

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

**ПОКАЗАТЕЛЬ ВЫПУКЛОСТИ И ДЮРАЦИЯ ОБЛИГАЦИИ**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 4 курса 412 группы

направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Тайбуриевой Жамал Алибековны

Научный руководитель

доцент, к. ф.-м. н.

\_\_\_\_\_

Е. В. Гудошникова

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент

\_\_\_\_\_

С. П. Сидоров

Саратов 2022

## ВВЕДЕНИЕ

В связи с особой ролью безрисковых бумаг на фондовом рынке изучение инвестиций в безрисковые ценные бумаги с помощью математических методов представляет большой практический интерес. Современная экономика устроена так, что не может существовать без математического моделирования, на основе которого с помощью математических методов осуществляется прогнозирование. Инвестирование в ценные бумаги без кредитного риска является предметом изучения специального раздела финансового анализа - анализа финансовых инвестиций в условиях определённости. Основой данной теории является предположение о том, что поступление будущих доходов точно в срок и в полном объёме считается гарантированным. Основным предметом изучения - инвестирование в облигации. На рынках финансовых инструментов с фиксированными доходами без кредитного риска основным фактором риска является рыночный процентный риск - возможность изменения цены облигации вследствие изменения рыночных процентных ставок. Цены различных облигаций по-разному реагируют на изменения процентных ставок. Чувствительность цены облигации к изменению рыночной процентной ставки называют процентным риском облигации. Каждая облигация характеризуется собственным процентным риском и представляет особый интерес для инвестора

**Актуальность темы** заключается в том, что необходимо раскрыть проблему возникновения рисков у инвесторов и определить каким образом инвестор может минимизировать свои риски. Облигации по сравнению с другими финансовыми инструментами считаются менее рискованными.

**Цель данной работы** - изучение показателя выпуклости и дюрации облигации, исследование их влияния на меру риска инвестора, а также анализ свойств облигаций.

**Объект исследования** – облигации с выбранными значениями.

**Предмет исследования** - свойства дюрации и показателя выпуклости облигации.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

-Изучить основную информацию о дюрации и показателя выпуклости облигации.

-Изучить иммунизирующее свойство дюрации облигации.

-Провести анализ характеристик облигации.

## Основное содержание работы

**Во введении** формулируется цель бакалаврской работы и решаемые задачи, дается краткое содержание каждого раздела.

**В первом разделе** рассматриваем основную информацию, теоретические основы понятия дюрации, ее виды и показатель выпуклости.

Дюрация- это мера чувствительности цены облигации или другого долгового инструмента к изменению процентных ставок. Дюрацию облигации легко спутать с ее сроком или временем погашения, потому что некоторые типы измерений дюрации также рассчитываются в годах. Однако срок действия облигации является линейной мерой лет до погашения основного долга; он не меняется в зависимости от условий процентной ставки. Дюрация, с другой стороны, не линейна и ускоряется по мере уменьшения времени до окончания срока облигации.

Существует несколько видов дюрации:

1. дюрация Маколея
2. модифицированная дюрация
3. дюрация Фишера-Вайля

Рассчитывается дюрация Маколея по следующей формуле:

$$D = \sum_{i=1}^n t_i \frac{C_i(0)}{P(r)} \quad (1)$$

где  $C_i(0)$  - текущие стоимости выплат,  $P(r)$ -рыночная цена облигации

Данная дюрация Маколея показывает за какое время(в годах) облигация окупит себя с учетом ставки дисконтирования.

Есть второй вид - модифицированная дюрация(MD):

$$MD = \frac{D}{\left(1 + \frac{YTM}{n}\right)}, \quad (2)$$

где  $n$  - количество купонных платежей в год,  $YTM$  - доходность к погашению

Модифицированная дюрация позволяет оценить на сколько изменится цена облигации при изменении доходности и наоборот.

Мера выпуклости представляет собой вторую производную. Рассчитывается мера выпуклости по данной формуле:

$$C = \sum_{i=1}^n t_i (t_i + 1) \frac{C_i(0)}{P(r)} \quad (3)$$

### **Факторы, влияющие на дюрацию купонной облигации**

Можно выделить 6 основных факторов, влияющих на величину дюрации:

- Срок до погашения;
- Купонная ставка;
- Накопленные проценты;
- Доходность до погашения;
- Отчисления в фонд погашения;
- Право досрочного погашения;

Через  $x(t)$  обозначим кривую спот-ставок (с непрерывным сложным процентом), т.е.  $p(t) = e^{x(t)t}$ . Предположим, что любая спот-ставка может быть представлена как сумма краткосрочной ставки  $x$  и спреда  $s(t)$ , зависящего от времени  $t$ :

$$x(t) = x + s(t),$$

причем величины спредов постоянны. Последнее означает, что возможны исключительно параллельные сдвиги кривой спот-ставок - когда ставки для всех сроков меняются на одинаковую величину. Величина:

$$\frac{dP}{dx} = - \sum_{j=1}^n t_j e^{-x(t)t} C_j$$

является аналогом дюрации в денежном выражении и измеряет абсолютное изменение цены инструмента в ответ на параллельный сдвиг кривой спот-ставок. Дюрацией Фишера-Вайля называют величину относительного изменения цены в ответ на параллельное изменение структуры процентных ста-

ВОК:

$$D = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dx} = \frac{\sum_{j=1}^n t_j p(t_j) C_j}{\sum_{j=1}^n p(t_j) C_j}.$$

Дюрация Фишера-Вайля, как и дюрация Маколея, измеряют средний срок потока платежей, но, в отличие от последней, в качестве ставок дисконтирования используются спот-ставки  $x(t_j)$ .

### **Свойства дюрации и показателя выпуклости облигации.**

1. Дюрация облигации не превосходит срока до ее погашения  $T$ .
2. Дюрация чисто дисконтной облигации равна сроку до ее погашения.

Действительно, для чисто дисконтной облигации имеем

3. Если облигация не является чисто дисконтной, то чем больше внутренняя доходность облигации, тем меньше ее дюрация и показатель выпуклости.

4. Если все платежи по облигации отсрочить на  $t_0$  лет, не изменяя ее внутренней доходности  $r$ , то дюрация облигации увеличится на  $t_0$  лет, а показатель выпуклости — на  $(t_0^2 + 2t_0D + t_0)$  лет<sup>2</sup>.

5. Если до погашения облигации остается больше одного купонного периода, то при заданном значении внутренней доходности  $r$  дюрация облигации и показатель выпуклости тем больше, чем меньше купонная ставка.

6. Зависимость дюрации облигации от срока до погашения при неизменных  $f$  и  $r$ , где  $f$  и  $r$  — купонная ставка и внутренняя доходность облигации соответственно, сформулируем в виде следующих утверждений. Пусть  $D_n$  — дюрация облигации, платежи по которой выплачиваются  $m$  раз в год и до погашения которой остается  $n$  купонных периодов. Тогда:

6а.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n \approx \frac{r + m}{rm}$$

6б. Если  $f \geq r$ , то последовательность  $\{D_n\}$  является возрастающей.

6с. Если  $f < r$ , то можно указать число  $n_0$  такое, что для облигаций с числом периодов до погашения  $n < n_0$  последовательность  $\{D_n\}$  является возрастающей.

**Во втором разделе** подробно рассматривается одно из важных свойств облигации, которое поможет снизить риски с помощью дюрации. Иммуниза-

ция является способом уменьшения рисков, минимизируя влияние процентных ставок на чистую стоимость с течением времени. Используя этот метод, инвестор может гарантировать максимально низкое влияние ставок на стоимость своего портфеля.

**Определение 1.** *Стоимость инвестиции в облигацию в момент  $t \in [0, T]$  - это стоимость потока платежей по облигации  $C_1, C_2, \dots, C_n$  в момент  $t$ .*

**Определение 2.** *Стоимость потока платежей  $P(t)$  в момент  $t \in [0, T]$  - это сумма всех членов потока, приведенных к моменту времени  $t$ .*

Таким образом, стоимость инвестиции в облигацию в момент  $t$  имеет две составляющие - результат реинвестирования поступивших до момента  $t$  платежей по облигации:

$$R_t = \sum_{k=1}^m C_k F(t_k, t)$$

и рыночную цену облигации в момент  $t$  :

$$P_t = \sum_{k=m+1}^n C_k v(t, t_k).$$

Рассмотрим стоимость инвестиции в облигацию через  $t$  лет после покупки для двух случаев:

1) временная структура процентных ставок остается неизменной до погашения облигации;

2) сразу после покупки облигации безрисковые процентные ставки для всех сроков мгновенно изменились на одну и ту же величину и стали равными  $\tilde{r}$ , а затем уже не менялись.

Стоимость инвестиции в облигацию в момент  $t$  в первом случае называют планируемой и обозначают через  $P(r, t)$ , во втором случае фактической и обозначают через  $P(\tilde{r}, t)$ .

### **Свойства планируемой и фактической стоимостей инвестиции.**

1.  $P(r, t)$  и  $P(\tilde{r}, t)$  - непрерывные возрастающие функции времени:

$$P(r, t) = P(r)(1 + r)^t, \quad (4)$$

$$P(\tilde{r}, t) = P(\tilde{r})(1 + \tilde{r})^t. \quad (5)$$

2. Существует и притом единственный момент времени  $t^*$ , когда фактическая стоимость инвестиции равна планируемой.

### **Основная теорема о иммунизации:**

Пусть  $D = D(r)$  — дюрация облигации в момент  $t = 0$ , когда безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны  $r$ . Тогда в момент времени, равный дюрации облигации,  $t = D$ , фактическая стоимость инвестиции в облигацию не меньше планируемой, т.е.

$$P(\tilde{r}, D) \geq P(r, D) \quad (6)$$

для любых значений  $\tilde{r}$ .

Исходя из теоремы выше можно сформулировать **иммунизирующее свойство дюрации** облигации:

Если в момент инвестирования  $t = 0$  безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы. То в момент времени, равный дюрации облигации, инвестиция в облигацию иммунизирована (защищена) против изменений безрисковых процентных ставок сразу после  $t = 0$  на одну и ту же величину (или до момента  $t_1$  — первого платежа по облигации, в чем несложно убедиться). Таким образом, иммунизирующее свойство дюрации облигации имеет место при условии горизонтальности кривой доходностей и параллельности ее сдвигов.

**В третьем разделе** описывается процесс численной реализации вычисления характеристик облигации с помощью языка программирования Python.

Программа рассчитывает планируемую и фактическую стоимости инвестиции, дюрацию, а также моменты времени, когда планируемая и фактическая стоимости инвестиции совпадают. Эти характеристики помогут вычислить иммунизирующее свойство дюрации.

Программа написана на языке Python, который универсален, поэтому подходит для решения разнообразных задач и для многих платформ. Также с помощью этого объектно-ориентированного языка возможно ввести ограни-

чения на ввод и вывод. При вводе данных есть ограничения, на вход принимаются только типы данных: integer(целочисленный) и float(вещественный), иначе программа выдает ошибку.

Иммунизация облигаций – это инвестиционная стратегия, используемая для минимизации риска изменения процентных ставок облигаций путем корректировки дюрации портфеля инвестиций с целью соответствия их временному горизонту инвестора.

Для расчета используются следующие входные данные:

- Процент купонной облигации
- Номинал облигации в д.е.
- Времы выплат в годах
- Безрисковые процентные ставки
- Изменения процентных ставок

Например, ввели следующие данные:

Дана 10% - ная купонная облигация номиналом 100 д.е., по которой ежегодно обещают производить купонные выплаты в течение трех лет.( $t=3$ ) Безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны 10% годовых. Сразу после покупки облигации процентные ставки а) снизились до 9% годовых; б) увеличились до 11% годовых.

Промежуточным результатом является таблица значений расписанная по годам, в которой рассчитаны цены  $P(r)$  и дюрации облигации  $D = D(r)$  на момент покупки облигации, рассчитанные по введенным данным.

№	term	amount	C <sub>1(t)</sub>			C <sub>1(t)</sub> / P(r)	t <sub>1</sub> * C <sub>1(t)</sub> / P(r)
			r = 0.1000	r = 0.0900	r = 0.1100		
1.0000	1.0000	10.0000	9.0909	9.1743	9.0090	0.09091	0.0909
2.0000	2.0000	10.0000	8.2645	8.4168	8.1162	0.08264	0.1653
3.0000	3.0000	110.0000	82.6446	84.9482	80.4311	0.82645	2.4793
Sum:		100.0000	100.5313	97.5563	1.0000	2.7355	

Рисунок 1 – Таблица значений

Отсюда следует, что при покупке облигации дюрация будет равна  $D = 4.1168$  лет, а цена  $P(0, 15) = 240.1547$  д.е. При изменении процентов  $P(0, 10) = 240.6449$  д.е. и  $P(0, 20) = 168, 1846$  д.е. – оценки облигации в момент времени  $t = 0$ , соответствующие новой временной структуре процентных ставок после

$t = 0$ .

В результате планируемая и фактическая стоимости инвестиции в облигацию на момент времени  $t = D$  равны

```
Планируемая стоимость инвестиции:  
P(0.1, D = 2.7355) = 129.78701  
Фактические стоимости:  
P(0.9, D = 2.7355) = 139.32438  
P(0.11, D = 2.7355) = 129.78902  
>>>
```

Рисунок 2 – Результат

В обоих случаях фактическая стоимость инвестиции в момент  $t = D$  больше планируемой. В первом случае в момент  $t = D$  снижение ставки реинвестирования компенсировано ростом рыночной цены облигации в момент  $t = D$  по сравнению с планируемой. Во втором случае снижение рыночной цены в момент  $t = D$  вследствие роста процентных ставок компенсировано возросшей ставкой реинвестирования по сравнению с планируемой.

Далее приведены моменты времени, когда планируемая и фактическая стоимости инвестиции совпадают:

```
Моменты времени, когда планируемая и фактическая стоимости инвестиции совпадают:  
t^(0.09) = 2.73725  
t^(0.11) = 2.73383  
>>> |
```

Рисунок 3 – Результат

Отсюда следует, что свойство иммунизации выполняется и следующее неравенство:  $t^*(0, 11) < D < t^*(0, 09)$  выполняется, что позволяет иммунизировать данную облигацию.

**В заключении** описываются этапы проделанной работы и сделанные выводы.

В ходе исследования была достигнута цель выпускной квалификационной работы. Дюрация и показатель выпуклости облигации действительно

могут служить мерой риска для инвестора.

В ходе работы были разобраны основные данные о дюрации и показателе выпуклости облигации. А также рассмотрены все их свойства, влияющие на риски облигаций. Также, изучено иммунизирующее свойство дюрации облигации, которое используется для минимизации риска изменения процентных ставок облигаций. Дюрация и показатель выпуклости являются мерой риска. Для того, чтобы инвестор мог выбрать менее рисковую облигацию, ему следует опираться на значение дюрации. Именно дюрация покажет насколько рискованнее вкладывать свои средства в данную облигацию по сравнению с другими.

**В приложении** приводится код, вычисляющий характеристики облигаций с помощью языка Python.