МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ В СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 - Прикладная математика и информатика
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Лаврова Романа Олеговича
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
доцент, д.ф-м.н., доцент ____________ В.В. Корнев
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
Зав.каф.,д.ф-м.н., профессор ____________ С.И. Дудов
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2022

ВВЕДЕНИЕ

Целью бакалаврской работы является описание нового обоснования метода Фурье в смешанной задаче для гиперболического уравнения без почленного дифференцирования решения смешанной задачи, которое используется в классическом обосновании метода.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, 4 разделов, заключения, списка использованных источников и приложения с программой.

В **первом** разделе излагается метод Фурье при решении линейных смешанных задач для уравнений в частных производных произвольного порядка с 2 независимыми переменными при самосопряженном обыкновенном дифференциальном операторе в общем виде.

Во **втором** разделе работы рассматриваются асимптотические оценки собственных функций оператора Штурма- Лиувилля, которые в дальнейшем будут использоваться для обоснования нового метода в случае однородного уравнения гиперболического типа.

В **третьем** разделе получены неулучшаемые условия разрешимости смешанных задач для однородного уравнения гиперболического типа с нулевой начальной скоростью.

В **четвертом** разделе описывается программа, которая выявляет, является ли заданное число собственным значением спектральной краевой задачи.

В **приложении** дан код программы, написанной на языке Python, который строит вспомогательные графики. С помощью визуализации можно легко определить, является ли заданное число собственным значением. Программа написана с использованием дополнительных библиотек как numpy, matplotlib, pylab, sympy.

Основное содержание работы. В пером разделе рассмотривается неоднородное уравнение в частных производных с двумя независимыми переменными x и t в общем виде:

$$L_x u(x,t) + H_t u(x,t) = f(x,t), \tag{1.1}$$

где L_x и H_t - обыкновенные дифференциальные операторы.

Однородные граничные условия на искомую функцию $u(x,t)$ при $x = 0$ и $x = \pi$ зададим в виде

$$U_i u(0,t) + V_i u(\pi,t) = 0 \qquad \forall t \in [0,T] \qquad (i = 1,2,..,k) \tag{1.2}$$

Начальные данные Коши при $t = 0$ задаются естественным образом:

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = \varphi_j(x) \quad (j = 0,1,2,\ldots,m-1) \tag{1.3}$$

Теперь сформулируем следующую смешанную задачу в замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}$: Найти функцию

$$u(x,t) \in C^{k,m}(\overline{Q}) \tag{1.4}$$

удовлетворяющую в обычном смысле уравнению (1.1) в открытом прямоугольнике Q, а также граничным (1.2) и начальным (1.3) условиям.

В ходе определённых манипуляций со сходящимся в $L^2(G)$ рядом Фурье и при предположении о существовании решения смешанной задачи (1.1) - (1.4) получим следующую теорему:

Теорема 1.1 Решение смешанной задачи (1.1) - (1.4), если оно существует, единственно и представляется равномерно сходящимся по x в $\overline{Q}$ рядом Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) y_n(x)$$

Далее будем рассматривать формальный функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) y_n(x), \tag{1.24}$$

в котором $y_n(x)$ и $T_n(t)$ однозначно определяются решениями краевой задачи о собственных значениях.

На основании первой теоремы можно высказать некоторые суждения о свойствах сходимости ряда (1.24) : либо функциональный ряд (1.24) является решением смешанной задачи (1.1)- (1.4) и в таком случае сходится равномерно по x в $\overline{Q}$, либо он не является искомым решением, но тогда решение данной задачи вообще не существует.

Можно определить взаимосвязь существования решения смешанной задачи от свойств ряда (1.24). Свойства данного ряда зависят от исходных данных (от функций $q_s(x)$,$p_r(t)$, $f(x,t)$,$\varphi_j(x)$). Сформулируем данную связь в виде теоремы.

Теорема 1.2 Решение смешанной задачи существует тогда и только тогда, когда функции $q_s(x)$, $p_r(t)$, $f(x,t)$ и $\varphi_j(x)$ таковы, что сумма $S(x,t)$ ряда (1.24) принадлежит классу $C^{k,m}(\overline{Q})$ и удовлетворяет условиям:

$$U_i S(0,t) + V_i S(\pi,t) \qquad (i = 1, 2, ..., k) \tag{1.26}$$

Во втором разделе изложены вспомогательные сведения, необходимые для нового обоснования метода Фурье.

Для начала рассмотрим систему Штурма Лиувилля

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \omega^2 y(x), \tag{2.1}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{2.2}$$

с вещественным потенциалом

$$q(x) \in C[0,\pi]. \tag{2.3}$$

В дальнейшем понадобится представление решения системы Штурма-Лиувилля отрезком ряда Неймана, поэтому сейчас выведем это представление.

Пусть $y(0,\omega) = 0$ - некоторое вещественное решение дифференциального уравнения (2.1) с одним начальным условием

$$y(0,\omega) = 0 \tag{2.4}$$

При $\omega \neq 0$ решение задачи (2.1), (2.2), (2.3) можно представить в интегральной форме Коши:

$$y(x,\omega) = \sin\omega x + \frac{1}{\omega}\int_0^x K_1(x,\tau,\omega)y(\tau,\omega)d\tau,$$

Построим данное решение по методу последовательных приближений в виде ряда Неймана по степеням ω. Получаем:

$$y(x,\omega) = \sin\omega x + \sum_{n=1}^{\infty}\omega^{-n}\int_0^x K_n(x,\tau,\omega)\sin\omega\tau d\tau \tag{2.5}$$

Данный ряд можно представить в виде :

$$y(x,\omega) = \sin\omega x + \sum_{=1}^{m-1}\omega^{-i}\int_0^x K_1(x,\tau,\omega)\sin\omega\tau d\tau + R_m(x,\omega). \tag{2.6}$$

Далее получаем первую форму асимптотического выражения для собственных функций.

При выводе основных асимптотических формул будет необходима оценка решения $y(x,\omega)$ системы (2.1), (2.2), (2.3) с точностью до величин порядка ω^{-4}. Используя представление решения системы Штурма-Лиувилля отрезком ряда Неймана, полученное ранее, и преобразуя в нем интегралы, получим искомую форму асимптотического выражения собственной функции в виде:

$$y\left(x,\omega_n\right)=\sin\omega_n x+\frac{1}{\omega_n}g\left(\omega_n,x\right)+$$
$$+\frac{1}{\omega_n^2}\left[F_1\left(\omega_n,x\right)\sin\omega_n x+F_2\left(\omega_n,x\right)\cos\omega_n x\right]+$$
$$+\frac{1}{\omega_n^3}\left[P_1\left(\omega_n,x\right)\sin\omega_n x+P_2\left(\omega_n,x\right)\cos\omega_n x\right]+O\left(\omega_n^{-4}\right)$$

После можно вывести асимптотические формулы, связывающие коэффициенты Фурье гладкой функции $f(x)$. Если рассматривать три класса функций $f(x)$ такие как: $C_0^2[0,\pi]$, $C_0^1[0,\pi]$,$C[0,\pi]$, то искомые коэффициенты Фурье выражаются в следующем виде:

$$F_n=\int_0^\pi f(x)y_n(x)dx$$
$$f_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nxdx$$

Для всех трёх классов получаем:

При $C_0^2[0,\pi]$ искомая функция имеет вид:

$$F_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(f_n+\frac{\omega_n}{n^2}\right)+\frac{\gamma_n}{n^3}\quad\forall f(x)\in C_0^2[0,\pi],$$

При $C_0^1[0,\pi]$:

$$F_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}f_n+\frac{\gamma_n}{n^2}\quad\forall f(x)\in C_0^1[0,\pi],$$

При $C[0,\pi]$:

$$F_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}f_n+\frac{\gamma_n}{n}\quad\forall f(x)\in C[0,\pi].$$

В 3 разделе рассматривается однородное гиперболическое уравнение и сформулируем теорему о явном виде неулучшаемых условий разрешимости смешанных задач для такого уравнения.

Для начала рассмотрим однородное гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + q(x)u(x,t) = 0 \tag{3.1}$$

с вещественным потенциалом

$$q(x) \in C[0,\pi] \tag{3.2}$$

относительно искомой функции $u(x,t)$ удовлетворяющей граничным условиям

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.3}$$

и начальным данным Коши

$$u(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x). \tag{3.4}$$

Поставим следующую смешанную задачу:

$$u(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \tag{3.5}$$

удовлетворяющую в обычном смысле уравнению (3.1) в открытом прямоугольнике Q, а также граничные (3.3) и начальным (3.4) условиям.

Из постановки смешанной задачи (3.1) -(3.5) следует необходимость ряда условий на начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Теорема 3.1 Решение $u(x,t)$ смешанной задачи (3.1) -(3.5) существует и единственно тогда и только тогда, когда начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям

$$\varphi(x) \in C_0^2[0,\pi].$$

$$\psi(x) \in C_0^1[0,\pi].$$

$$\varphi''(0) = \varphi''(\pi)$$

При этом оно дается функциональным рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\Phi_n \cos\omega_n t + \frac{\psi_n}{\omega_n}\sin\omega_n t\right) y_n(x) \tag{3.13}$$

Будем представлять ряд в виде двух составляющих: регулярной и сингулярной и используем ранее полученные оценки нормированной собственной функции.

Для доказательства теоремы нужно проверить гладкость регулярной составляющей и суммирование сингулярной составляющей. Свойства гладкости составляющих ряда сформулируем с помощью 2 лемм:

Лемма 3.1

Компоненты регулярной составляющей

$$\sum_{i=1}^{3} S_i(x,t)$$

из суммы

$$S(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + \sum_{i=1}^{3} S_i(x,t),$$

которые даются формулами

$$S_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\Theta_n}{n^2}\left(\cos\omega_n t - \cos nt\right) + \frac{\psi_n}{n}\left(\sin\omega_n t - \sin nt\right)\right]\sin nx,$$

$$S_2(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\Theta_n}{n^2}\cos\omega_n t + \frac{\psi_n}{n}\sin\omega_n t\right) h_n(x),$$

$$S_3(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{n^3}\left(\cos\omega_n t + A_n\sin\omega_n t\right) y_n(x),$$

принадлежат классу $C^2(\overline{Q})$.

Лемма 3.2 Сингулярную составляющую суммы

$$S(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + \sum_{i=1}^{3} S_i(x,t),$$

представленную формулами

$$u_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_n}{n^2} \cos nt \sin nx,$$

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n}{n} \sin nt \sin nx,$$

можно суммировать к явным функциям, принадлежащим классу $C^2(\overline{Q})$.

Доказав данные леммы, придём к конечному результату:

$$S(x.t) \in C^2(\overline{Q})$$

Докажем достаточность теоремы: так как (3.1) -(3.5) является частным случаем смешанной задачи (1.1) - (1.4), то можем воспользоваться достаточными условиями разрешимости из Теоремы 1.2.

Далее устанавливаем, что коэффициенты ряда (1.24) совпадают с коэффициентами ряда (3.13) Этот факт даёт утверждать, что (3.13) является формальным решением (3.1) -(3.5).

Используя граничные условия и тот факт, что

$$B(\overline{Q}) \equiv C^2(\overline{Q}),$$

получаем, что искомое решение $u(x,t) \equiv S(x,t)$. Утверждение о его представлении рядом (3.13) очевидно. Это завершает доказательство теоремы.

В 4 разделе дано описание программы, которая позволяет проверить, является ли заданное число собственным значением краевой задачи. Рассмотрен тестовый пример.

Заключение. В ходе работы был описан новый подход в обосновании метода Фурье для линейной смешанной задачи, который позволяет ослабить условия разрешимости на начальные положения на примере смешанной задачи для однородного уравнения гиперболического типа. В основе этого подхода лежит утончённая асимптотика собственных значений и собственных функций соответствующей задачи Штурма-Лиувилля.

В дополнение к вышеуказанному, была написана программа, позволяющая определить, является ли заданное число собственным значением краевой задачи. Работоспособность программы была проверена на тестовом примере.