

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

Конвективный пограничный слой с поверхностью разрыва вблизи

передней критической точки затупленного тела

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Макеевой Алены Алексеевны

Научный руководитель  
старший преподаватель

В.С. Кожанов

Зав. кафедрой  
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент

Ю.А. Блинков

Саратов 2022

**Введение.** Гипотеза аэродинамического пограничного слоя была впервые выдвинута Людвигом Прандтлем в статье, представленной 12 августа 1904 года на третьем Международном конгрессе математиков в Гейдельберге, Германия. Он упрощает уравнения течения жидкости, разделяя поле потока на две области: одну внутри пограничного слоя, где преобладает вязкость и создается большая часть сопротивления, испытываемого граничным телом; и одну вне пограничного слоя, где вязкостью можно пренебречь без существенного влияния на решение. Это позволяет получить решение замкнутой формы для течения в обеих областях путем существенного упрощения полных уравнений Навье–Стокса.

Данная гипотеза, с одной стороны, позволила получить физически очень наглядное объяснение важной роли вязкости в проблеме сопротивления, а с другой стороны, дала возможность преодолеть математические трудности и тем самым открыла путь теоретическому исследованию течений жидкости с трением. Она применима и к другим жидкостям (помимо воздуха) с умеренной или низкой вязкостью, таким как вода. Для случая, когда существует разность температур между поверхностью и объемной жидкостью, установлено, что большая часть теплопередачи движение к телу и от него происходит в окрестности скоростного пограничного слоя. Это опять же позволяет упростить уравнения в поле течения вне пограничного слоя. Распределение давления по всему пограничному слою в направлении, нормальном к поверхности (например, аэродинамическому профилю), остается относительно постоянным по всему пограничному слою и является таким же, как и на самой поверхности.

Актуальность работы. Исследования теории пограничного слоя в настоящее время являются актуальными, так как большинство ученых все чаще и чаще обращают свое внимание на поиск новых методов и способов управления пограничным слоем. Несмотря на свою относительную тонкость, пограничный слой очень важен для инициирования процессов динамического взаимодействия потока и тела. Пограничный слой определяет аэродинамическое сопротивление и подъемную силу летательного аппарата или потери энергии для потока жидкости в каналах (в данном случае гидродинамический пограничный слой, поскольку существует также тепловой пограничный

слой, который определяет термодинамическое взаимодействие теплопередачи).

Цель работы. Целью данной работы является изучение конвективного пограничного слоя с поверхностью разрыва вблизи передней критической точки затупленного тела. Предполагается, что в вязкую теплопроводную несжимаемую жидкость с температурой  $T_\infty$  вертикально помещено тело. Через проницаемую поверхность тела вдувается жидкость с параметрами, *отличными* от параметров окружающей среды. Скорость вдува жидкости  $V_y(x) = Ax^\alpha$  ( $A = \text{const}$ ,  $\alpha = \text{const} > 0$ ). Температура вдуваемой жидкости распределена вдоль поверхности тела по закону  $T = T_\infty + Bx$  ( $B = \text{const}$ ).

Практическая значимость работы. Предложенное решение поставленной задачи имеет прикладной характер, его можно использовать в изучении реальных потоков жидкостей, как ньютоновских, так и неньютоновских.

Структура бакалаврской работы. Бакалаврская работа состоит из обозначения и сокращений, определений, введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложения.

В обозначениях и сокращениях вводится физический смысл констант, участвующих в описании течения жидкостей.

В определениях представлены основные термины рассматриваемой области.

Во введении ставятся цели и задачи по изучению пограничного слоя, а также описание содержания бакалаврской работы.

Первая глава посвящена физической постановке задачи.

Во второй главе производится математическая постановка задачи.

В третьей главе осуществляется переход от исходной системы, описывающей движение неньютоновских жидкостей, к системе в автомодельных переменных.

В четвертой главе представлено рассуждение на тему решения полученной системы численными методами.

В пятой главе производится анализ результатов.

**Основное содержание работы.** Было осуществлено построение схемы течения жидкостей, в которой условно обозначается через  $\delta$  двух-

слойное пограничное течение. Первой полагается та среда, к которой относится внешний слой, а второй — среда, к которой относится внутренний.

Была поставлена задача изучения поля скорости и температуры в пограничных слоях при различных значениях параметров окружающих сред.

Когда окружающая и вдуваемая жидкости являются степенными неньютоновскими жидкостями с нелинейной теплопроводностью, течение в температурном пограничном слое при условии пренебрежения теплом, которое выделяется вследствие работы сил вязкости, описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\rho_i \left( u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) = \mu_i^* n_i \left| \frac{\partial u_i}{\partial y} \right|^{n_i-1} \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \rho_i g \beta_i (T_i - T_\infty) a_i x, \quad (2)$$

$$\rho_i c_i \left( u_i \frac{\partial T_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) = \lambda_i^* m_i \left| \frac{\partial T_i}{\partial y} \right|^{m_i-1} \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2}, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

где параметры с индексом «1» относятся к жидкости из внешнего течения  $\delta(x) \leq y < \infty$ , а с индексом «2» — к жидкости, вдуваемое через поверхность тела  $0 \leq y < \delta(x)$ ,  $y_\delta = \delta(x)$  — уравнение границы раздела жидкостей.

Граничные условия на поверхности тела имеют вид

$$\text{при } y = 0 : u_2 = 0, v_2 = Ax^\alpha, T_2 = T_\infty + Bx. \quad (4)$$

Граничные условия на границе раздела жидкостей имеют вид

$$\begin{aligned} \text{при } y = y_\delta : u_1 = u_2, v_1 = v_2, \quad \mu_1^* \left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|^{n_1-1} \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \mu_2^* \left| \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|^{n_2-1} \frac{\partial u_2}{\partial y}, \\ T_1 = T_2, \quad \lambda_1^* \left| \frac{\partial T_1}{\partial y} \right|^{m_1-1} \frac{\partial T_1}{\partial y} &= \lambda_2^* \left| \frac{\partial T_2}{\partial y} \right|^{m_2-1} \frac{\partial T_2}{\partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

Граничные условия вдали от тела («на бесконечности») имеют вид

$$\text{при } y \rightarrow \infty : u_1 \rightarrow 0, T_1 \rightarrow T_\infty \quad (6)$$

Переход к автомодельным переменным был осуществлен при помощи формул

$$x = L\bar{x}, \quad y = Y\bar{y}, \quad u_i = U\bar{u}_i, \quad v_i = V\bar{v}_i, \quad T_i = T_\infty + BL\bar{T}_i; \quad (7)$$

и функций тока

$$\psi_i = \Psi\bar{\psi}_i(\bar{x}, \bar{y}). \quad (8)$$

При этом, ввиду уравнения неразрывности (1), полагалась справедливой следующая связь функции тока со скоростью

$$u_i = \frac{\partial\psi_i}{\partial y}, \quad v_i = -\frac{\partial\psi_i}{\partial x}. \quad (9)$$

После введения формул (7), (8) был проведен ряд тождественных преобразований, которые позволили уменьшить присутствие масштаба  $L$  в функциях тока  $\psi_i$ . В результате были получены следующие соотношения

$$\begin{aligned} \psi_i &= \left( x^{6n_1-1} \nu_1^{*2} n_1^2 (g\beta_1 a_1 B)^{2n_1-1} \right)^{\frac{1}{2n_1+2}} \cdot \varphi_i(\eta), \\ \eta &= y^{-2n_1-2} \sqrt{x^{3n_1-4} \nu_1^{*2} n_1^2 (g\beta_1 a_1 B)^{n_1-2}}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\eta$  — независимая автомодельная переменная,  $\varphi_i(\eta)$  — искомая автомодельная переменная. Функция  $\varphi_i(\eta)$  называется автомодельным представителем функции тока  $\psi$  в области  $i$ .

Для получения дифференциальных уравнений, которые позволили бы определить функции  $\varphi_i(\eta)$ , были найдены частные производные от переменной  $\eta$ :

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{4 - 3n_1}{2n_1 + 2} \frac{\eta}{x}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \left( x^{3n_1-4} \nu_1^{*2} n_1^2 (g\beta_1 a_1 B)^{n_1-2} \right)^{-\frac{1}{2n_1+2}}, \quad (11)$$

а также компоненты вектора скорости из условий (9):

$$u_i = \left( x^{3n_1+3} (g\beta_1 a_1 B)^{n_1+1} \right)^{\frac{1}{2n_1+2}} \frac{d\varphi_i}{d\eta}, \quad (12)$$

$$v_i = -\frac{1}{2n_1+2} \left( x^{4n_1-3} \nu_1^{*2} n_1^2 (g\beta_1 a_1 B)^{2n_1-1} \right)^{\frac{1}{2n_1+2}} \times \\ \times \left( (6n_1-1)\varphi_i + (4-3n_1)\eta \frac{d\varphi_i}{d\eta} \right). \quad (13)$$

Решение для температуры искалось в виде:

$$T_i = T_\infty + Bx\vartheta_i(\eta), \quad (14)$$

где  $\vartheta_i(\eta)$  — автомодельный представитель температуры в  $i$ -том слое,  $\eta$  — введенная ранее независимая переменная.

После подстановки формул (9), (14) в уравнения (2), (3) была получена система

$$i = 1 : \quad (2n_1 + 2) \left| \frac{d^2\varphi_1}{d\eta^2} \right|^{n_1-1} \frac{d^3\varphi_1}{d\eta^3} + (6n_1 - 1)\varphi_1 \frac{d^2\varphi_1}{d\eta^2} - \\ - (3n_1 + 3) \left( \frac{d\varphi_1}{d\eta} \right)^2 + (2n_1 + 2)\vartheta_1 = 0, \quad (15)$$

$$\frac{d^2\vartheta_1}{d\eta^2} \cdot \left| \frac{d\vartheta_1}{d\eta} \right|^{\frac{7(n_1-1)}{6-n_1}} - \mathbf{Pr}_1^* \left( \vartheta_1 \frac{d\varphi_1}{d\eta} - \frac{6n_1-1}{2n_1+2} \varphi_1 \frac{d\vartheta_1}{d\eta} \right) = 0;$$

$$i = 2 : \quad (2n_1 + 2) \left| \frac{d^2\varphi_2}{d\eta^2} \right|^{n_1-1} \frac{d^3\varphi_2}{d\eta^3} + \left( (6n_1 - 1)\varphi_2 \frac{d^2\varphi_2}{d\eta^2} - \right. \\ \left. - (3n_1 + 3) \left( \frac{d\varphi_2}{d\eta} \right)^2 + (2n_1 + 2)\vartheta_2 \right) k^* = 0, \quad (16)$$

$$\frac{d^2\vartheta_2}{d\eta^2} \cdot \left| \frac{d\vartheta_2}{d\eta} \right|^{\frac{7(n_1-1)}{6-n_1}} - \mathbf{Pr}_2^* \left( \vartheta_2 \frac{d\varphi_2}{d\eta} - \frac{6n_1-1}{2n_1+2} \varphi_2 \frac{d\vartheta_2}{d\eta} \right) = 0,$$

где  $k^* = \frac{k_\rho}{k_{\mu^*}}$ ,  $k_{\mu^*} = \frac{\mu_1^*}{\mu_2^*}$ ,  $k_\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ ,  $\mathbf{Pr}_1^* = n_1^{\frac{5}{6-n_1}} \frac{6-n_1}{6n_1-1} \cdot \frac{c_1}{\lambda_1^*}$ .

$\mu_1^{*\frac{5}{6-n_1}} \rho_1^{\frac{1-n_1}{6-n_1}} (g\beta_1 a_1)^{\frac{2(n_1-1)}{6-n_1}} B^{\frac{5(1-n_1)}{6-n_1}}$  — число Прандтля во внешнем пограничном

слое,  $\mathbf{Pr}_2^* = \frac{6 - n_1}{6n_1 - 1} \cdot \frac{\rho_2 c_2}{\lambda_2^*} \cdot \nu_1^* n_1^{\frac{5}{6-n_1}} (g\beta_1 a_1)^{\frac{2(n_1-1)}{6-n_1}} B^{\frac{5(1-n_1)}{6-n_1}}$  — число Прандтля во внутреннем пограничном слое.

После подстановки формул (9), (14) в (4) были получены *граничные условия на поверхности тела в автомоделных переменных*:

$$\begin{aligned} \text{при } \eta = 0 : \quad \varphi_2(0) &= -A \frac{2n_1 + 2}{6n_1 - 1} \left( \nu_1^{*2} n_1^2 (g\beta_1 a_1 B)^{2n_1-1} \right)^{\frac{-1}{2n_1+2}}, \\ \vartheta_2(0) &= 1, \quad \left. \frac{d\varphi_2}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

После подстановки формул (9), (14) в (5) были получены *граничные условия на границе раздела жидкостей в автомоделных переменных*:

$$\begin{aligned} \text{при } \eta = \eta_\delta : \quad \varphi_1(\eta_\delta) &= \varphi_2(\eta_\delta), \\ \left. \frac{d\varphi_1}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_\delta} &= \left. \frac{d\varphi_2}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_\delta}, \quad \left. \frac{d^2\varphi_1}{d\eta^2} \right|_{\eta=\eta_\delta} = k_{\mu^*}^{-\frac{1}{n_1}} \left. \frac{d^2\varphi_2}{d\eta^2} \right|_{\eta=\eta_\delta}, \\ \vartheta_1(\eta_\delta) &= \vartheta_2(\eta_\delta), \quad \left. \frac{d\vartheta_1}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_\delta} = k_{\lambda^*}^{-\frac{6-n_1}{6n_1-1}} \left. \frac{d\vartheta_2}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_\delta}. \end{aligned} \quad (18)$$

После подстановки формул (9), (14) в (6) были получены *граничные условия вдали от тела («на бесконечности»)*:

$$\text{при } \eta \rightarrow \infty : \quad \left. \frac{d\varphi_1}{d\eta} \right|_{\eta=\infty} \rightarrow 0, \quad \vartheta_1(\infty) \rightarrow 0. \quad (19)$$

Таким образом, в автомоделных переменных решение задачи о естественной конвекции вблизи передней точки затупленного пористого тела сводится к решению краевой задачи для систем ОДУ (15), (16) с граничными условиями (17) при  $\eta = 0$ , (18) при  $\eta = \eta_\delta$  и (19) при  $\eta \rightarrow \infty$ .

Аналитически поставленную краевую задачу решить нельзя.

Для численного интегрирования полученных уравнений на полуинтервале  $[0, \eta_\delta)$  необходимо наличие пяти начальных условий, а именно при  $\eta = 0$

необходимо знать

$$\begin{aligned} \varphi_2(0) = \varphi_{200}, \quad \left. \frac{d\varphi_2}{d\eta} \right|_{\eta=0} = \varphi_{210}, \quad \left. \frac{d^2\varphi_2}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} = \varphi_{220}, \\ \vartheta_2(0) = \vartheta_{200}, \quad \left. \frac{d\vartheta_2}{d\eta} \right|_{\eta=0} = \vartheta_{210}. \end{aligned}$$

Поскольку значения  $\varphi_{220}$  и  $\vartheta_{210}$  неизвестны, они были определены методом пристрелки таким образом, что при  $\eta = \eta_\delta$  выполнялось условие (18), а при  $\eta \rightarrow \infty$  — условие (19).

При реализации численного интегрирования вместо полуинтервала  $[\eta_\delta, \infty)$  рассматривался сегмент  $[\eta_\delta, \eta_m]$ , где  $\eta_m$  — достаточно большое число.

Для решения краевой задачи для системы ОДУ (14) и (15) был применен метод, представляющий собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге-Кутты 4-го порядка.

В соответствии с рисунком 1, с рисунком 2, с рисунком 3 при различных значениях параметра  $n_1$  и фиксированной скорости вдува  $\varphi_{00}$  жидкости можно увидеть распределения безразмерных представителей продольных и поперечных составляющих скоростей. Наибольшему значению параметра  $n_1$  соответствуют наибольшая продольная и наименьшая поперечная составляющие скоростей жидкостей, таким образом зависимость величины  $\varphi$  является прямой, а величины  $\vartheta$  — обратной.

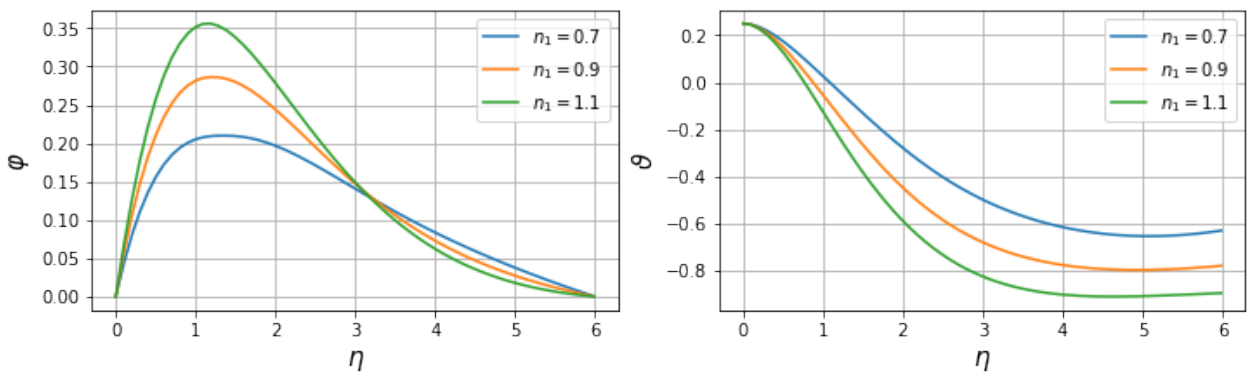


Рисунок 1 — Распределение безразмерных представителей продольных и поперечных составляющих скоростей жидкостей при фиксированном значении параметра  $\varphi_{00} = -0.2$



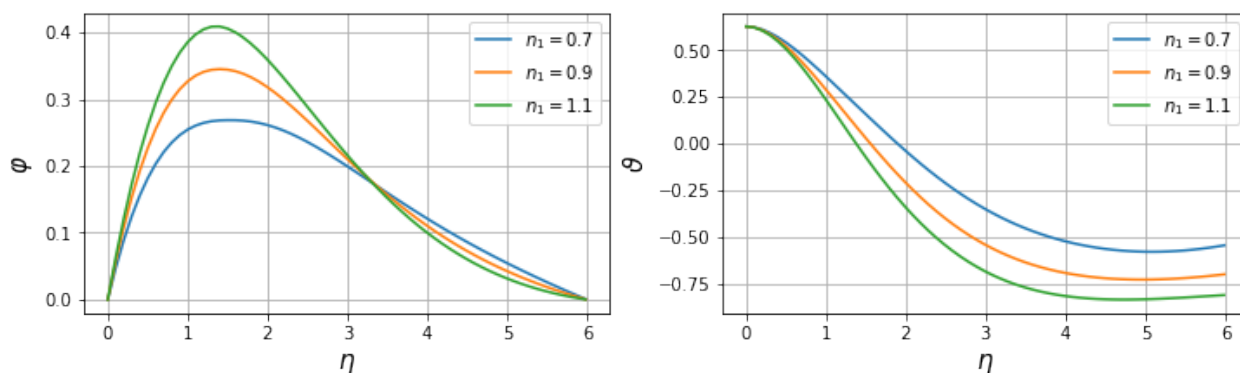


Рисунок 2 — Распределение безразмерных представителей продольных и поперечных составляющих скоростей жидкостей при фиксированном значении параметра  $\varphi_{00} = -0.5$

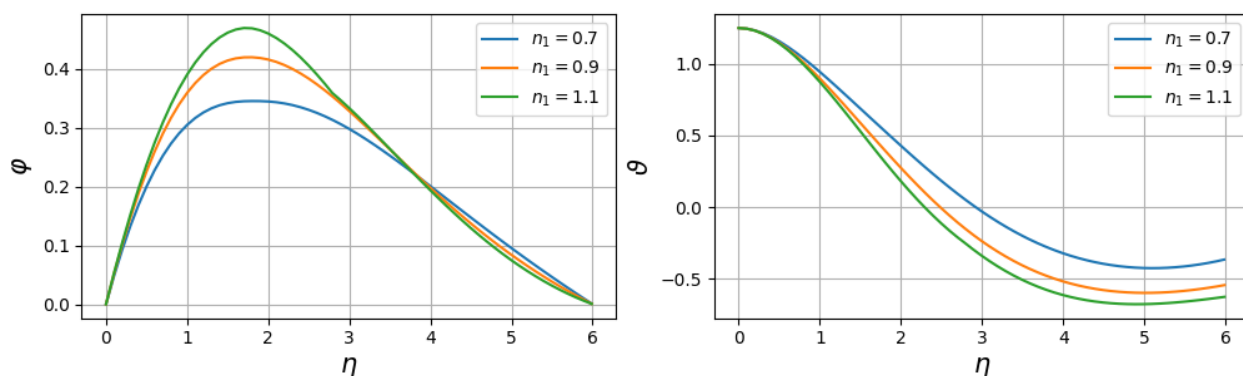


Рисунок 3 — Распределение безразмерных представителей продольных и поперечных составляющих скоростей жидкостей при фиксированном значении параметра  $\varphi_{00} = -1$

**Заключение.** Решена задача, о пограничном слое на, поверхности тонкой пористой вертикальной пластины как для случая неньютоновских сред.

Выполнен переход к автомодельной переменным и сформулирована краевая задача, в автомодельных переменных. После ряда преобразований, решение задачи сводится к решению системы ОДУ для автомодельных представителей функции тока и температуры с граничными условиями на пластине и вдали от пластины. Задача параметризована четырьмя параметрами: скоростью вдува/всасывания, числом Прандтля, показателем  $n$ , характеризующим степенную неньютоновскую жидкость, а также переключателем, учитывающим влияние вязкости при расчете тепла.

Для решения задачи применен численный метод, представляющий собой комбинацию метода, Ньютона и метода Рунге-Кутты 4-ого порядка. Решение

задачи представлено в виде графиков. Дана оценка распределений параметров в пограничном слое.