

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического и компьютерного моделирования

**Гиперзвуковое обтекание клина**

**неравномерным потоком газа**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 441 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Кузнецовой Ксении Олеговны

Научный руководитель  
старший преподаватель

В.С. Кожанов

Зав. кафедрой  
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент

Ю.А. Блинков

Саратов 2022

**Введение.** Усовершенствование самолётов и управляемых снарядов в последние годы выдвинуло ряд новых аэродинамических проблем. Большая часть этих проблем связана с гиперзвуковыми скоростями полёта и в некотором отношении существенно отличается от тех проблем, которые возникают при обычных сверхзвуковых скоростях полёта. В настоящее время уже говорят и гиперзвуковых скоростях как о едином диапазоне скоростей. Если нижняя граница гиперзвуковых скоростей определяется чисто количественным критерием интенсивности сжатия в ударных волнах, то с дальнейшим увеличением числа Маха возникает новое явление диссоциации воздуха, а при ещё больших скоростях становится существенным "свечение" сжатого воздуха. В соответствии с этим можно различать три различных диапазона гиперзвуковых скоростей. Первых из них характеризуется сильными возмущениями, которые, однако, не приводят к изменению химического состава воздуха. Второй диапазон охватывает такие скорости, при которых диссоциации становятся существенной, но лучистый теплообмен в газе пренебрежимо мал. Наконец, третий диапазон характеризуется столь высокими температурами, что излучение существенно влияет на процессы. Можно отметить две особенности гиперзвуковых течений: во-первых, наличие сильных ударных волн, приводящих к сильному уплотнению газа после прохождения через ударную волну; во-вторых, малые изменения абсолютной скорости течения газа при обтекании достаточно тонких заострённых тел. Первая особенность имеет своим следствием то, что всякая область возмущённого движения газа занимает тонкий слой, прилегающий к обтекаемому телу. Толщина слоя представляет тот малый параметр, который позволяет строить приближённые теории. Некоторые авторы, основывающие свои работы на предположении малой толщине ударного слоя, считают, что жидкость является совершенным газом с постоянными и близкими к единице отношением идеальных теплоёмкостей. На практике же достаточно малые отношения плотностей на скачке получаются лишь для таких газов, поведение которых существенно отклоняется от уравнения состояния совершенного газа, поэтому предпочтительнее считать, что для газа имеет место произвольное уравнение состояния. А. Л. Гонор искал решение задачи обтекания кругового конуса под произвольным углом атаки в гиперзвуковом потоке, а позднее задачи обтекания произвольного

конечного тела гиперзвуковым потоком. Он нашёл нулевое и первое приближение, однако впоследствии оказалось, что в первом приближении окружная составляющая скорости имеет на теле логарифмическую особенность. Я. Г. Сапунков методом Пуанкаре – Лайтхила – Го правил решение А. Л. Гонора в вихревом слое и показал, что оно справедливо вне некоторой окрестности поверхности конуса, а давление достаточно хорошо определяется во всей области возмущенного потока. Ченг и Я. Г. Сапунков искали решение задачи об обтекании кругового конуса под малым углом атаки гиперзвуковым током невязкого совершенного газа в виде рядов по возрастающим степеням эпсилон. Однако, энтропия, вычисленная этим методом, принимает переменное значение в первом приближении, а во втором обращается в бесконечность на поверхности конуса, что физически нереально. Я. Г. Сапунков вводит специальным образом подобранную функцию. Таким способом удастся избежать появления логарифмической особенности, это функция вычисляется методом последовательных приближений. Я. Г. Сапунков обобщает полученные результаты на случай течения газа с произвольным уравнением состояния. В настоящей работе методом разложения по малому параметру найдены нулевое, первое и второе приближение для задачи об обтекании клина и задачи об обтекании тела, мало отличающегося от клина Кипер с Буковым невязким свободно расширяющимся потоком совершенного газа под нулевым углом атаки, а также для задачи об обтекании тела, мало отличающегося от клина гиперзвуковым невязким свободно расширяющимся током равновесного газа под нулевым углом атаки.

**Целью** данной бакалаврской работы является исследование формы ударной волны и решение задачи об обтекании тела малоотличающегося от клина гиперзвуковым невязким свободно расширяющимся потоком равновесного газа под нулевым углом атаки с произвольной зависимостью энтропии и энтальпии газа от давления и плотности.

**Структура бакалаврской работы.** В данной бакалаврской работе содержится введение, 4 раздела и заключение:

1. Во введении рассматривается актуальность темы бакалаврской работы, а также степень изученности данной дисциплины.

2. В первом разделе рассматривается основная система уравнений, нулевое, первое и второе приближения для задачи по гиперзвуковому обтеканию клина под нулевым углом атаки совершенным неравномерным потоком газа.
3. Во втором разделе рассматривается задача гиперзвукового обтекания тела малоотличающегося от клина. под нулевым углом атаки совершенным неравномерным потоком газа.
4. В третьем разделе рассматривается задача гиперзвукового обтекания тела малоотличающегося от клина под нулевым углом атаки неравномерным потоком равновесного газа.
5. В четвёртом разделе рассматриваются примеры влияния разных параметров в поставленных задачах.
6. В заключении указаны цели, которые были достигнуты по итогам бакалаврской работы

### Основное содержание работы

В соответствии с рисунком 1, рассматривается гиперзвуковое обтекание клина под нулевым углом атаки свободнораспространяющимся потоком совершенного газа.

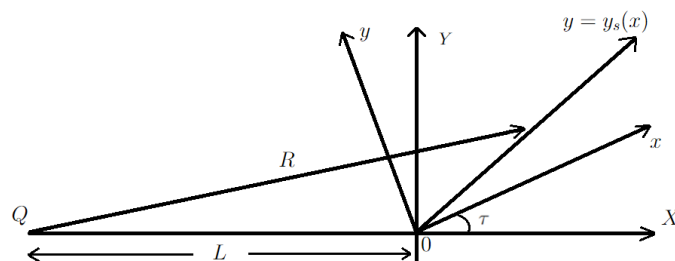


Рисунок 1

Поток распространяется от источника  $Q$ , удалённого от клина на расстояние  $L$ , оно должно удовлетворять условию:

$$\bar{x} = \frac{x}{L} \ll 1, \quad (1)$$

где  $x$  - линейный размер клина, а  $x$  - малый параметр.

$\tau$  - угол полураствора клина,

$R$  - текущее расстояние от  $Q$  до ударной волны. Будем считать, что ударная волна сильная. Тогда отношение плотностей при переходе через скачок мало. Обозначим его через  $\varepsilon$ . Введём обозначения. Пусть  $p_0$  - давление,  $\rho_0$  - плотность,  $v_0$  - плотность,  $a_0$  - скорость звука в набегающем потоке. Тогда отношение теплоёмкости определяется соотношением:

$$\gamma = \rho_0 \frac{a_0^2}{p_0}. \quad (2)$$

Пусть  $p_n$  - давление,  $\rho_n$  - плотность,  $v_n$  - скорость в носике клина. Для совершенного газа параметр  $\varepsilon$  имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}. \quad (3)$$

Введём прямоугольную систему координат  $(x, y)$ . В соответствии с рисунком 1, ось  $x$  направлена вдоль боковой стороны клина, а ось  $y$  перпендикулярна ей.

Через  $\rho, p, u, v$  соответственно обозначим плотность, давление и компоненты вектора скорости в области между ударной волной и поверхностью клина.

Уравнение ударной волны имеет вид:

$$y = y_s(x). \quad (4)$$

Уравнение поверхности клина имеет вид:

$$y = 0. \quad (5)$$

За основные уравнения возьмём интеграл Бернулли, уравнение количества движения в проекции на ось  $y$ , уравнение неразрывности и уравнение сохранения энтропии. Система уравнений в переменных  $x$  и  $y$  имеет вид:

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\rho(\gamma - 1)} = \frac{v_n^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_n}{\rho_n} \quad (6)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

$$u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho \gamma} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho \gamma} \right) = 0 \quad (9)$$

На ударной волне в качестве граничных условий возьмём условия сохранения массы, энергии, касательных составляющих скорости, импульса. Таким образом при  $y = y_s(x)$  :

$$\rho_0 V_{0\bar{n}} = \rho V_{\bar{n}}, \quad (10)$$

$$\frac{V_n^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_n}{\rho_n} = \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad (11)$$

$$V_{0\bar{e}} = V_{\bar{e}}, \quad (12)$$

$$P_0 + \rho_0 V_{0\bar{n}}^2 = P + \rho V_{\bar{n}}^2, \quad (13)$$

где  $V_{0\bar{n}}$  и  $V_{0\bar{e}}$  - нормальная и касательная составляющие скорости внешнего потока к фронту ударной волны,  $V_{\bar{n}}$  и  $V_{\bar{e}}$  - составляющие возмущённого потока.

На поверхности клина выполняется условие непротекания. При  $y = 0$ :

$$V_{\bar{n}'} = 0, \quad (14)$$

где  $V_{\bar{n}'}$  - нормальная составляющая скорости к поверхности тела.

Введём новую систему координат  $(x, \Theta)$ :

$$\begin{cases} x = x \\ \Theta = \frac{y}{x} \end{cases} . \quad (15)$$

Формулы перехода имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\Theta=const} - \frac{\Theta}{x} \frac{\partial}{\partial \Theta} \Big|_{x=const}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \Theta} \Big|_{x=const}. \quad (17)$$

Система уравнений и граничные условия в новых переменных имеют вид:

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\gamma \rho}{\rho(\gamma - 1)} = \frac{v_n^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_n}{\rho_n}, \quad (18)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} x + (v - u\Theta) \frac{\partial v}{\partial \Theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \Theta}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} x + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \Theta} - \frac{\partial(\rho u)}{\partial \Theta} \Theta = 0, \quad (20)$$

$$u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho \gamma} x \right) + (v - u\Theta) \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \frac{p}{\rho \gamma} \right) = 0. \quad (21)$$

При  $\Theta = \Theta_s(x)$  :

$$\rho_0 V_{0\bar{n}} = \rho V_{\bar{n}}, \quad (22)$$

$$\frac{V_n^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_n}{\rho_n} = \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad (23)$$

$$V_{0\bar{e}} = V_{\bar{e}}, \quad (24)$$

$$P_0 + \rho_0 V_{0\bar{n}}^2 = P + \rho V_{\bar{n}}^2. \quad (25)$$

При  $\Theta = 0$ :

$$V_{\bar{n}'} = 0 \quad (26)$$

Система для нулевого приближения:

$$1 + 2k = u_{00}^2 + \frac{p_{00}}{\rho_{00}} \quad (27)$$

$$\frac{dp_{00}}{d\Theta} = 0 \quad (28)$$

$$\Theta \frac{d(p_{00}u_{00})}{d\Theta} = 0 \quad (29)$$

$$u_{00}\Theta \frac{d}{d\Theta}(\ln(p_{00}) - \ln(\rho_{00})) = 0 \quad (30)$$

$$u_{00}\Theta \frac{d}{d\Theta}(\ln(p_{00}) - \ln(\rho_{00})) = 0 \quad (31)$$

В соответствии с рисунком 2, с рисунком 3 видно, что величина  $C_p$  убывает с возрастанием числа  $M_n$ , но возрастает с ростом угла  $\tau$ .

В соответствии с рисунком 4, с рисунком 5 видно, что с возрастанием числа  $M_n$ , ударная волна приближается к поверхности тела, а с увеличением угла  $\tau$  величина  $y_s$  возрастает.

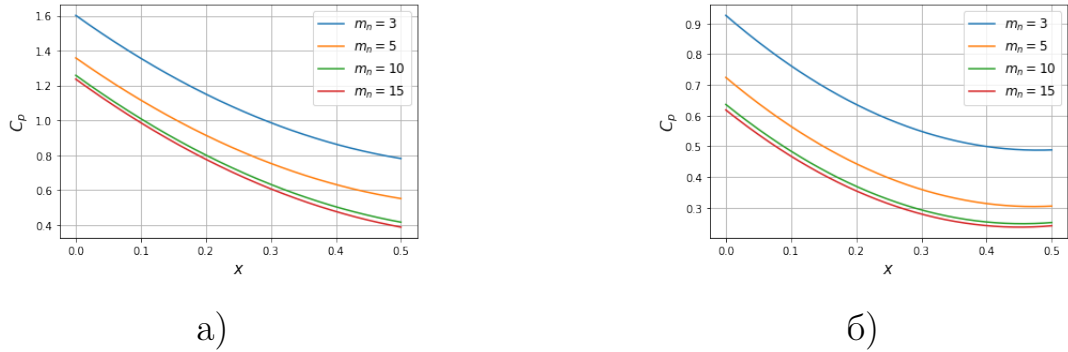


Рисунок 2 — Распределение  $C_p$  на теле при: а)  $\tau = 30^\circ$   
б)  $\tau = 45^\circ$

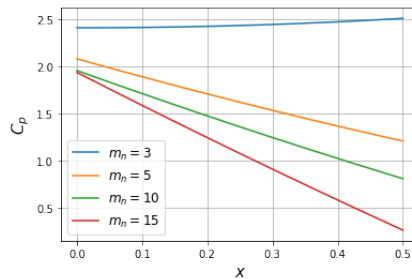
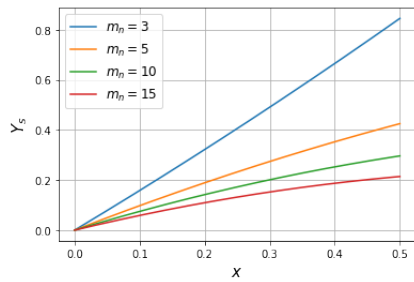
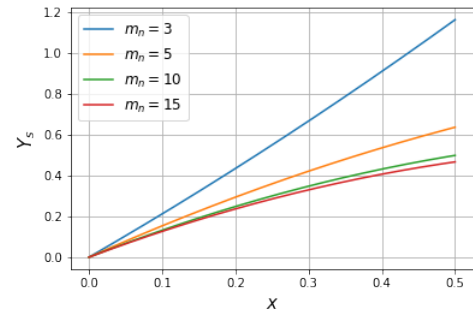


Рисунок 3 — Распределение  $C_p$  на теле при  $\tau = 60^\circ$





а)



б)

Рисунок 4 — Ударная волна  $y_s$  при: а)  $\tau = 30^\circ$   
 б)  $\tau = 45^\circ$ ;

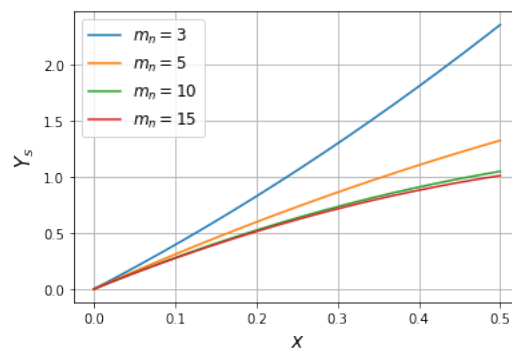


Рисунок 5 — Ударная волна  $y_s$  при  $\tau = 60^\circ$

**Заключение.** В данной бакалаврской работе была смоделирована основная система уравнений и граничные условия для задачи гиперзвукового обтекания клина под нулевым углом атаки свободнорасширяющимся потоком совершенного газа. Был осуществлён переход в новую систему координат и получена новая система уравнений. Также получены нулевое, первое и второе приближения для каждого случая. Были проанализированы решения для различных частных случаев.