

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математической теории упругости и биомеханики

**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В
ВЯЗКОУПРУГОМ СТЕРЖНЕ: АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы

направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование
механико-математического факультета

Желудкова Ивана Васильевича

Научный руководитель

доцент кафедры МТУи БМ,

к.ф.-м.н., доцент

Н.С. Анофрикова

Зав. кафедрой,

профессор, д.ф.-м.н.

Л. Ю. Коссович

Саратов 2022

Введение

Работа посвящена исследованию применимости асимптотических методов к решению задачи о распространении нестационарной продольной волны в тонком полубесконечном вязкоупругом стержне.

Выбранная задача актуальна, так как многие элементы различных конструкций имеют стержневую форму и часто они выполняются из полимерных материалов, поведение которых моделируется различными вязкоупругими моделями. Кроме того, конструкции часто подвергаются различным динамическим нагрузкам, в том числе ударным, в результате чего в элементах конструкций возникают нестационарные волны.

Исследованию процессов распространения нестационарных волн в вязкоупругих стержневых элементах конструкций посвящены многочисленные работы.

Чаще всего получить точное аналитическое решение таких задач не представляется возможным, поэтому исследователи прибегают к различным приближенным методам: численным или аналитическим.

Одним из распространенных подходов к нахождению приближенного аналитического решения является применение асимптотических методов. При этом в части случаев строятся приближенные уравнения, описывающие исследуемый процесс, в других случаях строят приближенные решения точных уравнений. Есть подходы, совмещающие оба случая.

Целью бакалаврской работы является исследование применимости асимптотических методов к построению решения задачи, описывающей распространение нестационарной продольной волны в тонком полубесконечном вязкоупругом стержне при приложении к его торцу ударной нагрузки.

Задачами выполняемой работы являются:

- рассмотреть различные модели тел, используемые в теории вязкоупругости;

- составить математическую модель, описывающую поведение полубесконечного вязкоупругого стержня под действием ударной продольной нагрузки;
- проанализировать построенную математическую модель и найти аналитическое решение с помощью интегрального преобразования Лапласа;
- найти оригинал изображения решения с помощью метода контурного интегрирования;
- провести анализ полученного решения на примере напряжения;
- найти асимптотику решения для малых значений параметра интегрального преобразования Лапласа;
- найти асимптотику решения для больших значений интегрального преобразования Лапласа;
- сравнить полученные асимптотики с точным решением, установить области применимости полученных асимптотик.

Структура и объём работы

Бакалаврская работа состоит из введения, трех разделов, заключения и содержит 38 страниц. Список использованных источников включает 22 наименования.

Раздел 1. Постановка задачи.

Раздел 2. Точное решение задачи.

Раздел 3. Асимптотические методы решения задачи.

Практическая значимость работы состоит в расширении области применимости асимптотических методов к исследованию нестационарного напряженно-деформированного состояния тонких вязкоупругих стержней.

Основное содержание работы

Работа посвящена исследованию процесса распространения продольной одномерной волны в вязкоупругом тонком полубесконечном стержне, подверженном ударному воздействию на его торец, с помощью точных и приближенных аналитических методов.

Во введении описана актуальность поставленной задачи, обоснована причина, по которой стоит использовать асимптотические методы к решению задач подобного вида, сформулированы цель и задачи бакалаврской работы.

Первый раздел посвящен постановке задачи о распространении нестационарной продольной одномерной волны в полубесконечном стержне, возникающей в результате приложения к его торцу ударного продольного воздействия.

Вначале приведены основные понятия и соотношения теории вязкоупругости. Рассмотрены механические модели, которые наглядно демонстрируют поведение различных вязкоупругих материалов. Выведены дифференциальные уравнения состояния для наиболее часто используемых моделей. На основании анализа проявляемых свойств выбрана оптимальная модель для описания поведения материала стержня: модель Кельвина, которая качественно правильно описывает такие явления, присущие вязкоупругим материалам, как ползучесть и релаксацию.

Далее произведена математическая постановка задачи о распространении нестационарной продольной волны в вязкоупругом тонком полубесконечном стержне.

Записана система исходных уравнений, включающая одномерное дифференциальное уравнение движения для стержня, уравнение состояния для выбранной модели вязкоупругого поведения, соотношение, связывающее деформацию с перемещением. Данная система уравнений является замкнутой относительно трех функций: напряжения, деформации и перемещения.

К полученной системе уравнений добавлены граничное и начальные условия.

Граничное условие задано для функции напряжения и моделирует приложение к торцу ударной продольной нагрузки. Ударная нагрузка промоделирована с помощью функции Хевисайда.

Добавлены соответствующие механической постановке задачи нулевые начальные условия для функции напряжения.

Далее осуществлен переход от системы трех уравнений относительно трех неизвестных функций к одному разрешающему уравнению относительно функции напряжения.

Введение безразмерных переменных, параметров материала и искомой функции позволил записать исходную задачу в более удобном для дальнейших выкладок виде.

Во втором разделе поставленная задача решена методом интегрального преобразования Лапласа по переменной времени.

В рассматриваемом случае задача в изображениях представляла собой задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка линейного однородного с постоянными коэффициентами. В результате решения задачи в изображениях было найдено изображение решения для функции напряжения.

В рамках исследуемой модели стало возможным построение точного решения, поэтому найденное решение может быть использовано для исследования областей применимости различных приближенных решений.

Для обращения изображения решения применена формула Меллина. Для нахождения оригинала решения применен метод контурного интегрирования.

Общая идея метода заключается в следующем: исходный контур интегрирования заменяется таким контуром, чтобы интеграл по некоторым участкам контура совпадал с искомым определенным интегралом – по крайней мере, с точностью до постоянного множителя. Интегралы по остальным участкам контура должны вычисляться.

Произведен анализ полученного решения, позволивший сделать выводы о влиянии параметров материала на поведение решения, а также на поведение решения с течением времени.

Были построены графики для безразмерной функции напряжения относительно безразмерной пространственной координаты для различных значений времени ползучести при фиксированном времени релаксации и временной переменной. Анализ графиков показал, что при увеличении времени ползучести напряжение быстрее затухает при удалении от торца.

Сравнение графиков для безразмерной функции напряжения относительно безразмерной пространственной координаты для различных значений времени релаксации при фиксированных времени ползучести и временной переменной позволило заметить, что чем меньше время релаксации при фиксированном времени ползучести, тем быстрее убывает напряжение, чем больше время релаксации, тем напряжение медленнее убывает, и закон стремится к упругому линейному случаю.

Из сравнения графиков, построенных для безразмерной функции напряжения относительно безразмерной пространственной координаты, при фиксированных времени ползучести и времени релаксации для разных значений времени сделан вывод об изменениях функции напряжения с ростом времени.

Полученные результаты согласуются с механической картиной поведения вязкоупругих материалов.

В последнем разделе работы были применены асимптотические методы исследования. Данные методы позволяют найти удовлетворительные с точки зрения практики аналитические решения для больших и/или малых значений каких-либо параметров задачи в тех случаях, когда точное решение задачи найти невозможно. При применении к решению задачи метода интегрального преобразования Лапласа наиболее сложным является этап нахождения оригинала по известному изображению решения.

Полученное в настоящей работе точное решение можно использовать для верификации решений, найденных различными асимптотическими методами, а также для нахождения областей применимости приближенных асимптотических методов.

В настоящей бакалаврской работе были найдены асимптотики точного решения для больших и малых значений интегрального преобразования Лапласа.

Для нахождения асимптотики, описывающей поведение решения при больших значениях времени, изображение решения задачи было разложено в ряд по положительным степеням параметра интегрального преобразования Лапласа в предположении, что последний стремится к нулю. Полученный ряд был обращен почленно с помощью формулы таблиц интегрального преобразования Лапласа и теоремы запаздывания. Найден асимптотически главный член разложения, оригинал которого представляет функцию Хевисайда. Установлено, что добавление следующих членов асимптотического разложения не меняет оригинал. Сравнение полученного решения с решением, полученным с помощью метода контурного интегрирования, показало, что разложение по положительным степеням параметра интегрального преобразования Лапласа не позволяет получить эффективное решение для исследуемой модели.

Для нахождения асимптотики, описывающей поведение решения при больших значениях времени, изображение решения было разложено в ряд по отрицательным степеням параметра интегрального преобразования Лапласа в предположении, что последний стремится к бесконечности.

Обращение произведено двумя способами.

Согласно первому – в показателе степени экспоненты было оставлено только слагаемое первого порядка относительно параметра интегрального преобразования. Полученное изображение обращено почленно с помощью формул таблиц интегрального преобразования Лапласа и теоремы запаздывания. Решение получили в виде степенного ряда.

Во втором случае был применен модифицированный метод прифронтной асимптотики, для этого в показателе степени экспоненты были оставлены слагаемые первого и минус первого порядка относительно параметра интегрального преобразования Лапласа. Полученное изображение

обращено почленно с помощью формул таблиц интегрального преобразования Лапласа и теоремы запаздывания. Оригинал решения получен в виде модифицированной функции Бесселя.

Графики точного решения и двух его асимптотик, построенные для безразмерной функции напряжения относительно безразмерной пространственной координаты, при фиксированных времени ползучести и времени релаксации для разных значений времени, позволили сделать вывод о согласованности точного и приближенных решений. Анализ графиков показал, что асимптотики совпадают с точным решением в начальный момент времени, а с увеличением времени они приближают точное решение только в окрестности торца. Причём асимптотики, полученные разными способами, дают одинаковые приближение, поэтому при дальнейших исследованиях может использоваться любая из них.

Таким образом, асимптотики, полученные при больших значениях параметра интегрального преобразования Лапласа, могут использоваться в качестве аналитического решения для времен, сравнимых со временем прохождения фронтом волны расстояния характерной длины стержня в тех случаях, когда требуется построить аналитическое решение задачи, а нахождение точного решения не возможно, например, при усложнении уравнений состояния.

Заключение. При написании выпускной квалификационной работы было изучено явление распространения продольной волны в тонком вязкоупругом стержне при приложении к его торцу ударной нагрузки.

Были изучены различные способы построения механических моделей вязкоупругого поведения и выведены дифференциальные уравнения состояния для вязкоупругих сред. Выбрана оптимальная модель для описания вязкоупругого поведения материала стержня.

Построена математическая модель, описывающая поведение полубесконечного вязкоупругого стержня, под действием ударной

продольной нагрузки на его торец. Вязкоупругие свойства материала стержня описывались моделью Кельвина.

В качестве метода решения выбран метод интегрального преобразования Лапласа по переменной времени. Найдено решение в изображениях для безразмерной функции напряжения.

Методом контурного интегрирования получено точное решение поставленной задачи, которое в дальнейшем послужило эталоном для проверки применимости решений, полученных асимптотическими методами.

Произведен анализ точного решения, позволивший сделать выводы о влиянии параметров материала (времени ползучести и времени релаксации) на поведение решения, а также об изменении решения с течением времени при фиксированных значениях параметров материала.

С помощью асимптотических методов получены асимптотики оригиналов для безразмерной функции напряжения для больших и малых значений интегрального преобразования Лапласа.

Построены графики для приведенного значения напряжения при фиксированных значениях параметров материала для различных значений времени для точного решения и асимптотик.

Анализ графиков показал, что асимптотика, полученная для малых значений параметра интегрального преобразования, не дает эффективного решения для задачи данного вида, а асимптотики, полученные для больших значений параметра интегрального преобразования, дают хорошее приближение точного решения для времен, сравнимых со временем прохождения фронтом волны расстояния характерной длины стержня. Следовательно, указанные асимптотики могут использоваться в указанном диапазоне в тех случаях, когда требуется построить аналитическое решение задачи, а нахождение точного аналитического решения не возможно, например, при усложнении уравнений состояния.