным самому себе.

Если f – инволюция, то имеют место следующие соотношения:

1. $\forall\ a:\ f^{-1}(a) = f(a)$;

2. $\forall\ a:\ f(f(a)) = a$;

3. $\forall\ a\ \exists\ b:\ f(a) = b \wedge f(b) = a$.

В работе изучаются операторы вида

$$Ly = JP(y) + Q(y), \tag{1}$$

где P, Q - обыкновенные дифференциальные операторы с общей областью определения, заданные на конечном отрезке $[a, b]$, а $J-$ оператор инволюции, заданный функцией φ.

Здесь под оператором инволюции мы понимаем оператор вида

$$(Jf)(x) = f(\varphi(x)),$$

где φ– дифференцируемая биекция отрезка $[a,\ b]$ на себя, причём композиция $\varphi \circ \varphi$ суть тождественный оператор, а сама функция φ не совпадает с тождественной. Такие функции часто называют функциями Карлемана.

Далее предполагаем, что операторы P и Q заданы дифференциальными выражениями вида (α– произвольное комплексное число)

$$Py = y^n(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n(x)y(x), \tag{2}$$

$$Qy = \alpha y^{(m)}(x) + q_1(x)y^{(m-1)}(x) + \ldots + q_m(x)y(x) \tag{3}$$

и системой краевых условий ($s = \max(n, m)$)

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{s-1} a_{jk}y^{(k)}(a) + b_{jk}y^{(l)}(b) = 0, j = 1, 2, \ldots, s. \tag{4}$$

Всюду далее предполагаем, что коэффициенты p_j и q_j дифференциальных выражений принадлежат пространству $L^\infty[a, b]$, то есть являются измеримыми существенно ограниченными функциями. Будем также полагать, что инволюция является достаточно гладкой функцией.

Наиболее сложным в исследовании спектральных свойств оператора (1) оказывается случай $n \geq m$.

Второй случай $n < m$ при естественных дополнительных ограничениях может быть рассмотрен с помощью общей теории возмущений операторов с дискретным спектром.

В известных работах о свойствах корневых функций дифференциальных операторов с инволюцией рассматривались только случаи операторов (1), где P и Q порождаются дифференциальными выражениями первого или второго порядка.

Для операторов P, Q первого порядка задача достаточно подробно изучена.

Для случая второго порядка в основном рассматривались конкретные задачи для операторов

$$Ly = -y''(-x)$$

или

$$Ly = y''(-x) + \alpha y(x).$$

Наиболее общий результат для оператора второго порядка получен в работе, где спектральные задачи рассматривались с нелокальными, интегральными краевыми условиями.

Случай первый ($n > m$).

Сначала рассмотрим случай, когда $L = JP$, то есть оператор Q, определённый выражением (3), равен нулю. Здесь P мы понимаем как оператор, заданный дифференциальным выражением (2) и краевыми условиями (4), то есть $Py = P(y)$ на области определения

$$\mathcal{D}(L) = \left\{ y \in W^{2n,2}[a,b] \mid, \quad U(y) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

где линейные формы $U(y)$ определены в (4), а $W^{2n,2}[a,b]$ - пространство Соболева, состоящее из функций y, имеющих классическую производную $y^{(2m)} \in L^2[a,\ b]$. Запись Py используется для обозначения действия оператора P на функцию $y \in \mathcal{D}(P)$, а запись $P(y)$ используется для обозначения действия дифференциального выражения (2) на функцию $y \in W^{2n,2}[a,\ b]$.

Для обыкновенных дифференциальных операторов важнейшую роль играет понятие регулярности краевых условий (или регулярности оператора, порождённого соответствующими краевыми условиями), предложенное Дж. Биркгофом. Здесь вводится понятие регулярности для дифференциальных операторов с инволюцией. В случае $\varphi(x) = x$ определение формулируется иначе, нежели у Биркгофа, но нетрудно показать, что в этом случае оба определения эквивалентны.

Рассматривается оператор P_0, порождённый дифференциальным выражением $P_0(y) = y^{(n)}$ и краевыми условиями (4) при $s = n$. Дифференциальное выражение $JP_0\left(JP_0(y)\right)$ является обычным дифференциальным выражением без инволюции.

Определение 1. Краевыми условиями назовём регулярными для оператора $L = JP$ (и соответствующий оператор L назовём регулярным), если краевые условия

$$U_j(y) = 0,\ U_j\left(JP_\sigma y\right) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

являются регулярными для обычного дифференциального выражения $2n$-го порядка; иными словами, если $L_0^2 = \left(JP_0\right)^2$ является регулярным по Биркгофу обыкновенным дифференциальным оператором.

Теорема 1. *Пусть инволюция $\varphi : [a, b] \to [a, b]$ такова, что $\varphi \in W^{n,2}[a,\ b]$. Если краевые условия (4) регулярны для оператора $L = JP$, то система его собственных и присоединённых функций образует безусловный базис со скобками в пространстве $L_2[a,\ b]$. Это утверждение остаётся верным для оператора ния $Q(y)$ меньше n. Утверждение сохраняется, если постоянная α в (3) заменена на функцию $\alpha = \alpha(x) \in L^\infty[a,\ b]$.*

Основная идея доказательства этой теоремы состоит в следующем. Сначала изучается оператор $L_0 = JP_0$. В случае регулярных краевых условий оператор L_0^2 оказывается регулярным обыкновенным дифференциальным оператором (без инволюции), а потому его корневые функции образуют безусловный базис со скобками в пространстве $L_2[a,\ b]$, причём в скобки заключаются не более двух корневых функций.
Корневые подпространства операторов L_0 и L_0^2 совпадают, поэтому утверждение о безусловной базисности сохраняется для оператора L_0.
Далее используются методы теории возмущений операторов с дискретным спектром. В случае, когда невозмущённый оператор L_0 самосопряжён, утверждение теоремы получается сразу из результатов в силу того, что порядок дифференциального выражения $L - L_0$ не превышает $n - 1$.
В данном случае оператор L_0 не является самосопряжённым, поэтому нужно модифицировать методы для операторов, свойства которых схожи самосопряжённым или нормальным. При изучении операторов с инволюцией полезную роль играют следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть точка c - неподвижная точка инволюции ϕ. Тогда задача Коши для оператора $L = JP$ с произвольными заданными в этой точке начальными условиями*

$$y(c) = \xi_0, \quad y'(c) = \xi_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(c) = \xi_{n-1}$$

имеет решение, причём единственное.

Функция $\Delta(\rho)$ определяется стандарным образом

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & \ldots & U_1(y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(y_1) & \ldots & U_n(y_n) \end{vmatrix},$$

где $y_j = y_j(x, \rho), j = 1, 2, \ldots, n,-$ фундаментальная система решений уравнения $L(y) = \rho^n y$ (в силу леммы 1 такая система существует).

Лемма 2. *Пусть $\Delta(\rho)$ и $\Theta(\rho)-$ характеристические определители задач $(L - \rho'')\, y = 0u \left(L^2 - \rho^{2n}\right) y = 0$ соответственно. Тогда с точностью до ненулевого множсителя при $\rho \neq 0$ справедливо равенство*

$$\Theta(\rho) = \rho^{n^2} \Delta(\rho) \Delta\left(e^{i\pi/n}\rho\right).$$

Если μ^2 - собственное значение оператора L^2, то по меньшей мере одно из чисел μ или $-\mu$ является собственным значением оператора L. При этом жордановы цепочки операторов L^2 и L, отвечающие собственным значениям μ^2 и μ или $-\mu$ не совпадают. Но соответствующие корневые подпростанства (линейные оболочки канонических систем жордановых цепочек) совпадают. Точнее, справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Если $\mathcal{N}$ - корневое подиространство оператора L^2, отвечающее собственному значению $\mu^2 \neq 0$, а $\mathcal{N}_\pm -$ корневые подпространства оператора L, отвечающие собственным значением $\pm\mu$ (одно из этих подпространств может быть нулевым), то $\mathcal{N} = \mathcal{N}_+ + \mathcal{N}_-$. Корневые подиространства операторов L и L^2, отвечающие нулевому собственному значению, также совпадают.*

Определение 2. Пусть коэффициенты p_j дифференциального выражения (2) и инволюция ϕ являются достаточно гладкими функциями. Оператор $L = JP$ будем называть почти регулярным порядка p (нормальным), если оператор L^2 является почти регулярным порядка p (нормальным). Далее получаем следующие утверждения:

Теорема 2. *Система корневых функций нормального оператора $L = JP$ образует полную и минимальную систему в пространствах $W_U^{k,2}$ при всех $k = 0, 1, \dots, n$, где $W_U^{k,2}$ - подпространство функций $f(x) \in W^{k,2}$, удовлетворяющих нормированным краевым условиям (4), имеющих порядок $\leq k - 1$.*

Теорема 3. *Пусть оператор $L = JP$ почти регулярен порядка $p \leq n$. Тогда система его корневых функций образует безусловный базис со скобками в пространствах $W_U^{k,2}$ $\forall$ $k = p, p{+}1, \dots, n$, относительно нормы пространств $W_U^{k-p,2}$ соответственно, то есть любая функция $f \in W_U^{k,2}$ при $p \leq k \leq n$ разлагается в безусловно сходящийся по норме пространства $W_U^{k-p,2}$ ряд по корневым функциям оператора L.*

Второй случай ($n > m$).

Пусть $m > n$ и $\alpha \neq 0$. Если краевые условия (4) регулярны для дифференциального выражения $Q_0 = \alpha y^{(m)}$, то оператор Q, порождённый обыкновенным дифференциальным выражением $Q(y)$ и теми же краевыми условиями, также регулярен, а потому его корневые функции образуют безусловный базис со скобками. Получается следующий результат.

Теорема 4. *Пусть $m > n$ и $\alpha \neq 0$. Пусть оператор*

$$\frac{1}{\alpha} Q_0 y = y^{(m)},$$

порождённый краевыми условиями (4), регулярен. Тогда корневые функции оператора $L = JP + Q$ образуют безусловный базис со скобками в пространстве $L_2[a,\ b]$.

Случай третий ($n = m$).

В этом случае мы будем предполагать, что $b = -a$, а инволюция ϕ является отражением $\varphi(x) = -x$. Обозначим через L_0 оператор, порождённый выражением

$$L_0(y) = y^{(m)}(-x) + \alpha y^{(n)}(x)$$

и краевыми условиями (4). Далее считаем, что $\alpha \neq \pm 1$.

Необходимо определить понятие регулярности для оператора L_0.

Рассмотрим оператор

$$R_0 y = y^{(n)}(-x) + (-1)^{n+1} \alpha y^{(n)}(x), \mathcal{D}\left(R_0\right) = \mathcal{D}\left(L_0\right).$$

Тогда оператор

$$\begin{gathered} S_0(\rho) y = \left(L_0 - \rho^n I\right)\left(R_0 + \rho^n I\right) y = L_0 R_0 y + \rho^n \left(L_0 - R_0\right) y - \rho^{2n} y = \\ = (-1)^n \left(1 - \alpha^2\right) y^{(2n)}(x) + \alpha\left(1 + (-1)^n\right) \rho^n y^{(n)}(x) - \rho^{2n} y(x) \end{gathered}$$

является обыкновенным дифференциальным оператором, зависящим от спектрального параметра ρ, т.е. является пучком обыкновенных дифференциальных операторов.

Для него рассматривается следующая спектральная задача:

$$S_0(\rho) y = 0, \quad U_j(y) = 0, \quad U_j\left(R_v y\right) = 0, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Для пучков обыкновенных дифференциальных операторов известны понятия регулярности, почти регулярности и нормальности. Понятие регулярности для операторов с инволюцией в рассматриваемом случае можно ввести исходя из определения регулярности для пучка S_0.

Определение 3. Оператор $L = JP + Q$ в случае $n = m$ назовём регулярным, если регулярен пучок обыкновенных дифференциальных операторов S_0.

Теорема 5. *Система корневых функций регулярного оператора $L = JP + Q$ образует безусловный базис в пространстве $L^2[-a, a]$.*

Доказательство этой теоремы проводится сначала для оператора

$$L_0 = JP_0 + Q_0$$

главной части оператора L. Потом используются результаты теории возмущений. Утверждение теоремы для оператора L_0 получается на основе тождеств

$$S_0(\rho) = (L_0 - \rho^n I)\,(R_0 + \rho^n I)\,, (L_0 - \rho^n I)^{-1} = \\ = (R_0 + \rho^n I)\, S_0^{-1} \quad (\rho).$$

Далее используются результаты работы о представлении функции Грина резольвенты $S_0^{-1}(\lambda)$ и техника этой работы, позволяющая оценить безусловную сходимость подходящих проекторов Рисса на корневые подпространства оператора L_0.

Заключение. В работе изучены спектральные свойства интегрального оператора с инволюцией. Особое внимание уделено некоторым видам: инволюции, имеющей степенную особенность; интегральному оператору с негладкой инволюцией. Написана программа для разложений произвольной функции $f(x) \in L[0,1]$ в ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора.