

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

**Обобщенная задача Рэлея для степенной неньютоновской жидкости с
нелинейной теплопроводностью**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Трофимовой Оксаны Павловны

Научный руководитель
старший преподаватель

В.С. Кожанов

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент

Ю.А. Блинков

Саратов 2022

Введение. Явления и процессы, связанные с течением жидкостей и газов, имеют большое теоретическое и прикладное значение. Теория пограничного слоя является одним из основных разделов механики жидкости. Первоначально прилипание жидкости в теоретической гидромеханике не учитывалось, его влияние считалось пренебрежимо малым. А гидромеханика на практике была мало применима, так как ее результаты не получали экспериментального подтверждения.

На значение прилипания жидкости и на то, что оно может влиять на характер течения и его закономерности, указывалось еще в гидродинамике Д. Бернулли. Пуассон, Стокс и Навье показывают, что из-за вязкости жидкости граничные условия вблизи стенок должны измениться. Идея о влиянии вязкости жидкости только вблизи стенок позднее была высказана в работе Д. И. Менделеева.

Понятие пограничного слоя впервые ввел Людвиг Прандтль в статье 12 августа 1904 года на Международном конгрессе математиков в Гейдельберге.

Введение пограничного слоя позволило упростить уравнение, моделирующее течение жидкости/газа, путем разделения течения на две области: область тонкого слоя вблизи тела, которую и называют пограничным слоем, где важную роль играет трение, и область вне этой оболочки, где трением можно пренебречь. Это помогло преодолеть математические трудности и теоретически исследовать фрикционные течения жидкости, а также позволило получить наглядное объяснение роли вязкости в задаче о сопротивлении.

В гидродинамике задача Рэлея также известная как первая задача Стокса, представляет собой задачу определения потока, создаваемого внезапным движением бесконечно длинной пластины из состояния покоя. Это считается одной из простейших нестационарных задач, которая имеет точное решение уравнения Навье-Стокса. Кейт Стюартсон исследовал импульсивное движение полубесконечной пластины.

Среди методов решения задач теории пограничного слоя можно выделить аналитические и численные методы. Метод сращиваемых асимптотических разложений или метод многих масштабов, а также методы построения авто-модельных приближений можно отнести к аналитическим методам. А комби-

нация методов Ньютона и Рунге-Кутты 4-го порядка относится к численным методам решения.

Целью работы является изучение характеристик пограничного слоя и исследование зависимости распределения скорости движения жидкости, ускоряющейся из состояния покоя нагретой пластиной, от закона движения пластины.

Структура бакалаврской работы. Работа состоит из двух разделов, описывающих этот процесс в разных средах – ньютоновской и неньютоновской жидкостях.

В первом подразделе первого раздела производится физическая постановка задачи, приводится схема изучаемого течения вблизи поверхности тела.

Во втором подразделе первого раздела формулируется система уравнений и граничные условия, описывающие течение в пограничном слое ньютоновской жидкости.

В третьем подразделе первого раздела осуществляется переход к автомодельным переменным и формулируется краевая задача в автомодельных переменных.

В четвертом подразделе первого раздела рассматривается алгоритм численного решения и приводится его блок-схема.

В пятом подразделе первого раздела представлены результаты расчетов в виде графиков и проанализированны.

В первом подразделе второго раздела формулируется система уравнений и граничные условия, описывающие течение в пограничном слое неньютоновской жидкости.

Во втором подразделе второго раздела осуществляется переход к автомодельным переменным и формулируется краевая задача в автомодельных переменных.

В третьем подразделе второго раздела представлены результаты расчетов в виде графиков и проанализированны.

Основное содержание работы. Рассмотрим пространство, заполненное вязкой несжимаемой жидкостью. В жидкость вертикально помещена бесконечная плоская пластина. До некоторого момента времени $t_0 = 0$, принимаемого за начальный, пластина и жидкость покоятся и имеют одинаковую

температуру $T_\infty = \text{const}$. В момент времени, следующий за начальным, пластина мгновенного приобретает температуру $T_w = \text{const} > T_\infty$ и начинает ускоренное движение параллельно своей плоскости со скоростью $U_w(t) = At^\alpha$ ($A = \text{const}, \alpha = \text{const} > 0$) в соответствии с рисунком 1. Вследствие действия сил вязкости вблизи поверхности пластины образуется пограничный слой.

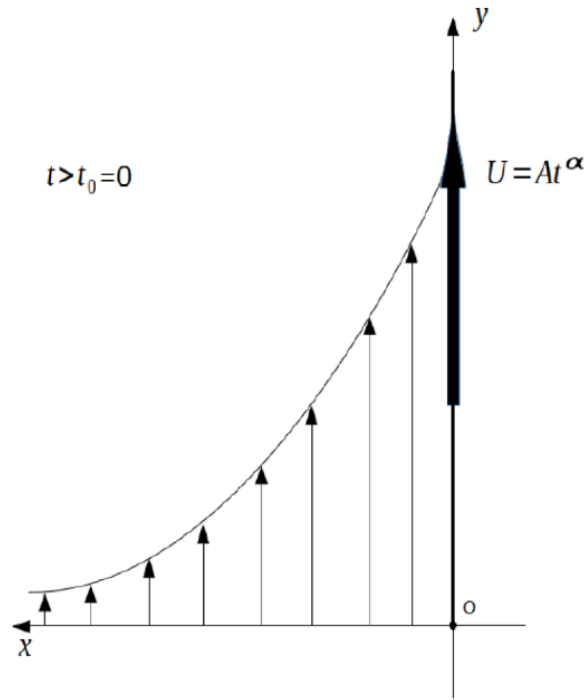


Рисунок 1 — Расчетная схема в момент времени $t > 0$

Чтобы описать начальную стадию неустановившегося течения неньютоновской жидкости в пограничном слое вблизи ускоряющейся нагретой бесконечной плоской пластины с учётом тепла, которое выделяется вследствие работы сил вязкости, необходимо решить систему уравнений

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho g \beta (T - T_\infty) + \mu^* n \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda^* m \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|^{m-1} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu^* \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (2)$$

где u — продольная (вдоль оси Oy) составляющая скорости жидкости, T — температура жидкости, t — время, y — координата.

Граничные условия на поверхности пластины имеют вид

$$\text{при } t > 0, \quad y = 0 : \quad u = U_w(t) = At^\alpha, \quad T = T_w. \quad (3)$$

Граничные условия вдали от пластины («на бесконечности») имеют вид

$$\text{при } t > 0, \quad y \rightarrow \infty : \quad u \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty. \quad (4)$$

Начальные условия:

$$\text{при } t = 0, \quad y \geq 0 : \quad u = 0, \quad T = T_\infty. \quad (5)$$

Переходим к автомодельным переменным.

Введем масштабные величины. Обозначим через τ — масштаб времени, через U — масштаб скорости в направлении оси y , через Y — масштаб длины в направлении оси y , \bar{T} — масштаб температуры:

$$t = \tau \bar{t}, \quad (6)$$

$$u = U \bar{u}, \quad (7)$$

$$y = Y \bar{y}. \quad (8)$$

$$T = T_\infty - (T_w - T_\infty) \bar{T}, \quad (9)$$

$$u = A(\tau \bar{t})^\alpha \bar{u}. \quad (10)$$

Путем перехода к автомодельным переменным и дальнейшим преобразованиям, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left| \frac{df}{d\eta} \right|^{n-1} \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{(\alpha(n-1)+1)\eta}{(n+1)} \frac{df}{d\eta} - \alpha f(\eta) + \mathbf{Gr}\theta(\eta) = 0, \quad (11)$$

$$\left| \frac{d\theta}{d\eta} \right|^{\alpha n^2 + n - \alpha - 1} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + \mathbf{Pr} \left[\frac{\eta}{2} \frac{d\theta}{d\eta} + \mathbf{Ec} \left| \frac{df}{d\eta} \right|^{n+1} \right] = 0, \quad (12)$$

где $\mathbf{Gr} = \frac{g\beta(\Delta T)_w}{At^{\alpha-1}}$ – число Грасгофа, $\mathbf{Ec} = \frac{A^2 t^{2\alpha}}{c(\Delta T)_w}$ – число Эккерта, $\mathbf{Pr} = \frac{\rho c}{\lambda^* m} \left(\nu^* n A^{n-1} t^{\frac{(\alpha(n-1)+1)(n+1)-m-1}{n+1}} \right)^{\frac{m+1}{n+1}}$ – число Прандтля, $f(\eta)$ – автомодельный представитель функции $u(y, t)$, $\theta(\eta)$ – автомодельный представитель температуры, $\eta = y \left(\frac{\rho}{\mu^* n A^{n-1} t^{\alpha(n-1)+1}} \right)^{\frac{1}{n+1}}$ – независимая автомодельная переменная.

С граничными условиями:

$$\text{При } \eta = 0 : f(0) = 1, \quad \theta(0) = 1. \quad (13)$$

$$\text{При } \eta \rightarrow \infty : f(\eta) \rightarrow 0, \quad \theta(\eta) \rightarrow 0. \quad (14)$$

Таким образом, в автомодельных переменных решение задачи о движении жидкости под действием ускоряющейся из состояния покоя нагретой вертикальной пластины, сводится к решению задачи (11) и (12) с граничными условиями (13)-(14).

При $m = n = 1$ получаем частный случай задачи (11)-(12) – случай ньютоновской жидкости.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) (11) и (12) являются ОДУ 2-го порядка относительно функций f и θ . Для частного интегрирования этих уравнений на полуинтервале $[0, \infty)$ необходимо наличие двух

начальных условий, а именно при $\eta = 0$ необходимо знать

$$f(0) = f_{00} = 1, \quad \left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta=0} = f_{01}, \quad \theta(0) = \theta_{00} = 1, \quad \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} = \theta_{01}.$$

Нам известны только два условия f_{00} и θ_{00} . Значение f_{01} и θ_{01} необходимо определить. Они должны быть такими, чтобы при $\eta \rightarrow \infty$ выполнялось условие (14).

При реализации численного интегрирования вместо полуинтервала $[0, \infty)$ рассматриваем интервал $[0, \eta_m)$, где η_m – достаточно большое число. Условие (14) при этом заменяется условием:

$$\text{при } \eta = \eta_m (\eta_m \gg 1) : f(\eta_m) = f_{0m} = 0, \quad \theta(\eta_m) = \theta_{0m} = 0. \quad (15)$$

Обозначим f_{0m}^i – значение функции f при $\eta = \eta_m$, а θ_{0m}^i – значение функции θ при $\eta = \eta_m$, полученные при некоторых значениях f_{01}^i и θ_{01}^i , где i – номер итерации.

Разности

$$N_1^i(f_{01}^i, \theta_{01}^i) = f_{0m}^i - f_{0m} = f_{0m}^i$$

и

$$N_2^i(f_{01}^i, \theta_{01}^i) = \theta_{0m}^i - \theta_{0m} = \theta_{0m}^i$$

будем называть невязками.

Пусть

$$R^i = \sqrt{(N_1^i(f_{01}^i))^2 + (N_2^i(f_{01}^i))^2}.$$

Тогда решение задачи сводится к минимизации значения R^i , то есть при некотором значении $i = M$ необходимо получить $R^i < \varepsilon$, где ε – точность решения.

Для решения краевой задачи для ОДУ (11)-(12), был применен метод пристрелки, представляющий собой комбинацию метода Ньютона и метода

Рунге-Кутты 4-го порядка. Блок-схема решения, представлена в соответствии с рисунком 2.

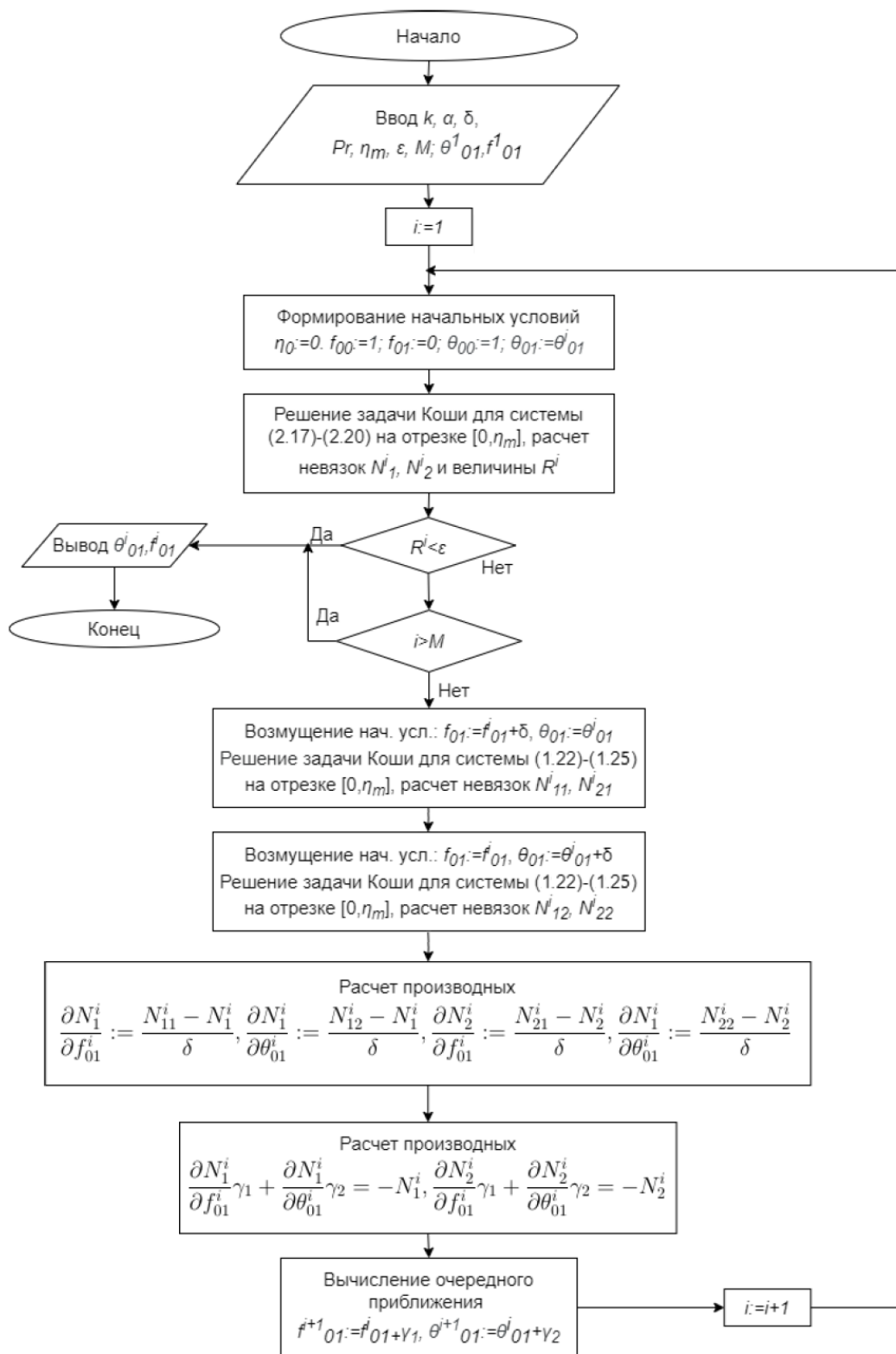


Рисунок 2 — Блок-схема

В соответствии с рисунком 3, с рисунком 4, с рисунком 5, с рисунком 6, с рисунком 7, с рисунком 8 представлено исследование параметров n и α и их влияние на динамический и температурные пограничные слои для неньютоновской жидкости.

Для каждой четверки параметров (α , \mathbf{Ec} , \mathbf{Gr} , \mathbf{Pr}) получена серия кривых для трех значений параметра n : $n = 0.8, 1, 1.2$. При $n = 1$ получаем случай ньютоновской жидкости.

Из представленных ниже графиков видно, что параметры n и α влияют на толщину пограничного слоя, а именно: при увеличении параметров, толщина пограничного слоя уменьшается.

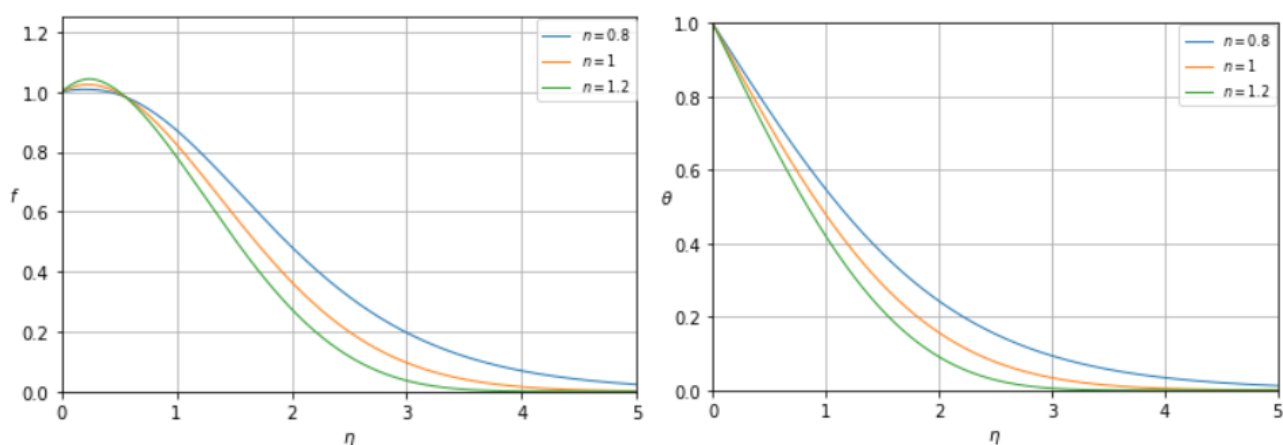


Рисунок 3 — $\alpha = 0$, $\mathbf{Gr} = 1$, $\mathbf{Pr} = 1$, $\mathbf{Ec} = 0.001$, Рисунок 4 — $\alpha = 0$, $\mathbf{Gr} = 1$, $\mathbf{Pr} = 1$, $\mathbf{Ec} = 0.001$

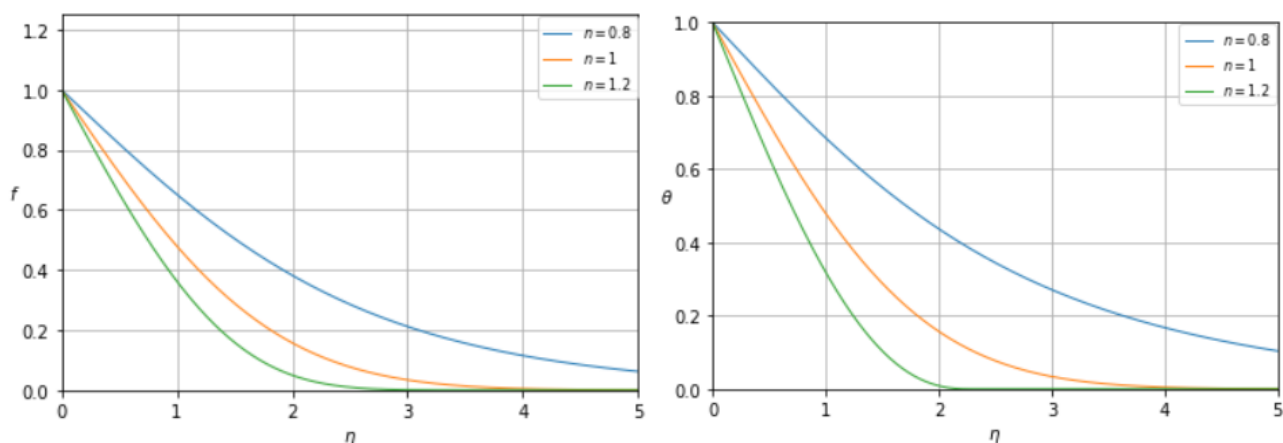


Рисунок 5 — $\alpha = 1$, $\mathbf{Gr} = 1$, $\mathbf{Pr} = 1$, $\mathbf{Ec} = 0.001$, Рисунок 6 — $\alpha = 1$, $\mathbf{Gr} = 1$, $\mathbf{Pr} = 1$, $\mathbf{Ec} = 0.001$

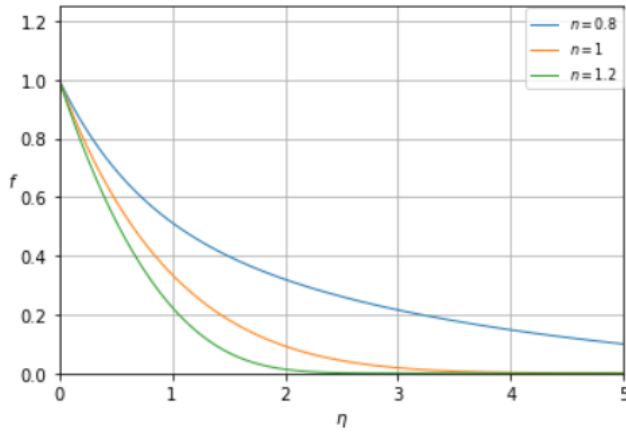


Рисунок 7 — $\alpha = 2$, $\mathbf{Gr} = 1$, $\mathbf{Pr} = 1$, $\mathbf{Ec} = 0.001$

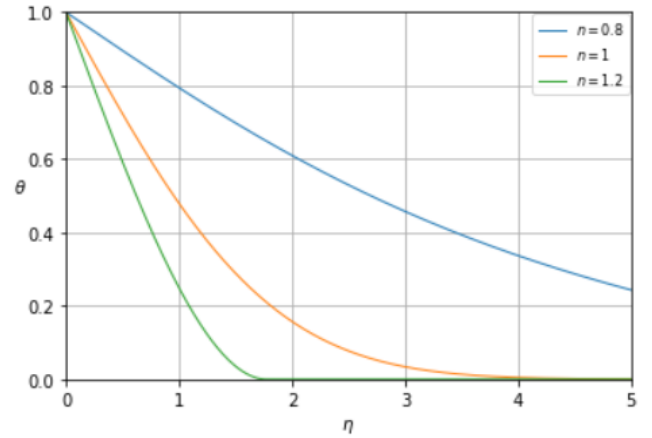


Рисунок 8 — $\alpha = 2$, $\mathbf{Gr} = 1$, $\mathbf{Pr} = 1$, $\mathbf{Ec} = 0.001$

В соответствии с рисунком 9, с рисунком 10 представлено исследование числа Грасгофа и его влияние на динамический и температурные пограничные слои для неньютоновской жидкости.

Из представленных ниже графиков видно, что, как и в случае ньютоновской жидкости число Грасгофа для каждого набора параметров (α , n , \mathbf{Ec} , \mathbf{Pr}) существует критическое значение $\mathbf{Gr}_{кр}$. Если $\mathbf{Gr} < \mathbf{Gr}_{кр}$, то изменение компоненты $u(y, t)$ монотонно.

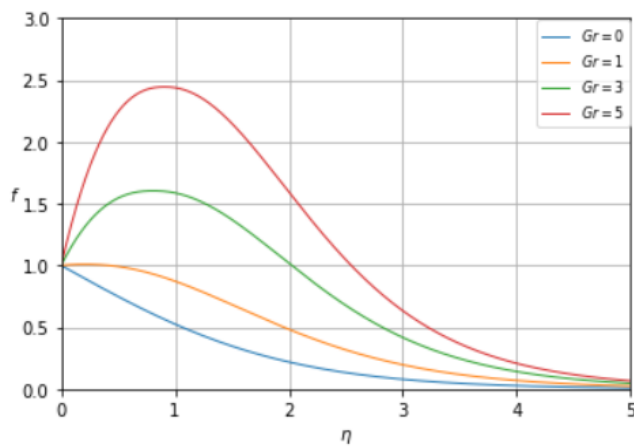


Рисунок 9 — $\alpha = 0$, $\mathbf{Ec} = 0.001$, $n = 0.8$, $\mathbf{Pr} = 1$

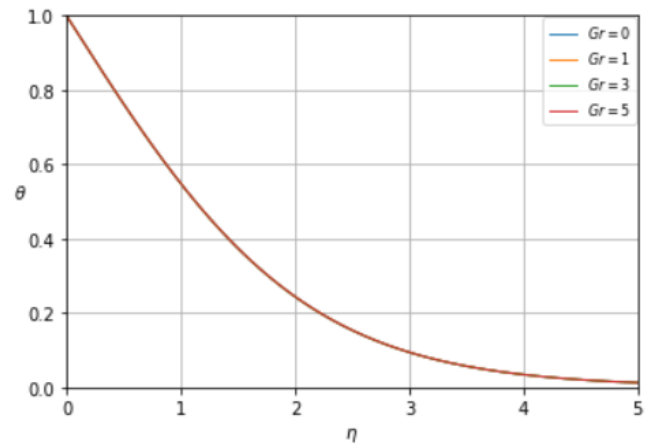


Рисунок 10 — $\alpha = 0$, $\mathbf{Ec} = 0.001$, $n = 0.8$, $\mathbf{Pr} = 1$

В соответствии с рисунком 11, с рисунком 12 представлено исследование числа Эккерта и его влияние на динамический и температурные пограничные слои для неньютоновской жидкости.

Из представленных ниже графиков видно, что число Эккерта не влияет на характер изменения температуры, но влияет на толщину пограничного слоя: при увеличении числа Эккерта, толщина пограничного слоя увеличивается.

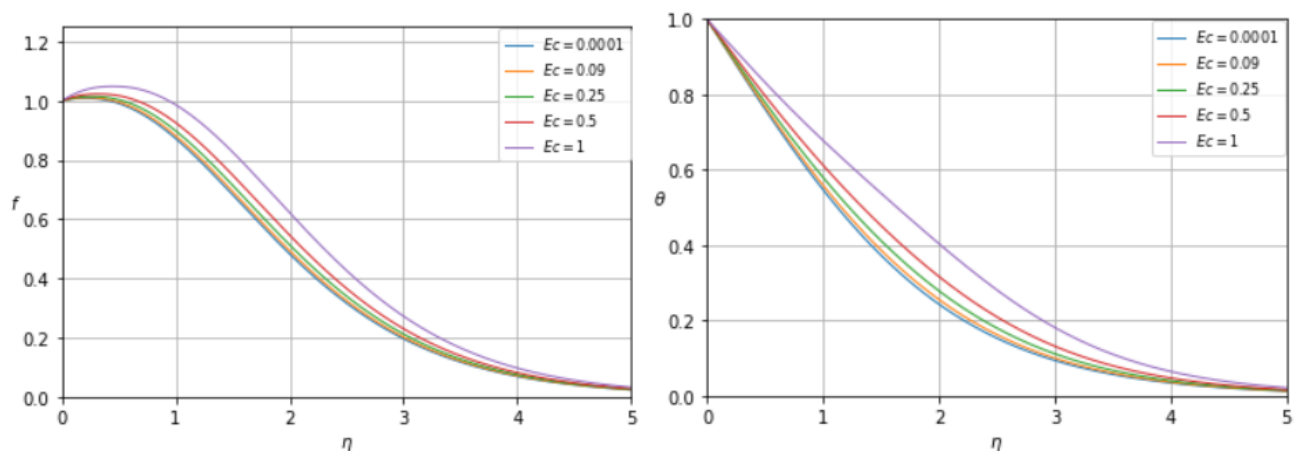


Рисунок 11 — $\alpha = 0$, $n = 0.8$, $\mathbf{Gr} = 1$, Рисунок 12 — $\alpha = 0$, $n = 0.8$, $\mathbf{Gr} = 1$,
 $\mathbf{Pr} = 1$ $\mathbf{Pr} = 1$

В соответствии с рисунком 13, с рисунком 14 представлено исследование числа Прандтля и его влияние на динамический и температурные пограничные слои для неньютоновской жидкости.

Из представленных ниже графиков видно, что при увеличении числа Прандтля толщина пограничного слоя уменьшается.

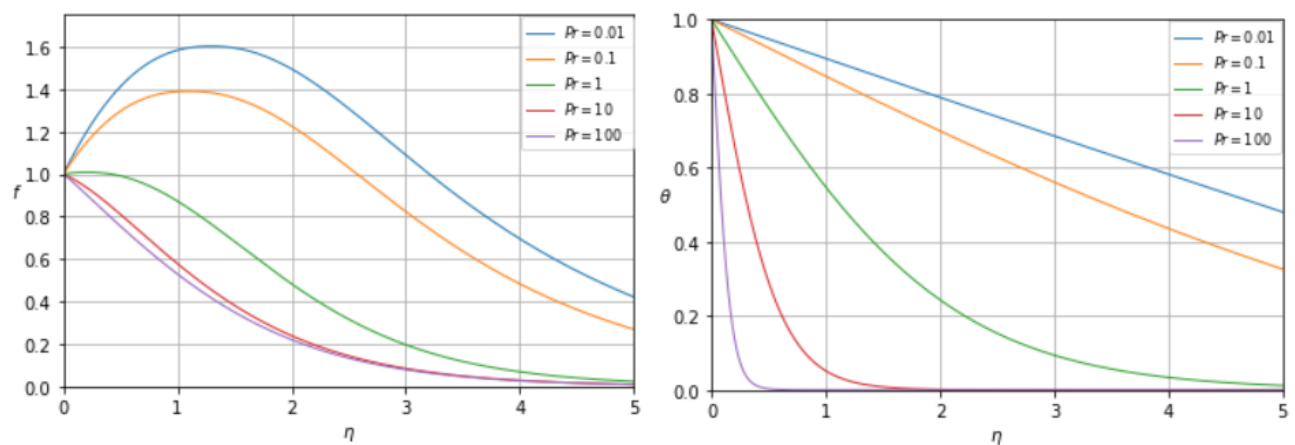


Рисунок 13 — $\alpha = 0$, $n = 0.8$, $\mathbf{Gr} = 1$, Рисунок 14 — $\alpha = 0$, $n = 0.8$, $\mathbf{Gr} = 1$,
 $\mathbf{Ec} = 0.001$ $\mathbf{Ec} = 0.001$

Заключение. Решена задача о пограничном слое, порождаемого в жидкости ускоряющейся из состояния покоя нагретой пластиной.

Выполнен переход к автомодельным переменным и сформулирована задача в автомодельных переменных. После ряда преобразований, решение задачи было сведено к решению системы ОДУ (11), (12) с граничными условиями (13) при $\eta = 0$ и (14) при $\eta = \infty$.

Для решения задачи был применен численный метод, представляющий собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге-Кутты 4-ого порядка.

Для решения поставленных задач была написана программа на языке Python.

Решение задачи представлено в виде графиков для распределения безразмерных скорости и температуры.