МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического и компьютерного моделирования

Математическое моделирование системы осцилляторов

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 441 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Митенкова Александра Вадимовича

Научный руководитель
доцент, к.т.н., доцент ____________ И.А. Панкратов

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент ____________ Ю.А. Блинков

Саратов 2022

Введение. Согласно современным тенденциям в науке можно заключить, что основные точки роста находятся в областях пересечения гуманитарного знания, модельных подходов из естественнонаучных дисциплин и математических способов расчета и доказательств. «Колебание» - распространенное понятие в современном естествознании. Его можно встретить в таких научных направлениях как биофизика, нейродинамика, нелинейная физика, прикладная математика и еще в целом ряде научных дисциплин. О колебаниях можно услышать в докладах сейсмологов, в экономических прогнозах, прогнозах погоды, а также в предсказаниях климата и социальных явлений. Термин «колебание» определяется как возвратно-поступательное изменение количественных характеристик наблюдаемой системы, которое описывается ее амплитудными и фазовыми характеристиками. При этом максимальные и минимальные отклонения колеблющейся величины от некоторого равновесного состояния выражаются через амплитудные характеристики, а если говорится о наличии или отсутствии периодичности, то это связано с фазовыми характеристиками. Любая система, в которой могут возникать колебания, может быть отнесена к одному из типов колебательных систем, примерами которых являются механические системы (физический и математический маятники, маятниковые часы), и многие другие. Для описания состояния таких систем в теоретической физике введено понятие динамической системы.

Под динамической системой понимается такая система, для которой, во-первых, определен минимальный набор координат, однозначно характеризующих её состояние, во-вторых, известен оператор эволюции системы (дифференциальное уравнение, математическая функция и тому подобные), в-третьих, задан необходимый набор начальных условий для всех её переменных (координат).

Данная работа является актуальной, поскольку моделирование осцилляторов играет важную роль во многих отраслях современной науки и техники. Осциллятором можно назвать любую систему, если величины, ее описывающие, периодически или апериодически меняются со временем. Таким образом, моделирование осцилляторов может быть использовано в таких отраслях, как программное управление оборудованием, навигационные системы, теория электромагнитного излучения, акустика, теория тяготения, теория твердого тела, теория колебательных спектров молекул и тому подобные.

Целью данной бакалаврской работы является изучение способа построения управления в линейной системе осцилляторов при наличии ограничений на управление и моделирования полученной системы.

Структура бакалаврской работы. Бакалаварская работа содержит введение, два раздела, заключение, список использованной литературы и одно приложение.

В введении обоснована актуальность работы, сформулированы цели и задачи исследования, а также его теоретическое и практическое применение.

В первом разделе содержится основная теоретическая часть по линейным системам управления.

Во втором разделе включена необходимая теория для моделирования системы осцилляторв и подробно изложено создание полученной системы, а также анализ результатов в зависимости от входных данных.

Основное содержание работы. Рассмотрим линейную управляемую систему:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t).$$

Предположим, что на фазовые координаты и управления системы наложены ограничения типа неравенств, выражающие ограниченность абсолютных величин или компонент некоторых линейных комбинаций переменных x, u и интегралов от них. Для определенности будем рассматривать ограничения следующих двух типов:

$$\Big\| C^i(t)x(t) + D^i(t)u(t) +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{T} \left[G^i(t,\ \tau)x(\tau) + H^i(t,\ \tau)u(\tau) \right] d\tau + \mu^i(t) \Big\| \leqslant 1,$$
$$i = 1, \ldots, r,$$

$$\left|\left\langle p^j(t), x(t)\right\rangle + \left\langle q^j(t), u(t)\right\rangle + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_0}^{T} \left[\left\langle g^j(t,\ \tau), x(\tau)\right\rangle + \left\langle h^j(t,\ \tau), u(\tau)\right\rangle\right] d\tau \right| \leqslant 1,$$

$$j = 1, \ldots, s.$$

Поставим задачу о построении управления $u(t)$, удовлетворяющего ограничениям при $t \in [t_0,\ T]$ и переводящего систему из заданного начального состояния:

$$x\left(t_0\right) = x^0,$$

в заданное конечное состояние:

$$x(T) = x^1.$$

Запишем решение системы, удовлетворяющее начальному условию, в виде:

$$x(t) = \Phi(t)\left\{x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\left[B(\tau)u(\tau) + f(\tau)\right] d\tau\right\}.$$

Подставим решение в краевое условие:

$$x^1 = \Phi(T)\left\{x^0 + \int\limits_{t_0}^{T} \Phi^{-1}(t)\left[B(t)u(t) + f(t)\right] dt\right\},$$

Далее, введем обозначение:

$$x^* = \Phi^{-1}(T)x^1 - x^0 - \int\limits_{t_0}^{T} \Phi^{-1}(t)f(t)dt,$$

и тем самым получим условие на управление:

$$\int_{t_0}^{T} \Phi^{-1}(t)B(t)u(t)dt = x^*.$$

Таким образом, искомое управление должно удовлетворять ограничениям и условию, описанным выше.

Воспользуемся методом управления (метод Калмана), для случая отсутствия ограничений. Будем искать управление в виде:

$$u = Q^\top c, \tag{1}$$

где c — n-мерный постоянный вектор, Q (t) — матрица размера $n \times m$, строки которой являются вектор-функции $q^1(t),\ \ldots,\ q^n(t)$.

Введем следующее обозначение:

$$R(t) = \int_{t_0}^{t} Q(\tau)Q^\top(\tau)d\tau.$$

Тогда получим уравнение для вектора c:

$$R(T)c = x^*.$$

$R(t)$ — симметрическая неотрицательно-определенная матрица размера $n \times n$ при $t \geqslant t_0$. В этом случае векторное уравнение имеет единственное решение:

$$c = R^{-1}(T)x^*.$$

Ограничения приводятся к виду:

$$\left\| F^i(t,\ T)x^* + \phi^i(t,\ T) \right\| \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Пользуясь неравенством Коши-Буняковского, оценим сверху левую часть неравенств:

$$\left\|F^i(t,\ T)x^*\right\| = \left[\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{n} F^i_{jk}x^*_k\right)^2\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}\left(F^i_{jk}\right)^2\right]^{1/2}\|x^*\|\,, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Получим достаточное условие выполнения неравенств:

$$\|x^*\| \leqslant \min_i \left\{\left(1-\phi^i_0\right)\left[\max_t \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}\left(F^i_{jk}(t,\ T)\right)^2\right]^{-1/2}\right\},$$
$$i = 1, \ldots, r, \quad t \in [t_0,\ T]$$

Итак, при выполнении условий управление удовлетворяет всем наложенным ограничениям при $t \in [t_0,\ T]$ и переводит систему из заданного начального состояния в конечное состояние. Поэтому условия можно рассматривать как достаточные условия управляемости за конечное время T.

Следующая теорема дает простые достаточные условия, обеспечивающие выполнение ограничения:

$$\|u(t)\| \leqslant a,$$

для закона управления в случае $f(t) \equiv 0$.

Теорема 3. Пусть при некотором $T > t_0$ матрица $R(T)$ неособая, то есть выполнено условие полной управляемости, и пусть для любого n-мерного вектора v выполнены неравенства:

$$\left\|Q^\top(t)K(T)v\right\| \leqslant \lambda_1(T)\|v\|, \quad t \in [t_0,\ T]\,,$$

$$\|R(T)K(T)v\| \geqslant \lambda_2(T)\|v\|.$$

Здесь $K(T)$ — некоторая неособая матрица размера $n \times n$, $\lambda_1(T)$, $\lambda_2(T) > 0$ — положительнье скаляры, v — произвольный постоянный n-мерный вектор, причем неравенство должно иметь место для всех $t \in [t_0,\ T]$. Тогда, если выполнено условие:

$$\|x^*\| \leqslant a\lambda_2(T)\lambda_1^{-1}(T),$$

то управление $u(t)$ переводит систему из начального состояния в конечное состояние в момент T и удовлетворяет ограничению при всех $t \in [t_0,\ T]$.

Рассмотрим систему гармонических осцилляторов, управляемых посредством скалярного управления:

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = u.$$

Здесь ξ_i — обобщенные координаты, постоянные $\omega_i > 0$ — собственные частоты осцилляторов, $i = 1, \ldots, n$, u — скалярное управление, на которое наложено ограничение, то есть $|u| \leqslant a$.

В качестве механической модели системы может служить система математических маятников, подвешенных к несущему телу G, перемещающемуся горизонтально с ускорением u в соответствии с рисунком 1.

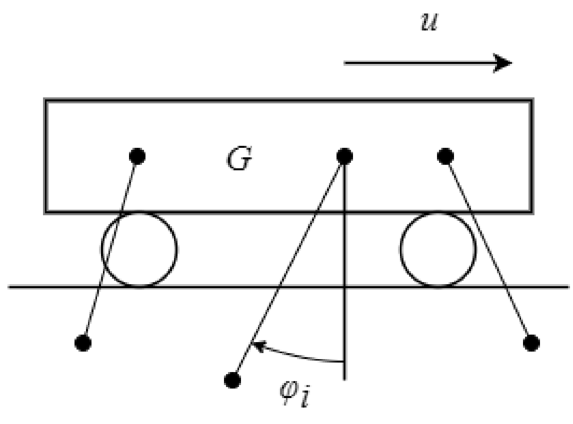


Рисунок 1 — Система математических маятников

Поставим задачу определения управления $u(t)$, удовлетворяющего ограничению и переводящего систему из произвольного начального состояния при

$t_0 = 0$:

$$\xi_i(0) = \xi_i^0, \quad \dot{\xi}_i(0) = \eta_i^0,$$

в заданное конечное состояние:

$$\xi_i(T) = \xi_i^1, \quad \dot{\xi}_i(T) = \eta_i^1.$$

Будем предполагать, что частоты ω_i положительны и различны [**?**]. Введем обозначение:

$$\Omega = \min_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (\omega_{k+1} - \omega_k) > 0, \quad 0 = \omega_0 < \omega_1 < \ldots < \omega_n.$$

С помощью замены переменных:

$$\dot{\xi}_i = y_i, \quad \xi_i = \omega_i^{-1} z_i,$$

приведем систему к виду:

$$\dot{y}_i = -\omega_i z_i + u, \quad \dot{z}_i = \omega_i y_i.$$

Фазовым вектором системы является $2n$-мерный вектор-столбец, составленный из компонент векторов y, z. Тогда фундаментальная матрица однородной системы имеет вид:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(\cos \omega_i t) & \operatorname{diag}(-\sin \omega_i t) \\ \operatorname{diag}(\sin \omega_i t) & \operatorname{diag}(\cos \omega_i t) \end{bmatrix}.$$

Матрицы $B(t)$ и $Q(t)$ для системы — $2n$-мерные векторы-столбцы. Их элементы таковы:

$$B_i = 1, \quad B_{n+i} = 0,$$
$$Q_i(t) = \cos \omega_i t, \quad Q_{n+i}(t) = -\sin \omega_i t.$$

Из соотношений вытекает:

$$QQ^{\top} = \begin{bmatrix} Q^1 & Q^0 \\ Q^{0^{\top}} & Q^2 \end{bmatrix}, \quad R(T) = \begin{bmatrix} R^1 & R^0 \\ R^{0^{\top}} & R^2 \end{bmatrix},$$

$$R^k = \int\limits_0^T Q^k dt, \quad k = 0, 1, 2.$$

Здесь введена симметрическая матрица M размера $2n \times 2n$. Для ее элементов получим оценки:

$$|M_{ii}| = \left| R^1_{ij} - \frac{T}{2} \right| \leqslant \frac{1}{4\Omega}, \quad |M_{n+i,n+i}| = \left| R^2_{ii} - \frac{T}{2} \right| \leqslant \frac{1}{4\Omega},$$

$$|M_{i,n+i}| = \left| R^0_{ii} \right| \leqslant \frac{1}{2\Omega},$$

$$|M_{ij}| = \left| R^1_{ij} \right| \leqslant \frac{2}{3\Omega}, \quad |M_{n+i,n+j}| = \left| R^2_{ij} \right| \leqslant \frac{2}{3\Omega},$$

$$|M_{i,n+j}| = \left| R^0_{ij} \right| \leqslant \frac{4}{3\Omega}, \quad i \neq j.$$

Учитывая оценки и симметрию матрицы M, получим:

$$\sum_{i,j} M^2_{ij} \leqslant \frac{2n}{16\Omega^2} + \frac{8\left(n^2 - n\right)}{9\Omega^2} + \frac{2n}{4\Omega^2} +$$

$$+ \frac{32\left(n^2 - n\right)}{9\Omega^2} = \frac{5n(64n - 55)}{72\Omega^2}.$$

Из неравенств следует:

$$\|Mv\| \leqslant \frac{k_n \|v\|}{\Omega}, \quad k_n = \left(\frac{5n(64n - 55)}{72} \right)^{1/2}, \quad n \geqslant 1.$$

Используя неравенства получим:

$$\|R(T)v\| \geqslant \left(\frac{T}{2} - \frac{k_n}{\Omega}\right) \|v\|.$$

Если $T \geqslant 2k_n/\Omega$. получаем:

$$\lambda_2(T) = \left(\frac{T}{2} - \frac{k_n}{\Omega}\right) > 0.$$

Подставляя в неравенство выражения и разрешая его относительно T, получим:

$$T \geqslant \frac{2n^{1/2}}{a} \|x^*\| + \frac{2k_n}{\Omega}.$$

Векторы x^0, x^1 таковы:

$$x^0 = \{y_i(0), z_i(0)\}^\top = \left\{\eta_i^0, \omega_i \xi_i^0\right\}^\top,$$
$$x^1 = \{y_i(T), z_i(T)\}^\top = \left\{\eta_i^1, \omega_i \xi_i^1\right\}^\top.$$

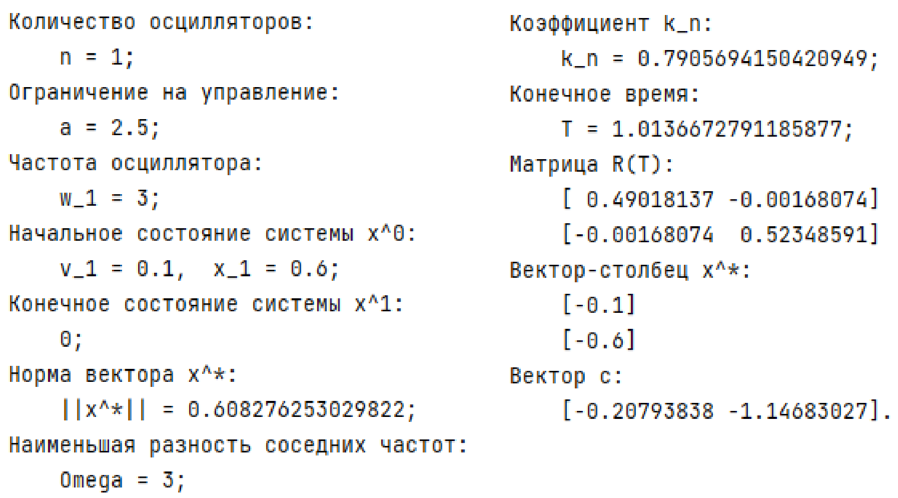
В закон управления подставим элементы $Q(t)$:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(c_i \cos \omega_i t - c_{n+i} \sin \omega_i t\right).$$

На основе теоремы 3 получаем следующий результат.

Рассмотрим частный случай гашения начальных колебаний, то есть задача приведения системы в состояние равновесия.

Посредством программной реализации вывод результата выполнен в терминал в соответствии с рисунком 2. А так же в соответствии с рисунком 3 можно наблюдать построение графиков траектории движения смоделированной системы.



```
Количество осцилляторов:                Коэффициент k_n:
    n = 1;                                  k_n = 0.7905694150420949;
Ограничение на управление:              Конечное время:
    a = 2.5;                                T = 1.0136672791185877;
Частота осциллятора:                    Матрица R(T):
    w_1 = 3;                                [ 0.49018137 -0.00168074]
Начальное состояние системы x^0:            [-0.00168074  0.52348591]
    v_1 = 0.1,  x_1 = 0.6;              Вектор-столбец x^*:
Конечное состояние системы x^1:             [-0.1]
    0;                                      [-0.6]
Норма вектора x^*:                      Вектор c:
    ||x^*|| = 0.608276253029822;            [-0.20793838 -1.14683027].
Наименьшая разность соседних частот:
    Omega = 3;
```

Рисунок 2 — Состояние терминала

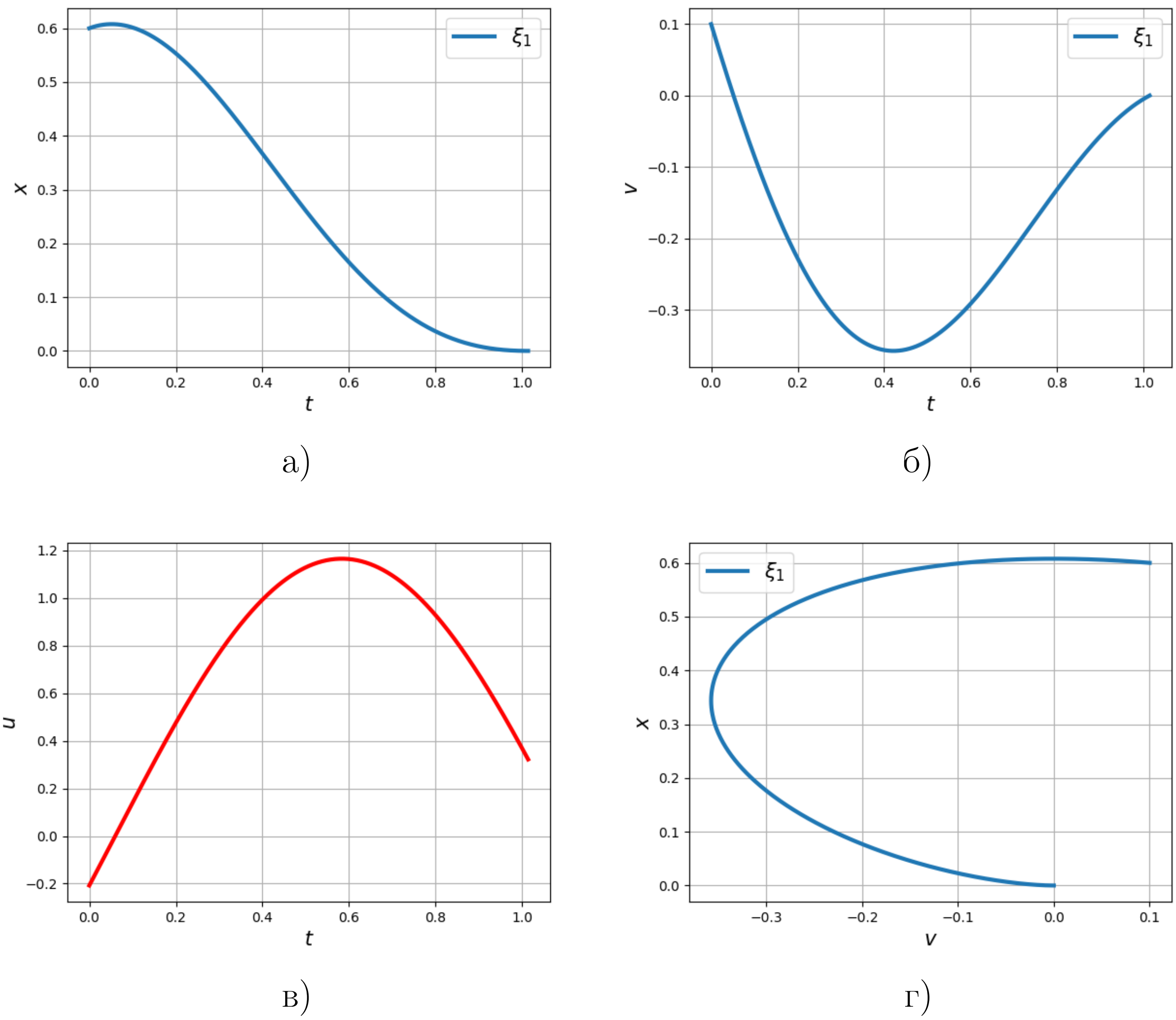


Рисунок 3 — Траектория движения: а - координата точки; б - скорость точки; в - оптимальное управление; г - фазовый портрет

Далее, исходя из полученного результата в соответствии с рисунком 2, с рисунком 3 можно сказать, что длительность перехода системы из начального состояния x^0 в состояние равновесия x^1 (то есть скорость и координата точки сходится в начале координат) равна $T \approx 1.014$ с.

Заключение. В ходе проделанной работы были рассмотрена постановка задачи моделирования систем управления при сложных ограничениях. Также был изучен и применен метод Калмана для задачи управления систем осцилляторов.

Исходя из теоретических сведений были получены формулы для вычисления времени перехода системы осцилляторов из начального состояния в конечное, управления, скорости и координат положения осцилляторов, реализация которых была выполнена посредством программного кода на языке Python3.

Результаты выполнения программы были визуализированы в виде графиков, на основании которых был проведен анализ зависимости системы от входных параметеров.