

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического и компьютерного моделирования

**Математическое моделирование**

**электромеханической системы**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 441 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Китаева Григория Геннадьевича

Научный руководитель  
доцент, к.т.н., доцент

И.А. Панкратов

Зав. кафедрой  
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент

Ю.А. Блинков

Саратов 2022

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрена математическая модель электромеханической системы, с использованием обобщенной схемы построения управления Калмана, учитывающей наличие ограничения на управление, в явном виде найдены управление и соответствующее конечное время, при которых осуществляется приведение системы из начального состояния в любое конечное состояние покоя.

Для современной науки и техники характерна потребность в наиболее рациональном использовании ограниченных временных, материальных и энергетических ресурсов. Переход к оптимальному использованию оборудования, к рациональной организации технологических процессов повысит производительность труда, даст огромную экономию средств, улучшит экологическую ситуацию. Эти задачи для динамических объектов составили предмет теории оптимального и экстремального управления.

**Целью** математического моделирования в настоящее время является анализ динамики и синтез электромеханических систем. Аналитическое моделирование электромеханических систем на основании точных методов решения дифференциальных уравнений позволяет обеспечить отсутствие погрешности в отличие от численных методов. Вместе с тем аналитические методы применимы только для линейных и линеаризованных систем.

**Структура бакалаврской работы.** Бакалаврская работа состоит из введения, двух разделов, заключения, списка использованной литературы и двух приложений.

Во введении обоснована актуальность работы, сформулированы цели и задачи исследования, а также его теоретическое и практическое применение.

В первом разделе было дано представление о управляемых системах при сложных ограничениях, рассмотрен и обоснован метод Калмана.

Во втором разделе были рассмотрены примеры задания двух электромеханических систем, проведен анализ как упрощенной, так и обобщенной модели второй из них, а также представлена программная реализация алгоритма, полученного аналитическим путем.

В заключении подведен итог проделанной работы, сформулированы общие выводы исследования.

### Основное содержание работы.

Рассмотрим двухмассовую систему, управляемую электродвигателем постоянного тока с независимым возбуждением. Уравнения движения системы возьмем в виде:

$$\begin{aligned}m_1\ddot{\xi}_1 &= c(\xi_2 - \xi_1) + F, \\m_2\ddot{\xi}_2 &= c(\xi_1 - \xi_2).\end{aligned}$$

Здесь  $\xi_1, \xi_2$  — координаты системы,  $m_1$  и  $m_2$  — постоянные инерционные коэффициенты,  $c$  — постоянная жесткость упругой связи,  $F$  — управляющее воздействие (сила или момент), создаваемое электродвигателем.

В соответствии с рисунком 1, изображен частный случай системы, описываемой представленными уравнениями. В соответствии с рисунком 1, изображена тележка массы  $m_1$ , перемещаемая силой  $F$  вдоль оси  $\xi$ . К тележке присоединен математический маятник массы  $m_2$  и длины  $l$ , совершающий малые колебания.

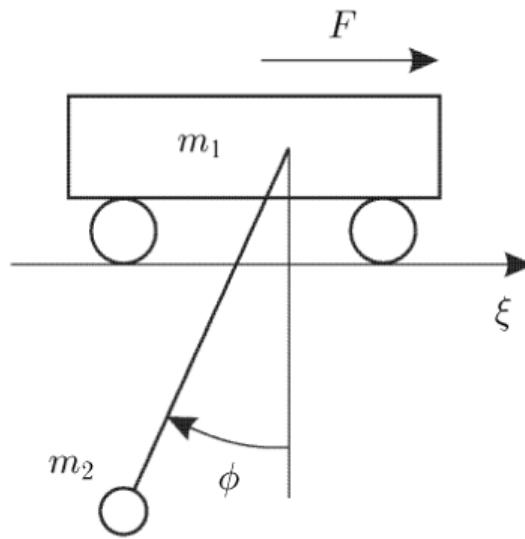


Рисунок 1 — Маятник на тележке

Составим уравнения движения представленной системы:

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\ddot{\xi}_1 - m_2l\ddot{\phi} &= F, \\m_2l^2\ddot{\phi} + m_2gl\phi &= m_2l\ddot{\xi}_1.\end{aligned}$$

Здесь  $\phi$  — угол отклонения маятника от вертикали,  $g$  — ускорение силы тяжести, где первое уравнение — это уравнение изменения количества движения вдоль оси  $\xi$ , а второе уравнение описывает изменение момента количества движения относительно оси маятника.

Введем обозначения:

$$\xi_2 = \xi_1 - l\phi, \quad c = \frac{m_2 g}{l}$$

Тогда уравнения движения представленной системы с учетом введенных обозначений преобразуются к виду изначальной системы.

Введем, в соответствии с рисунком 2, другую систему.

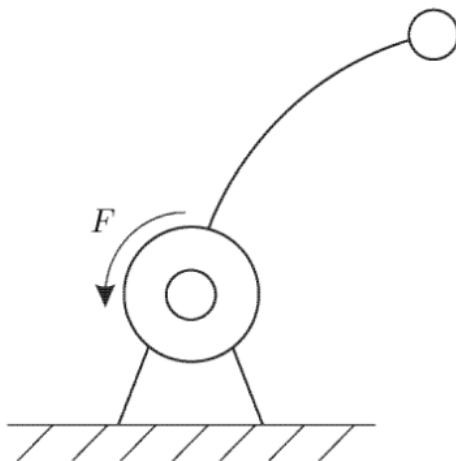


Рисунок 2 — Электродвигатель и упругий стержень с массой

Данная система, представляет собой электродвигатель, к оси которого присоединен упругий стержень с массой  $m$  на конце. Пренебрегая массой стержня по сравнению с массой  $m$  и обозначая через  $c$  его крутильную жесткость, снова приходим к первоначальной системе уравнений, где переменные и постоянные имеют следующий смысл:  $m_1$  — момент инерции ротора электродвигателя и вращающихся частей редуктора,  $m_2$  — момент инерции стержня с массой на конце,  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — абсолютные углы поворота вала двигателя и массы  $m$  относительно оси вращения,  $F$  — момент, развиваемый электродвигателем. К системе приводятся уравнения движения двигателя с упругим стержнем и в том случае, когда масса стержня сопоставима с  $m$ , если ограничиться

учетом основного (низшего) тона упругих колебаний. При этом систему, в соответствии с рисунком 2, можно рассматривать как простейшую модель упругого манипулятора.

Управляющее воздействие  $F$  в изначальной системе пропорционально (или равно) моменту, создаваемому электродвигателем и, следовательно, пропорционально силе тока  $I$  в цепи ротора:

$$F = k_1 I, \quad k_1 > 0,$$

где  $k_1$  — постоянный коэффициент. Уравнение баланса электрических напряжений в цепи ротора имеет вид:

$$L\dot{I} + RI + k_2\dot{\xi}_1 = U.$$

Здесь  $L$  — коэффициент индуктивности,  $R$  — электрическое сопротивление,  $k_2$  — постоянный коэффициент,  $U$  — управляющее электрическое напряжение. Член  $k_2\dot{\xi}_1$  в уравнении баланса электрических напряжений, равный противо-электродвижущей силы, пропорционален угловой скорости вращения вала двигателя, которая, в свою очередь, пропорциональна (или равна)  $\dot{\xi}_1$ . Первое слагаемое в левой части этого уравнения обычно мало по сравнению с другими слагаемыми, и им можно пренебречь. Получим:

$$F = \frac{k_1 (U - k_2\dot{\xi}_1)}{R}.$$

Рассмотрим ограничения, наложенные на управление и фазовые координаты системы. Управляющее напряжение ограничено по величине постоянной:

$$|U| \leq U_0.$$

Силу тока  $I$  и пропорциональный ей момент двигателя также следует считать ограниченными по величине, что приводит к ограничению:

$$|F| \leq F_0,$$

где  $F_0$  — постоянная. Кроме того, угловую скорость вращения вала, пропорциональную  $\dot{\xi}_1$ , также считаем ограниченной, притом таким образом, чтобы при максимальном по величине напряжении  $U = \pm U_0$  и максимальной угловой скорости управляющий момент не мог приводить к дальнейшему разгону двигателя. Это ограничение, в силу нового обозначения  $F$ , можно записать в виде:

$$\left| \dot{\xi}_1 \right| \leq \frac{U_0}{k_2}.$$

Совокупность ограничений, учитывая полученное ранее управляющее воздействие  $F$ , представим как:

$$|F| \leq F_0, \quad \left| \dot{\xi}_1 \right| \leq \frac{U_0}{k_2}, \quad \left| F + \frac{k_1 k_2 \dot{\xi}_1}{R} \right| \leq \frac{k_1 U_0}{R}.$$

Перейдем к новым (безразмерным) переменным по формулам:

$$t' = \omega t, \quad x_1 = \frac{m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2}{(m_1 + m_2) l_0}, \quad x_2 = \frac{m_1 \dot{\xi}_1 + m_2 \dot{\xi}_2}{(m_1 + m_2) l_0 \omega},$$

$$x_3 = \frac{m_1 (\xi_1 - \xi_2)}{(m_1 + m_2) l_0}, \quad x_4 = \frac{m_1 (\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2)}{(m_1 + m_2) l_0 \omega}, \quad u = \frac{F}{(m_1 + m_2) l_0 \omega^2},$$

$$\omega^2 = \frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}, \quad l_0 = \frac{F_0 m_1 m_2}{c(m_1 + m_2)^2}.$$

Тогда уравнения системы примут вид, не содержащий параметров:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = -x_3 + u.$$

Здесь и далее точкой обозначаются производные по безразмерному времени  $t'$ , причем штрих у переменной  $t'$  опускается. Сделаем замену на безразмерные переменные также в совокупности ограничений. Получим:

$$|u| \leq 1, \quad |px_2 + \mu px_4| \leq 1, \quad |px_2 + \mu px_4 + qu| \leq 1,$$

где обозначено:

$$p = \frac{l_0 \omega k_2}{U_0}, \quad q = \frac{(m_1 + m_2) l_0 \omega^2 R}{k_1 U_0}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1}.$$

Для полученной системы с ограничениями поставим задачу о построении допустимого управления  $u(t)$ , переводящего ее из начального состояния:

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad x_3(0) = x_3^0, \quad x_4(0) = x_4^0.$$

в нулевое конечное состояние:

$$x_1(T) = x_1^0, \quad x_2(T) = x_2^0, \quad x_3(T) = x_3^0, \quad x_4(T) = x_4^0.$$

здесь  $T$  — пока нефиксированное время окончания процесса.

Положим  $m_2 = 0$  в уравнении движения системы. Получим систему с одной степенью свободы, которая в безразмерных переменных описывается уравнениями:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u.$$

В ограничениях, при  $m_2 = 0$  следует, согласно введенным  $p$ ,  $q$ ,  $\mu$ , положить  $\mu = 0$ . Число параметров в ограничениях можно уменьшить с помощью замены переменных:

$$t = p^{-1}t', \quad x_1 = p^{-2}x'_1, \quad x_2 = p^{-1}x'_2.$$

Сделав замену в системе с одной степенью свободы на безразмерные переменные, опуская штрихи у новых переменных, придем к прежней системе, ограничения при этом примут вид:

$$|u| \leq 1, \quad |x_2| \leq 1, \quad |x_2 + qu| \leq 1, \quad q > 0.$$

Тогда граничные условия примут вид:

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0.$$

Применим метод Калмана к поставленной задаче. В обозначениях:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t).$$

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi, \quad \Phi(t_0) = E_n,$$

имеем для системы с одной степенью свободы:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем обратную к  $\Phi(t)$  матрицу  $\Phi^{-1}(t)$ , а затем матрицы  $Q(t)$  и  $R(t)$ :

$$Q(t) = \Phi^{-1}(t)B(t),$$

$$R(t) = \int_{t_0}^t Q(\tau)Q^{\top}(\tau)d\tau,$$

определяемые равенствами:

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} -t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad R(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^3 & -\frac{1}{2}t^2 \\ -\frac{1}{2}t^2 & t \end{bmatrix},$$

здесь принято  $t_0 = 0$  в соответствии с граничными условиями. Найдем еще обратную к  $R(t)$ , при  $t = T$  матрицу:

$$R^{-1}(T) = 2T^{-3} \begin{bmatrix} 6 & 3T \\ 3T & 2T^2 \end{bmatrix}.$$

Учитывая граничные условия, пользуясь  $\Phi^{-1}(t)$ ,  $Q(t)$   $R(t)$ , получим:

$$x^1 = 0, \quad x^* = -x^0.$$



Здесь введено обозначение:

$$x^* = \Phi^{-1}(T)x^1 - x^0 - \int_{t_0}^T \Phi^{-1}(t)f(t)dt.$$

С помощью полученных соотношений представим фазовый вектор и управление в виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t) [E_2 - R(t)R^{-1}(T)] x^0 = X(t, T)x^0, \\ u(t) &= -Q^\top(t)R^{-1}(T)x^0 = (w(t, T), x^0), \end{aligned}$$

здесь  $E_2$ — единичная матрица размера  $2 \times 2$ . Элементы матрицы  $X(t, T)$  размера  $2 \times 2$  и двумерного вектора  $w(t, T)$  равны:

$$\begin{aligned} X_{11}(t, T) &= 1 - 3\tau^2 + 2\tau^3, & X_{12}(t, T) &= T\tau(1 - 2\tau + \tau^2), \\ X_{21}(t, T) &= \frac{6\tau(\tau - 1)}{T}, & X_{22}(t, T) &= 1 - 4\tau + 3\tau^2, \\ w_1(t, T) &= \frac{6(2\tau - 1)}{T^2}, & w_2(t, T) &= \frac{2(3\tau - 2)}{T}, & \tau &= \frac{t}{T}. \end{aligned}$$

Каждое из ограничений на управление и фазовый вектор можно представить в виде:

$$|\alpha x_2 + \beta u| \leq 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad \beta \geq 0,$$

где  $\alpha, \beta$  - постоянные коэффициенты. Подставим в ограничения выражения для  $x_2$  и  $u$  и проведем оценки сверху левой части этих неравенств:

$$|\alpha x_2 + \beta u| \leq (\alpha |X_{21}| + \beta |w_1|) |x_1^0| + (\alpha |X_{22}| + \beta |w_2|) |x_2^0|.$$

Так как  $t \in [0, T]$ , то  $\tau \in [0, 1]$ . Оценим сверху максимумы по  $\tau \in [0, 1]$  абсолютных величин компонент матрицы  $X(t, T)$ , входящих в полученные оценки:

$$\begin{aligned} |X_{21}| &\leq \frac{3}{2T}, & |X_{22}| &\leq 1, \\ |w_1| &\leq \frac{6}{T^2}, & |w_2| &\leq \frac{4}{T}. \end{aligned}$$

Подставим оценки в полученные ограничения:

$$|\alpha x_2 + \beta u| \leq \left( \frac{3\alpha}{2T} + \frac{6\beta}{T^2} \right) |x_1^0| + \left( \alpha + \frac{4\beta}{T} \right) |x_2^0|.$$

Рассматривая каждое из наложенных ограничений в отдельности. Положив  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$  — для первого ограничения,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  — для второго и  $\alpha = 1$ ,  $\beta = q$  — для третьего ограничения. Получим следующие неравенства:

$$\frac{6}{T^2} |x_1^0| + \frac{4}{T} |x_2^0| \leq 1, \quad \frac{3}{2T} |x_1^0| + |x_2^0| \leq 1,$$

$$\left( \frac{3}{2T} + \frac{6q}{T^2} \right) |x_1^0| + \left( 1 + \frac{4q}{T} \right) |x_2^0| \leq 1.$$

Так как  $q > 0$ , то неравенства, описанные выше, можно переписать в виде:

$$\frac{6}{T^2} |x_1^0| + \frac{4}{T} |x_2^0| \leq 1,$$

$$\left( \frac{3}{2T} + \frac{6q}{T^2} \right) |x_1^0| + \left( 1 + \frac{4q}{T} \right) |x_2^0| \leq 1,$$

представляет собой достаточные условия разрешимости поставленной задачи управления. Эти условия, связывающие начальное состояние и время процесса, можно рассматривать как достаточные условия управляемости системы из заданного начального состояния  $x^0$  за время  $T$ .

Пусть начальное состояние  $x_1^0$ ,  $x_2^0$  задано. Если  $|x_2^0| > 1$ , то условия не выполнены, что вполне естественно, так как при этом начальное состояние нарушает наложенное фазовое ограничение  $|x_2| \leq 1$ . Если же  $|x_2^0| < 1$ , то условия заведомо выполняются при достаточно большом  $T$ . Разрешая квадратные относительно  $T^{-1}$  неравенства, получим минимальное время  $T^*$ , при котором выполняются наложенные ограничения:

$$T \geq T^* = \max \left\{ \frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2} \right\}, \quad |x_2^0| \leq 1,$$

$$z_1 = \frac{(6a_1 + 4a_2^2)^{1/2} - 2a_2}{6a_1}, \quad a_i = |x_i^0|, \quad \text{где } i = 1, 2,$$

$$z_2 = \frac{\left[ (3a_1 + 8qa_2^2)^{1/2} + 96qa_1(1 - a_2) \right]^{1/2} - 3a_1 - 8qa_2}{24qa_1}.$$

Итак, если  $|x_2^0| < 1$  и  $T \geq T^*$ , то предложенный способ управления обеспечивает приведение системы с одной степенью свободы, в заданное состояние при выполнении наложенных ограничений. Фиксировав любое  $T \geq T^*$ , находим искомое управление  $u(t)$  и фазовую траекторию  $x(t)$  по явным формулам. Тем самым поставленная задача для упрощенной модели электромеханической системы решена.

В соответствии с рисунком 3, при принятом значении параметра  $q = 1/2$ , в соответствии с введенными ограничениями, представлено множество допустимых значений переменных  $(x_2, u)$  в виде шестиугольника.

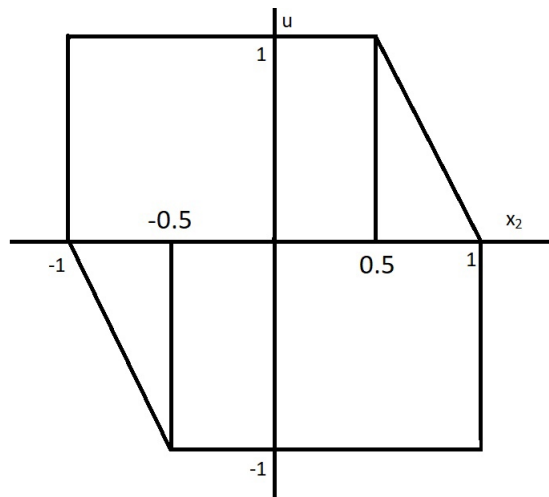


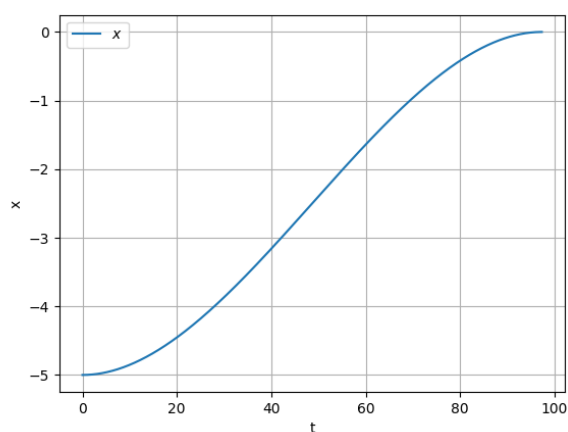
Рисунок 3 — Множество допустимых значений переменных  $(x_2, u)$

В соответствии с рисунком 4, с рисунком 5, для входных параметров программы  $x_0, q$  равными  $[-5, 0], 0.5$  соответственно, представлено состояние системы на отрезке времени  $t_0 = 0, T^* \approx 97.334$ . Стоит заметить, что из заданного начального состояния, для найденного времени  $T^*$  система в конечный момент времени приходит в состояние равновесия.

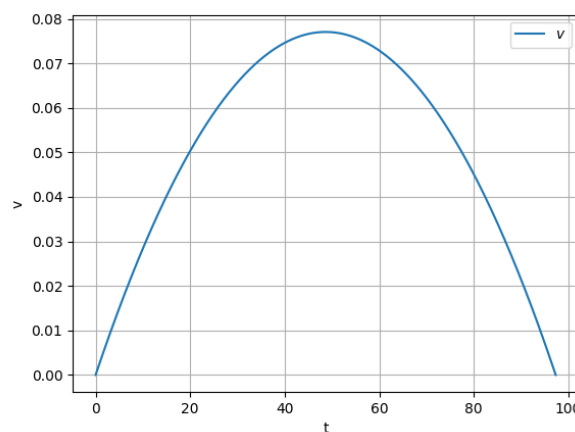
\$t = 97.33416033995867\$

Process finished with exit code -1

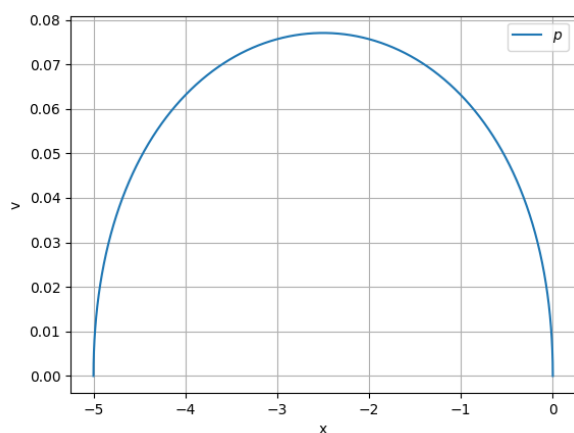
Рисунок 4 — Состояни терминала при входных параметрах программы  $x_0 = [-5, 0]$ ,  $q = 0.5$



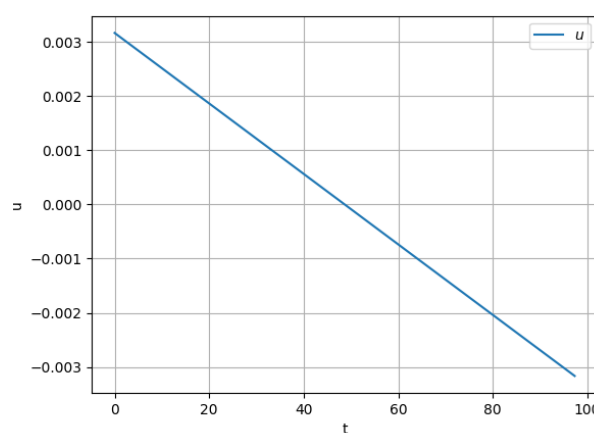
а)



б)



в)



г)

Рисунок 5 — Состояние системы при входных параметров программы  $x_0 = [-5, 0]$ ,  $q = 0.5$ : а - координата точки; б - скорость точки; в - фазовый портрет ; г - оптимальное управление

В соответствии с рисунком б, наглядно показано что достаточные условия разрешимости поставленной задачи управления всюду удовлетворяются.

**Заключение.** В бакалаврской работе было проведено математическое моделирование электромеханической системы. Для решения поставленной за-

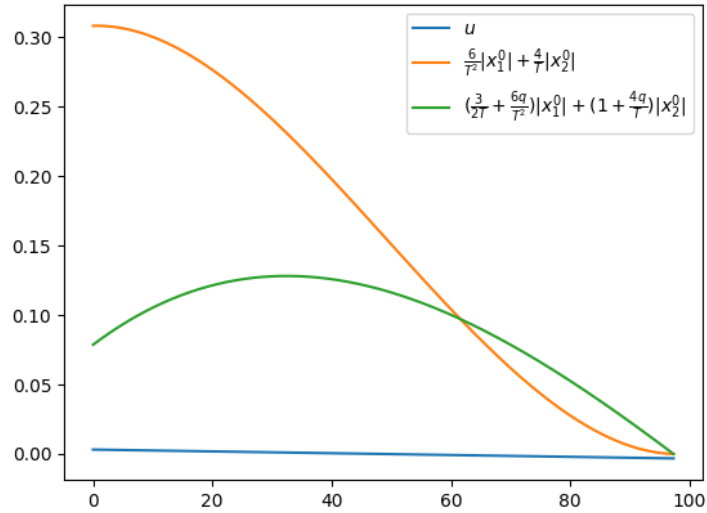


Рисунок 6 — Зависимости величины  $u$ , накладываемых ограничений от времени.

дачи в настоящей работе была рассмотрена модель электромеханической системы, произведен анализ как самой системы в целом, так и накладываемых ограничений на нее. В результате чего был аналитически получен алгоритм нахождения закона управления и фазовой траектории. Для визуализации и численного решения поставленной задачи был применен язык программирования Python 3. На графиках, полученных путем реализации полученного алгоритма, было наглядно представлены такие состояния системы, как координата точки, скорость точки, оптимальное управление, фазовый портрет и зависимости некоторых безразмерных величин от времени. Из результатов математического моделирования электромеханической системы, ясно, что ввиду наличия явных соотношений программная реализация не будет трудоемкой, а вычислительная мощность электронно-вычислительной машины может быть достаточно мала.