МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической теории
упругости и биомеханики

Распространение планарной краевой волны в двухслойной пластине

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы

направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Алешникова Эдуарда Эдуардовича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н. ____________________ Вильде М.В.

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ____________________ Коссович Л.Ю.

Саратов 2022

Введение

Настоящая бакалаврская работа посвящена изучению распространения планарной краевой волны в двухслойной пластине на основе модели обобщенного плоского напряженного состояния.

Актуальность темы. Краевыми волнами называются волны, распространяющиеся вдоль края пластины и затухающие в направлении, перпендикулярном краю [1-4]. Если перемещение в нормальном направлении значительно меньше, чем перемещения в направлениях, параллельных срединной плоскости, то такая волна называется планарной краевой волной. В случае низких частот для описания планарной краевой волны можно использовать теорию обобщенного плоского напряженного состояния пластины. Краевые волны могут быть использованы для обнаружения дефектов на краю пластины или оболочки.

В настоящее время краевые волны достаточно полно исследованы для случая однородной пластины. Аналогичные волны в слоистых пластинах изучались, в основном, для случая изгибной краевой волны, при этом планарная волна не рассматривалась.

Целью данной работы является изучение планарной краевой волны в двухслойной пластине на основе теории обобщенного плоского напряженного состояния.

Задачи работы заключаются в следующем:

1. Изучить теорию обобщенного плоского напряженного состояния пластин.
2. Получить уравнения теории обобщенного плоского напряженного состояния для двухслойной пластины.
3. Вывести дисперсионное уравнение для краевой волны в двухслойной пластине, колебания которой описываются теорией обобщенного плоского напряженного состояния.
4. Решить задачу о возбуждении краевой волны касательной нагрузкой, приложенной на торце

Материалами исследования являются теория обобщенного плоского напряженного состояния двухслойной пластины и задача о распространении планарной краевой волны.

Научная значимость работы состоит в изучении влияния соотношения параметров слоев на скорость и профиль планарной краевой волны.

Структура и объем работы. Бакалаврская работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка используемых источников, включающего 20 наименований. Работа изложена на 38 листах машинописного текста, содержит 21 рисунок.

Основное содержание работы

Во *введении* описывается актуальность темы, формулируется цель исследования и ставятся задачи.

В *первом разделе* построена теория обобщенного плоского напряженного состояния для случая двухслойной пластины. Рассматривается пластина, изображенная на рисунке 1.

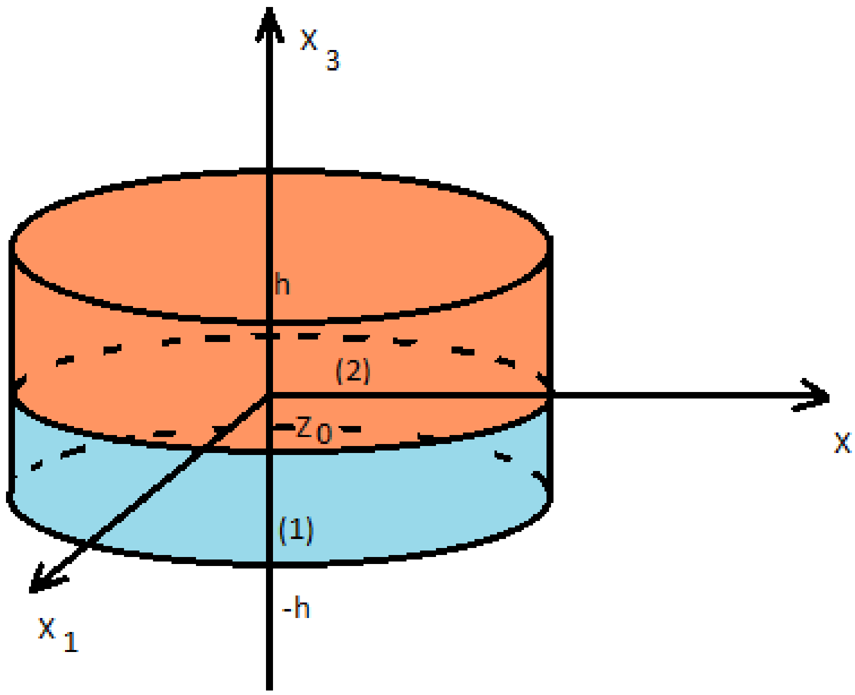

Рисунок 1 – Двуслойная пластина

Вводятся обозначения:

k=1,2 – номер слоя;

$2h_k$ –толщина k-того слоя;

$2h$ – толщина пластины (h= $h_1 + h_2$);

$x_3 = z_0$ – поверхность контакта ($z_0 = h_1 + h_2$).

Механические параметры слоев :

E_k -модуль Юнга,

ν_k - коэффицент Пуассона,

ρ_k -плотность.

После усреднения получаем уравнения равновесия

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_{11}^{*}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}^{*}}{\partial x_2}+X^{*}=0,\\ \frac{\partial\sigma_{12}^{*}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}^{*}}{\partial x_2}+Y^{*}=0,\end{gathered}\tag{1}$$

где σ_{ij}^{*} – средние напряжения, для которых получены уравнения состояния

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{*}&=\frac{1}{2h}\left(B_1\varepsilon_{11}+B_2\varepsilon_{22}\right),\\ \sigma_{22}^{*}&=\frac{1}{2h}\left(B_2\varepsilon_{11}+B_1\varepsilon_{22}\right),\\ \sigma_{12}^{*}&=\frac{B_3}{2h}\cdot\varepsilon_{12}.\end{aligned}\tag{2}$$

В (2) введены жесткости

$$\begin{aligned}B_1&=\frac{2h_1E_1}{1-\nu_1^2}+\frac{2h_2E_2}{1-\nu_2^2},\\ B_2&=\frac{2h_1E_1\nu_1}{1-\nu_1^2}+\frac{2h_2E_2\nu_2}{1-\nu_2^2}\end{aligned}\tag{3}$$

и $B_3=\dfrac{B_1-B_2}{2}$. Звездочки далее опущены.

Рассмотрим теперь постановку задачи о колебаниях полубесконечной пластины толщины $2h$, срединная плоскость которой занимает область $x_1 \le 0$, $-\infty < x_2 < \infty$ (см. рисунок 2).

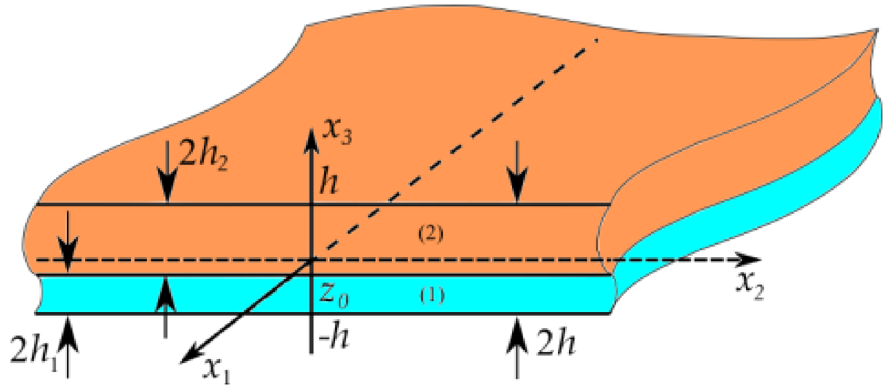

Рисунок 2 – Полубесконечная двуслойная пластина

Заменяя в (1) объемные силы на силы инерции, получим уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}-\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=0,$$
$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}-\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=0, \tag{4}$$

где де $\rho=\frac{1}{2h}\left(2h_1\rho_1+2h_2\rho_2\right)$ – средняя плотность. На торце пластины ставятся условия свободного края

$$\sigma_{11}=0,\quad \sigma_{12}=0. \tag{5}$$

Уравнения (4) преобразуются к уравнениям для волновых потенциалов

$$\Delta\varphi-\frac{(1-\nu)}{2c_2^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0,\quad \Delta\psi-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0, \tag{6}$$

где $c_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, $\mu=\frac{B_3}{2h}$ – приведеннй модуль сдвига. Выражения напряжений через потенциалы имеют вид

$$\sigma_{11}=2\mu\left(\frac{\rho}{2\mu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\right),$$
$$\sigma_{12}=2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}-\frac{\rho}{2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right). \tag{7}$$

Во *втором разделе* выведено дисперсионное уравнение планарной краевой волны. Решение задачи, поставленной в первом разделе, ищется в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= C_1 e^{\lambda_1 x_1} e^{(\omega t - k x_2)}, \\ \psi &= C_2 e^{\lambda_2 x_1} e^{(\omega t - k x_2)}, \end{aligned} \tag{8}$$

где ω – круговая частота, χ – волновое число. Подставляя (8) в (6), находим $\lambda_1^2 = k^2 - \frac{(1-\nu)}{2c_2^2}\omega^2$, $\lambda_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}$. Удовлетворяя граничным условиям, получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных C_1, C_2. Приравнивая определитель этой системы нулю, приходим к дисперсионному уравнению

$$\left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)^2 - 4k^2 \sqrt{k^2 - \frac{(1-\nu)}{2c_2^2}\omega^2}\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}} = 0. \tag{9}$$

Разделим уравнение на k^4 и введем обозначение $c = \frac{\omega}{k}$ (фазовая скорость волны). В результате получим уравнение, по форме совпадающее с уравнением для скорости волны Рэлея [5]

$$\left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^2 - 4\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}\frac{(1-\nu)}{2}}\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}} = 0. \tag{10}$$

Представлены результаты численных расчетов скорости краевой волны в зависимости от параметров двухслойной пластины. Здесь $h = 2h_2$ – толщина второго слоя, E_{St} – модуль Юнга первого слоя, который принят равным модулю Юнга стали, ρ_{St} - плотность первого слоя, которая равна плотности стали. Рассмотрены различные соотношения параметров. На рисунке 3 приведен пример для случая, когда модуль Юнга второго слоя в два раза больше, чем модуль Юнга первого.

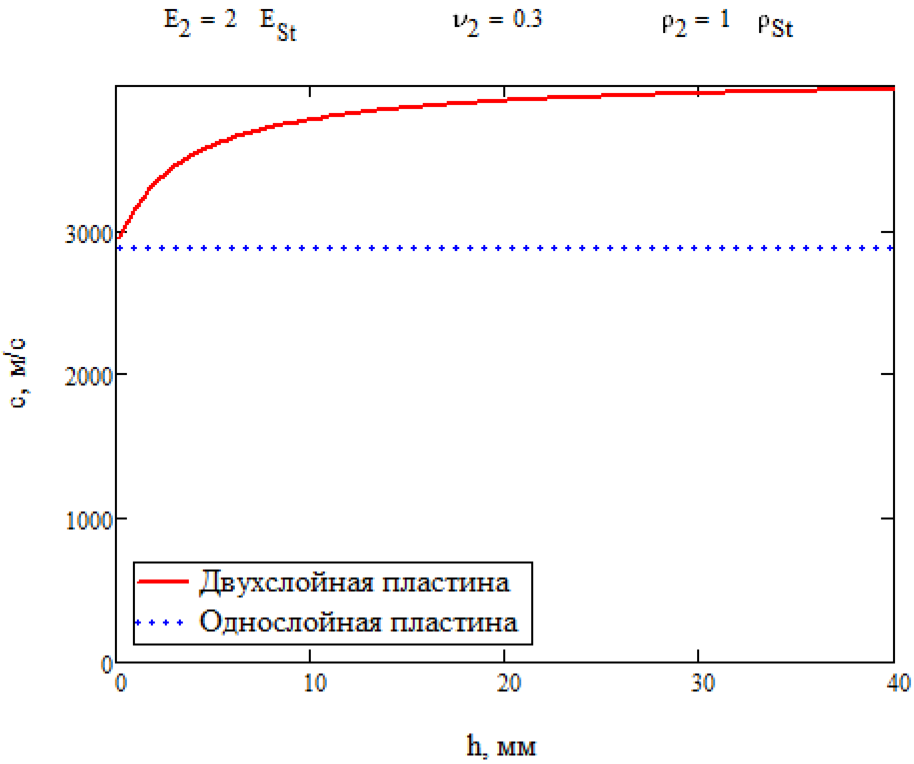

Рисунок 3 – Двухслойная пластина с модулем Юнга второго слоя в 2 раза больше, чем первого

В *третьем разделе* решена нестационарная задача о действии касательной нагрузки на торце двухслойной пластины.

Сформулируем граничные условия на краю $x_1 = 0$, моделирующие действие касательной нагрузки, имеют вид

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{12} = Q(x_2, t). \tag{11}$$

Начальные условия приняты в виде

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \tag{12}$$

Для решения поставленной задачи применяются интегральные преобразования Лапласа и Фурье [6]. Решение задачи в изображениях для скорости нормального перемещения частиц на торце пластины имеет вид

$$v^{LF} = -\frac{i\chi s Q^{LF}\left(\lambda_1\lambda_2 + \chi^2 + \dfrac{s^2}{2c_2^2}\right)}{\left(\chi^2 + \dfrac{s^2}{2c_2^2}\right)^2 - \chi^2\lambda_1\lambda_2}. \quad (13)$$

При обращении преобразования Лапласа ограничимся вычислением вклада планарной краевой волны, который соответствует вычетам [6] в полюсах $s = \pm ic\chi$:

$$v^F = \operatorname*{Res}_{s=\pm ic\chi} v^{LF} e^{st} \quad (14)$$

Применяя формулу обращения, получим оригинал решения в виде

$$v = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} v^F \cos\chi x_2 d\chi. \quad (15)$$

Приведены результаты расчетов профиля скорости в момент времени $t = 120$ мкс для различных значений параметров двухслойной пластины. Нагрузка $Q(x_2, t)$ принята в виде, взятом из работы [4].

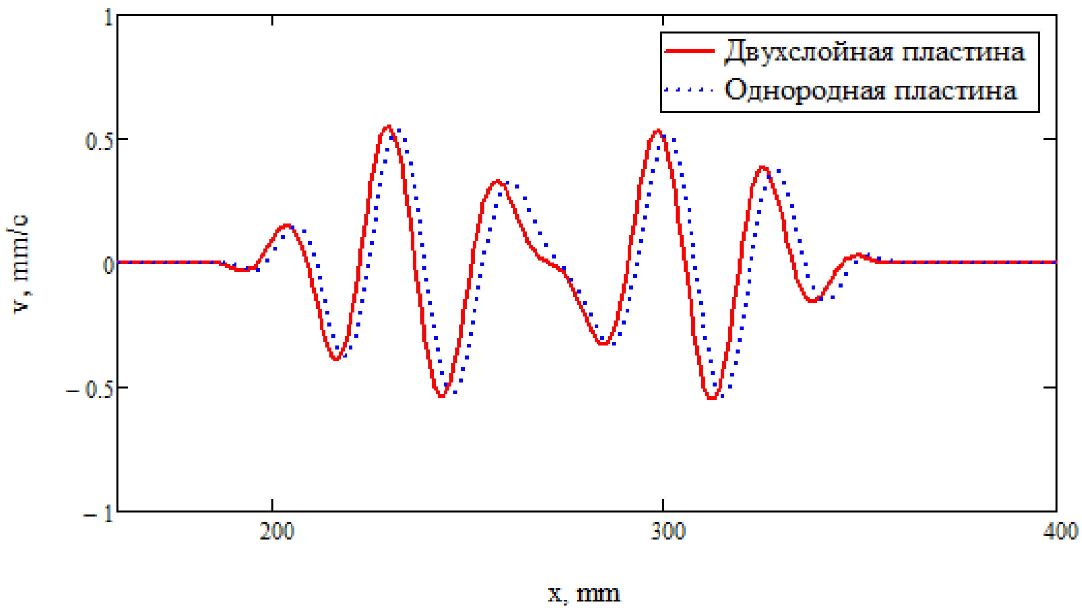

Рисунок 4 – Сравнение профилей волны при уменьшении модуля Юнга на 20% в слое толщиной 0.2 мм

Считается, что первый слой пластины выполнен из стали, а параметры второго слоя изменяются. Например, второй слой может представлять собой ту же сталь, модуль Юнга которой уменьшился вследствие деградации (окисление и т.п.). Также рассматриваются различные соотношения толщин. На рисунке 4 приведено сравнение профилей волны однослойной пластины и двухслойной пластины при h_1 =1.8 мм, h_2 =0.1 мм, $E_2 = 0.8E_{St}$. Как видно из рисунка, уменьшение модуля Юнга приводит к запаздыванию волны, которое можно обнаружить в эксперименте. Приведены результаты аналогичных расчетов и при других соотношениях параметров.

Заключение.

В ходе данной работы были выведены уравнения теории обобщенного плоского напряженного состояния для случая двухслойной пластины. Рассмотрена задача о колебаниях полубесконечной пластины, на краю которой ставятся условия свободного края. Показано, что путем введения приведенного модуля сдвига и приведенного коэффициента Пуассона задача может быть сведена к виду, математически аналогичному задаче для однородной пластины. Выведено дисперсионное уравнение для планарной краевой волны в двухслойной пластине в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. Получено уравнение для определения скорости волны, по форме аналогичное уравнению для определения скорости волны Рэлея. Показано, что, как и в случае однородной пластины, в данном приближении краевая волна не обладает дисперсией. Исследовано влияние параметров слоев на скорость волны. Рассмотрена задача о действии касательной нагрузки и получена составляющая решения, описывающая вклад краевой волны. Построены графики профиля волны, иллюстрирующие влияние параметров слоев.

Список использованных источников

1. Коненков, Ю. К. Об изгибной волне «рэлеевского» типа / Ю. К. Коненков // Акустический журнал. – 1960. - Т.6. Вып. 1. - С. 124-126.

2. Zernov, V. Three-dimensional edge waves in plates / V. Zernov, J. Kaplunov // Proceedings of the Royal Society of London. - 2008. - С. 301-318.

3. Вильде, М. В. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах / М. В. Вильде, Ю. Д. Каплунов, Л. Ю. Коссович. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 280 с.

4. Wilde, M. Experimental and theoretical investigation of transient edge waves excited by a piezoelectric transducer bonded to the edge of a thick elastic plate / M. Wilde, M. Golub, A. Eremin // Journal of Sound and Vibration. – 2019. - № 441. - С. 26-49.

5. Rayleigh, J. On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter // Proc. Lond. Math. Soc. – V. 20. № 357. - 1888. - С. 225-234.

6. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат / – 4-е изд.– М.: Наука, 1972.