МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

**Резольвентный подход в методе Фурье
для волнового уравнения в несамосопряженном случае**

название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента ____4____ курса _____411_____ группы

направления__1.03.02 - Прикладная математика и информатика____________

код и наименование направления

__________________механико-математического факультета_______________

наименование факультета

__________________Пасечника Владимира Николаевича__________________

фамилия, имя, отчества

Научный руководитель

Доцент, к.ф.-м.н., доцент__	____________________	__Курдюмов В.П.__
должность, ученая степень, уч. звание	дата, подпись	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

Зав.кафедрой, д.ф-м.н., професор_____________	_______________	_____Дудов С.И.__
должность, ученая степень, уч. звание	дата, подпись	инициалы, фамилия

Саратов 2022 г.

Введение. Метод Фурье является одним из важнейших методов решения смешанных задач. Его строгое обоснование впервые дал В.А.Стеклов. Это обоснование операется на докозательство равномерной сходимости формального ряда и рядов, получающихся из него почленным дифференцированием нужное число раз. Недостатком этого метода является завышенная гладкость начальных данных. Резольвентный подход впервые предложен А.П.Хромовым, и идеи А.Н.Крылова позволили в настоящей работе получить классическое решение задачи

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \ t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

$$u'_x(0,t) + \beta u'_x(1,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$\alpha u(0,t) + u(1,t) = 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u'_t(x,0) = 0 \tag{4}$$

где $\varphi(x) \in C^2\,[0,1]$ и $q(x) \in C[0,1]$ и комплекснозначные, $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ – комплексные числа, при минимальных требованиях гладкости на $\varphi(x)$.

Целью данной бакалаврской работы является по этой задаче с помощью резольвентного подхода А.П. Хромова и рекомендаций А.Н.Крылова по ускорению сходимости рядов Фурье получить классическое решение при минимальном требовании гладкости для $\varphi(x)$.

Данная бакалаврская работа состоит из пяти глав:

1. Постановка задачи
2. Вспомогательные утверждения
    - 2.1 Задача Штурма-Лиувилля и метод Фурье
    - 2.2 Асимптотика собственных значений для оператора n-го порядка
    - 2.3 Область S и T
    - 2.4 Асимптотические формулы для решения уравнения $l(y) + \rho^n y = 0$
    - 2.5 Нормировка краевых условий
    - 2.6 Регулярные краевые условия
    - 2.7 Асимптотическое поведение собственных значений

2.8 Операторы преобразования

3. Преобразование формального решения

4. Исследование задачи (1)–(4)

4.1. Исследование функции $u_0(x,t)$

4.2. Исследование функции $u_2(x,t)$

5. Классическое решение задачи (1)–(4)

Так же написана программа по исследованию дифференциальных уравнений для оператора n-го порядка, которая определяет регулярность краевых условий.

Основное содержание работы. Во введение формулируется цель бакалаврской работы и решаемые задачи.

В первой главе произведена постановка смешанной задачи (1)-(4)

Во второй главе приводятся вспомогательные утверждения, которые включают задачу Штурма-Лиувилля, связанную по методу Фурье со смешанной задачей, приводятся ассимптотические формулы собственных значений произвольных n, понятие оператора преобразования.

В третьей главе проводится преобразование формального решения.

Метод Фурье в применении к (1)-(4) связан со спектральной задачей для оператора L:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x),$$
$$U_1(y) = y'(0) + \beta y'(1) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0,$$
$$U_2(y) = \alpha y(0) + y(1) = 0.$$

Задача (1)–(4) изучается при дополнительном условии $1 + \alpha\beta \neq 0$. Это условие необходимо и достаточно для регулярности краевых условий операторов L и L_0, где

$$L_0 y = -y''(x), \quad y'(0) + \beta y'(1) = 0, \quad \alpha y(0) + y(1) = 0.$$

Оператор L_0 в общем случае несамосопряженный. Более того, если взять $\alpha = 0$, $\beta = 1$ и вместо x взять $\xi = 1 - x$, то придем к оператору, который замечателен тем, что все его собственные значения двукратные и для каждого собственного значения имеем одну собственную и одну присоединенную функцию. В результате резольвентного подхода получаем классическое решение задачи (1)–(4) при минимально необходимых требованиях на $\varphi(x)$: $\varphi(x) \in C^2\,[0,1]$ и

$$\varphi'(0) + \beta\varphi'(1) + \alpha_1\varphi(0) + \beta_1\varphi(1) = 0,$$

$$\alpha\varphi(0) + \varphi(1) = 0)$$

$$\alpha\varphi''(0) + \varphi''(1) - \alpha q(0)\varphi(0) - q(1)\varphi(1) = 0.$$

Теорема 1. Собственные значения оператора L образуют две последовательности $\lambda_n = \rho_n^2$ и $\lambda'_n = \rho_n'^2$ $(\lambda = \rho^2, Re\rho \geq 0)$ и имеют асимптотики

$$p_n = 2n\pi + \xi_1 + \varepsilon_n,\ \ p'_n = 2n\pi + \xi_2 + \varepsilon'_n,\ \ \ n = n_0, n_0 + 1, \ldots,$$

где $\xi_{1,2} = -iln\left(d \pm \sqrt{d^2 - 1}\right),\ d = \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta},\ \ \ \varepsilon_n = o(1),\ \varepsilon'_n = o(1)$

Обозначим через $\tilde{\gamma}_n$ объединение двух непересекающихся окружностей $\{\rho \,\big|\, |\rho - (2n\pi + \xi_j)| = \delta\}, j = 1, 2$, если $\xi_1 \neq \xi_2$, или один такой контур, если $\xi_1 = \xi_2$ и $\delta > 0$ достаточно мало. При этом n_0 таково, что внутри каждого $\tilde{\gamma}_n$ находятся ρ_n и $\rho'_n n$ при $n \geq n_0$. Пусть γ_n – образ $\tilde{\gamma}_n$ в λ –плоскости. Далее, пусть $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$– резольвента оператора L, где E – единичный оператор, λ – спектральный параметр. Формальное решение задачи (1)– (4) по методу Фурье возьмем в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} (R_\lambda\varphi)\cos ptd\lambda - \sum_{n\geq n_0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} (R_\lambda\varphi)\cos ptd\lambda \quad (5)$$

где $\gamma_r = \{\lambda \big| |\lambda| = r\}, r > 0$, фиксировано и таково, что внутри γ_r находятся все собственные значения оператора L, не попавшие в γ_n при $n \geq n_0$.

Если все собственные значения простые, то очевидно, что обычное формальное решение задачи (1)–(4) по методу Фурье можно представить в виде (5). Если же есть кратные собственные значения, то (5) мы будем называть *формальным решением задачи* (1)–(4) в этом случае. Теперь в (5) не фигурируют явно ни собственные значения, ни собственные функции.

Лемма 1. Пусть μ_0 – фиксированное число, не являющееся собственным значением оператора L, и γ – один из контуров γ_r, γ_n при $n \geq n_0$ (μ_0 вне γ). Тогда

$$\int_\gamma (R_\lambda\varphi) \cos\rho t d\lambda = \int_\gamma \frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\gamma g) \cos\rho t d\lambda$$

Где μ_0 находится вне всех контуров и $g = (L - \mu_0 E)\varphi$

Далее, будем считать, что μ_0 не является также и собственным значением оператора L_0, и n_0 таково, что все собственные значения и оператора L_0 при $n \geq n_0$ попадают лишь в γ_n. Тогда имеет смысл представление

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_r} + \sum_{n\geq n_0}\int_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda^0 g) \cos\rho t d\lambda\,, \tag{6}$$

где $R_\lambda^0 = (L_0 - E)^{-1}$.

По лемме 1, примененной к R_λ^0 вместо R_λ и $\varphi_1 = R_{\mu_0}^0 g$ вместо φ, формула (6) принимает вид

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left(R_\lambda^0\varphi_1\right) \cos\rho t d\lambda\,,$$

то есть $u_0(x,t)$ есть формальное решение следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ u(x,0) = \varphi_1(x),\ u_t'(x,0) = 0, \tag{7}$$

$$u_x'(0,t) + \beta u_x'(1,t) = \alpha u(0,t) + u(1,t) = 0, \tag{8}$$

которую мы назовем *эталонной.*

Относительно формального решения справедлива

Теорема 2. Формальное решение $u(x,t)$ задачи (1)– (4) представимо в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda^0 g) \cos\rho t d\lambda$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{1}{\lambda-\mu_0}\left(R_\lambda g - R_\lambda^0 g\right) cos\,\rho t d\lambda\,,$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}\left(R_\lambda g - R_\lambda^0 g\right) cos\,\rho t d\lambda.$$

В четвертой главе исследуются функции $u_0(x,t)$ и $u_2(x,t)$.

Теорема 7. Функция $u_0(x,t)$ есть классическое решение эталонной задачи

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \qquad u_t'(x,0) = 0,$$

$$u_x'(0,t) + \beta u_x'(1,t) = \alpha u(0,t) + u(1,t) = 0.$$

Лемма 12. Ряд $u_2(x,t)$ и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по x и по t два раза, сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [-T,T]$ при любом фиксированном $T > 0$.

В пятой главе дается классическое решение смешанной задачи (1)-(4).

Теорема 8. Формальное решение $u(x,t)$ задачи (1)–(4) является классическим решением при $\varphi(x) \in C^2\,[0,\pi]$ и выполнении условий (5).

Заключение. В данной бакалаврской работе с помощью резольвентного подхода А.П.Хромова и рекомендаций А.Н.Крылова по ускорению сходимости рядов Фурье, было полученно классическое решение задачи (1)-(4) при минимальном требовании гладкости по $\varphi(x)$.

Было преобразовано формальное решение в виде $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t)$ и исследованны функции $u_0(x,t)$ и $u_2(x,t)$.

Так же была реализована программа по исследованию дифференциальных уравнений для оператора n-го порядка, которая определяет регулярность краевых условий.