

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математической теории упругости и биомеханики

**Распространение и затухание изгибной краевой волны в термоупругой
пластине**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы

направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Микаилова Артёма Мехтиевича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н.

М.В. Вильде

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

Л.Ю. Коссович

Саратов 2022

Введение

Настоящая бакалаврская работа посвящена изучению распространения изгибной краевой волны в пластине с учетом влияния температурного расширения, которое моделируется с помощью связанной теории термоупругости.

Актуальность темы. Волны, распространяющиеся вдоль края пластины или оболочки и затухающие в направлении, перпендикулярном краю (краевые волны) представляют собой перспективный метод обнаружения трещин и другого рода дефектов в окрестности края тела, где применение других методов (например, волн Лэмба [1-3]) затруднено. Первый пример существования краевых волн был представлен в работе [4], где исследована изгибная волна “рэлеевского” типа, названная так по аналогии с поверхностной волной Рэлея [5].

В большинстве работ, посвященных краевым волнам, материал считается идеально упругим, то есть затухание волн вследствие внутреннего трения не учитывается. Однако в экспериментальных исследованиях было обнаружено, что краевые волн в некоторых случаях обладают значительным затуханием, природа которого до сих пор не ясна. В ряду различных механизмов внутреннего трения [6,7] рассматривается термоупругая релаксация, связанная с явлением температурного расширения. В связи с этим представляет интерес исследование волны, аналогичной изученной в работе [4], с учетом связанности поля упругих деформаций и теплового поля.

Целью данной работы является исследование изгибной краевой волны в пластине в рамках теории связанной термоупругости. Как первый этап работы рассматривается задача об изгибных колебаниях шарнирно опертой прямоугольной пластины, допускающая точное аналитическое решение.

Задачи работы заключаются в следующем:

1. Построить систему уравнений термоупругости для случая изгиба пластины.
2. Решить задачу о собственных колебаниях пластины.

3. Численно определить собственные частоты, исследовать влияние температурных эффектов на изгибные колебания пластины.
4. Вывести дисперсионное уравнение изгибной краевой волны в термоупругой пластине.
5. Получить численное решение дисперсионного уравнения и исследовать влияние термоупругих свойств на распространение изгибной краевой волны.

Материалами исследования являются теория изгибных колебаний термоупругой пластины и задача о распространении изгибной краевой волны.

Научная значимость работы состоит в изучении влияния параметров теплопроводности материала на затухание изгибной краевой волны.

Структура и объем работы. Бакалаврская работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка используемых источников, включающего 20 наименований. Работа изложена на 44 листах машинописного текста, содержит 25 рисунков.

Основное содержание работы

Во *введении* описывается актуальность темы, формулируется цель исследования и ставятся задачи.

В *первом разделе* построена теория изгиба тонкой термоупругой пластины. На основании гипотез Кирхгофа [8] и связанной теории термоупругости [9] получены соотношения

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\Delta^2 w + \Delta T - q_n = 0, \quad (1)$$

$$T(x, y, t) = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \theta z dz, \quad (2)$$

$$\Delta \theta + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \eta_1 \frac{\partial(\Delta w)}{\partial t} z = 0, \quad (3)$$

где h – толщина пластины, $w(x, y)$ – постоянное по толщине перемещение в направлении оси z (прогиб пластины), θ – приращение температуры, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, α_T – коэффициент температурного расширения,

$$\frac{1}{\kappa_1} = \frac{1}{\kappa} + \eta \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T, \quad \eta_1 = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \eta, \quad (4)$$

$\kappa = \frac{\lambda_0}{c_\varepsilon}$, где λ_0 — коэффициент теплопроводности, c_ε — удельная теплоёмкость при постоянной деформации, $\eta = \gamma \frac{T_0}{\lambda_0}$, T_0 — температура в недеформированном состоянии. С учетом (2), уравнения (1) и (3) образуют замкнутую систему уравнений для двух неизвестных функций w и θ . Ее следует дополнить граничными условиями, выражающими условия закрепления краев пластины и температурный режим на её поверхности и краях, а также начальными условиями.

Во *втором разделе* рассматривается задача о собственных колебаниях термоупругой прямоугольной пластины, срединная плоскость которой занимает область $|x| \leq a$, $|y| \leq b$. Пластина считается шарнирно опертой по всем сторонам, также на сторонах пластины поддерживается постоянная температура. Рассмотрено два вида граничных условий на лицевых поверхностях. Для случая, когда на лицевых поверхностях поддерживается постоянная температура, получено уравнение для определения собственных частот в виде

$$\omega_0^2 = (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 \left(1 + i \frac{k_T \kappa_0 \eta_0 \omega_0}{(\kappa_0 \alpha_n^2 + \kappa_0 \beta_m^2 + i \omega_0)} H_1 \right), \quad (5)$$

где $\alpha_n = \frac{2n-1}{2a} \pi$, $\beta_m = \frac{2m-1}{2b} \pi$, $\omega_0^2 = \frac{\rho h}{D} \omega^2$, $\frac{1}{\kappa_0} = \frac{1}{\kappa_1} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$, $\eta_0 = \eta_1 \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad k_T = \frac{12\alpha_T(1+\nu)}{h^3}, \quad H_1 = \frac{h}{X^2} - \frac{h^2}{2X} \operatorname{cth}\left(X \frac{h}{2}\right) + \frac{h^3}{12}, \quad X = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2 + \frac{i\omega_0}{\kappa_0}}.$$

В случае теплоизолированных лицевых поверхностей уравнение частот имеет вид

$$\omega_0^2 = (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 \left(1 + i \frac{k_T \kappa_0 \eta_0 \omega_0}{(\kappa_0 \alpha_n^2 + \kappa_0 \beta_m^2 + i \omega_0)} H_2 \right), \quad (6)$$

где $H_2 = \frac{1}{X^2} \operatorname{th} \left(X \frac{h}{2} \right) + \frac{h^3}{12} - \frac{h}{X}.$

В *третьем разделе* представлены результаты численных расчетов собственных частот прямоугольной пластины размерами $a=3\text{ м}$, $b=1\text{ м}$, $h=0.01\text{ м}$. Рассматриваются два материала со следующими значениями параметров [10-12]:

Эпоксидная смола: $\lambda_0 = 0.243 \text{ Вт/(м К)}$, $c_\varepsilon = 1863.4 \cdot 10^3 \text{ Дж/(м}^3\text{)}$,
 $E = 2.8 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\nu = 0.33$, $T_0 = 293\text{ К}$, $\alpha_t = 68.1 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$, $\rho = 1210 \text{ кг/м}^3$.

Магниевого сплава: $\lambda_0 = 117.23 \text{ Вт/(м К)}$, $c_\varepsilon = 1856.7 \cdot 10^3 \text{ Дж/(м}^3\text{)}$,
 $E = 43 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\nu = 0.33$, $T_0 = 293\text{ К}$, $\alpha_t = 20.9 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$, $\rho = 1800 \text{ кг/м}^3$.

Результаты расчетов собственных частот представлены в таблицах. Собственные частоты в данном случае являются комплексными, то есть учет температурного расширения приводит к появлению мнимой части собственной частоты. Сравнение данных таблиц для эпоксидной смолы с таблицами 2,4 для магниевого сплава показывает, что в случае магниевого сплава влияние термоупругих эффектов значительно сильнее. Также приведены графики изменения амплитуды колебаний прогиба со временем. Кроме того, исследован закон изменения температуры по толщине. Например, на рисунках 1 и 2 представлены графики изменения амплитуды колебаний температуры по толщине для низшей и одной из высших собственных частот. Аналогичные графики построены для эпоксидной смолы, и для случая теплоизолированных лицевых поверхностей.

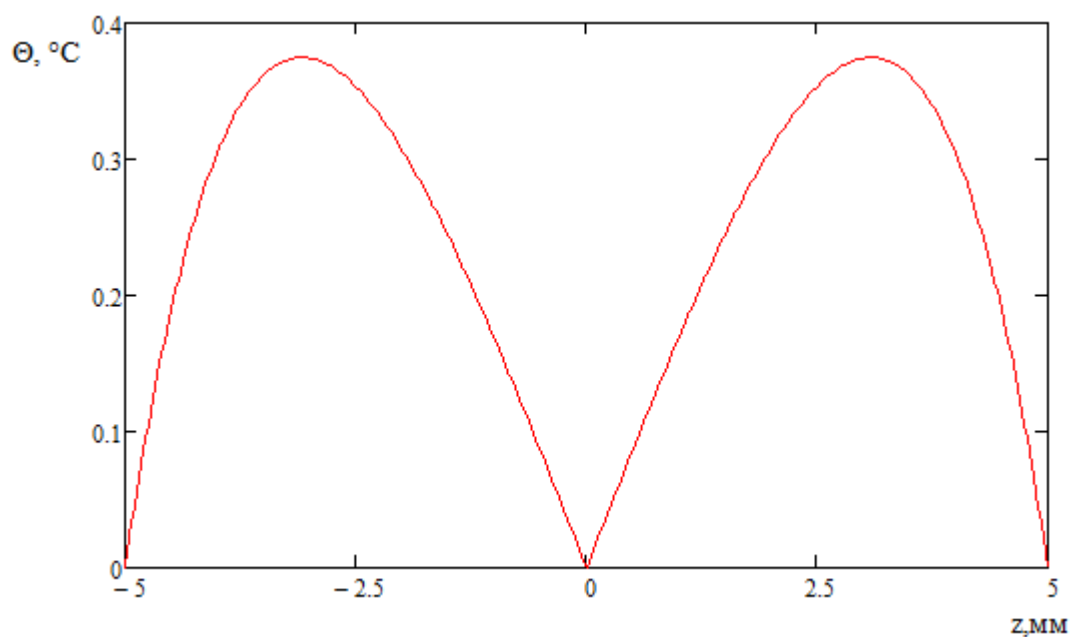


Рисунок 1 — График распределения температуры по толщине для магниевого сплава при $m,n=1$

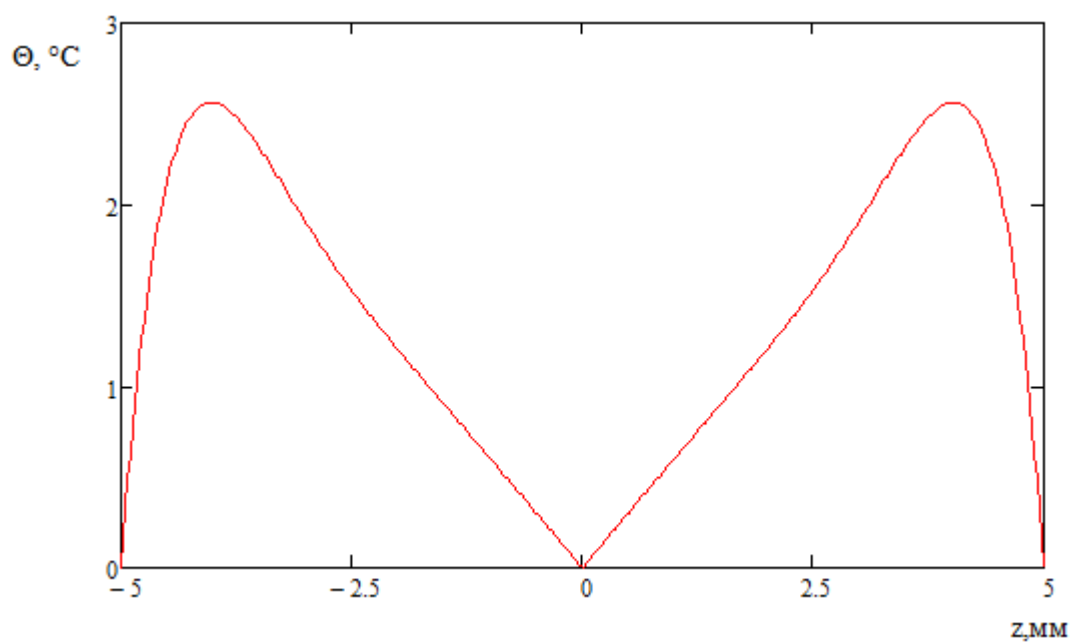


Рисунок 2 — График распределения температуры по толщине для магниевого сплава при $m,n=2$

Как видно из рисунков, закон изменения температуры по толщине для низших частот значительно отличается от линейного, однако с ростом частоты становится практически линейным, за исключением узких областей

у поверхностей пластины. Отметим также, что для эпоксидной смолы выход на линейную закономерность происходит быстрее.

В четвертом разделе выведено приближенное дисперсионное уравнение изгибной краевой волны. При выводе этого уравнения принята гипотеза, что распределение температуры по толщине является линейным:

$\theta(x, y, z, t) = T_1(x, y, t)z$. Решение ищется в виде

$$w = Ce^{rx} e^{i(\omega t - \chi y)}, \quad T_1 = De^{rx} e^{i(\omega t - \chi y)}. \quad (7)$$

Получено характеристическое уравнение в виде

$$\left[(r^2 - \chi^2)^2 - \frac{\rho h}{D} \omega^2 \right] \left(r^2 - \chi^2 - \frac{i\omega}{\kappa_1} \right) - i\omega \frac{h^3}{12} k_T \eta_1 (r^2 - \chi^2)^2 = 0. \quad (8)$$

Граничные условия свободного края на торце имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \alpha_T (1 + \nu) T_1 &= 0, \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \alpha_T (1 + \nu) \frac{\partial T_1}{\partial x} &= 0, \\ T_1 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть r_1, r_2, r_3 – корни характеристического уравнения. Удовлетворяя граничным условиям (8), приходим к дисперсионному уравнению

$$\begin{vmatrix} r_1^2 - \nu \chi^2 & r_2^2 - \nu \chi^2 & r_3^2 - \nu \chi^2 \\ r_1^3 - (2 - \nu) r_1 \chi^2 + \alpha_1 r_1 t_1 & r_2^3 - (2 - \nu) r_2 \chi^2 + \alpha_1 r_2 t_2 & r_3^3 - (2 - \nu) r_3 \chi^2 + \alpha_1 r_3 t_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Представлены результаты численного решения уравнения (9) для эпоксидной смолы и магниевого сплава, а также для алюминия. Как видно из рисунков, термоупругие эффекты практически не оказывают влияния на скорость волны. Затухание волны получилось малым, при этом у эпоксидной смолы на порядок меньше, чем у магниевого сплава и алюминия. Результаты для магниевого сплава представлены на рисунках 3,4.

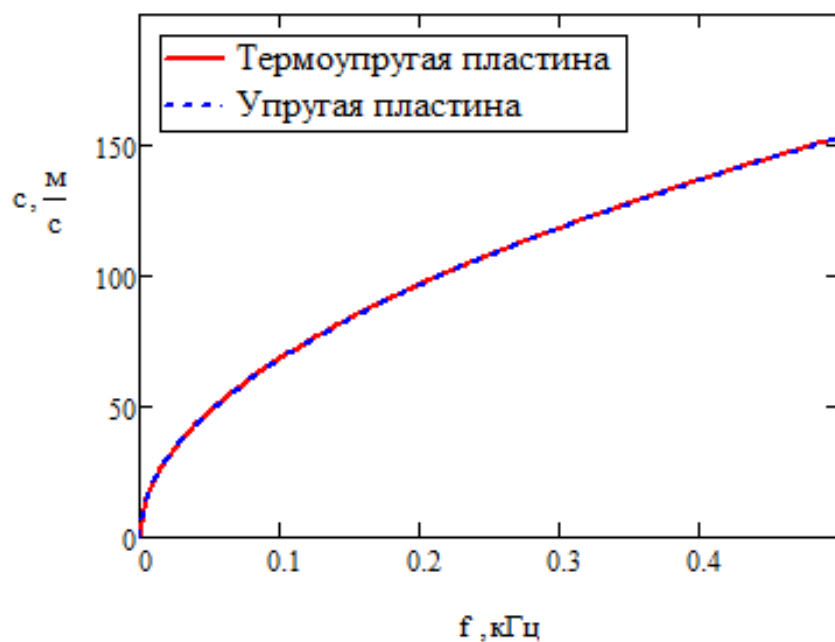


Рисунок 3 – Зависимость фазовой скорости краевой волны от частоты для пластины из магниевого сплава

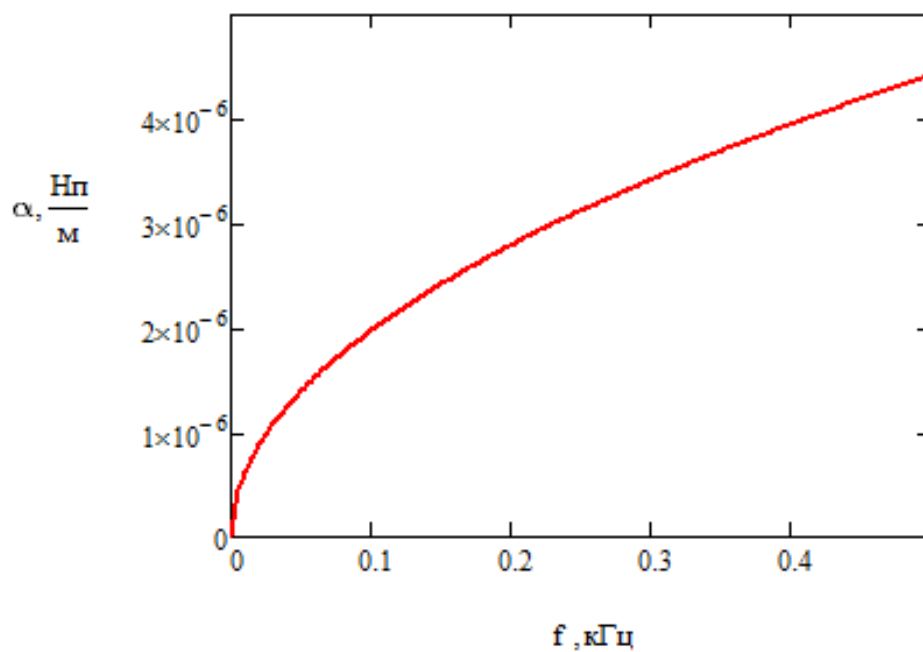


Рисунок 4 – Коэффициент затухания краевой волны для пластины из магниевого сплава

В четвертом разделе выведено дисперсионное уравнение изгибной краевой волны в пластине, на лицевых поверхностях которой поддерживается постоянная температура. Никаких гипотез о распределении температуры по толщине при этом не принимается. Решение строится в виде разложения по модам, в котором можно выделить две изгибные моды и бесконечное множество температурных мод, быстро затухающих при удалении от края. Для приближенного удовлетворения граничным условиям по температуре на торце применяется процедура Галеркина. Численные расчеты показали сходимость скорости волны и затухания при увеличении числа температурных мод N . На рисунках 5, 6 представлены результаты для магниевого сплава, в работе приведены также аналогичные результаты для эпоксидной смолы и алюминия.

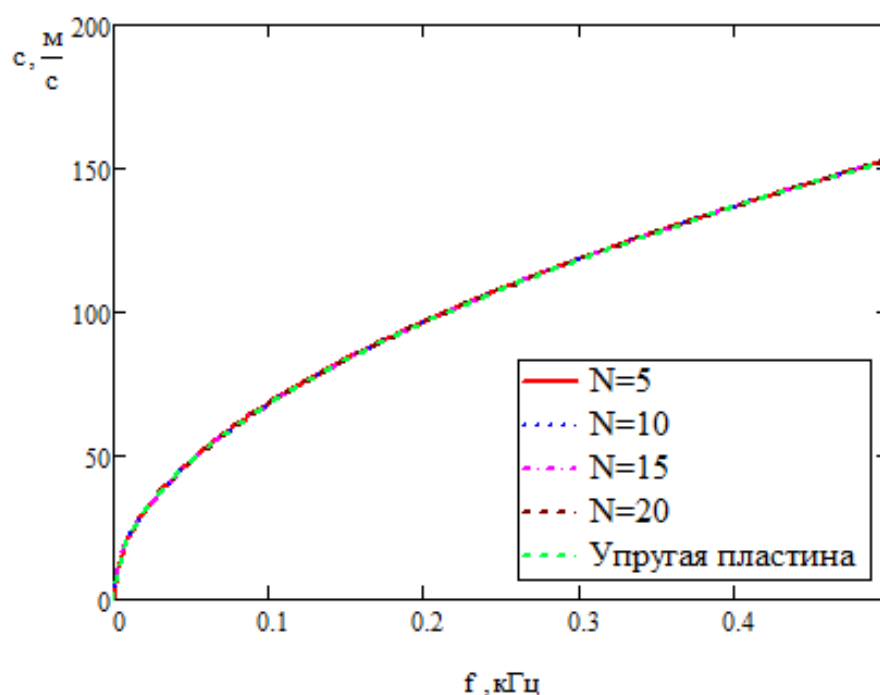


Рисунок 5 – Зависимость фазовой скорости краевой волны от частоты для пластины из магниевого сплава

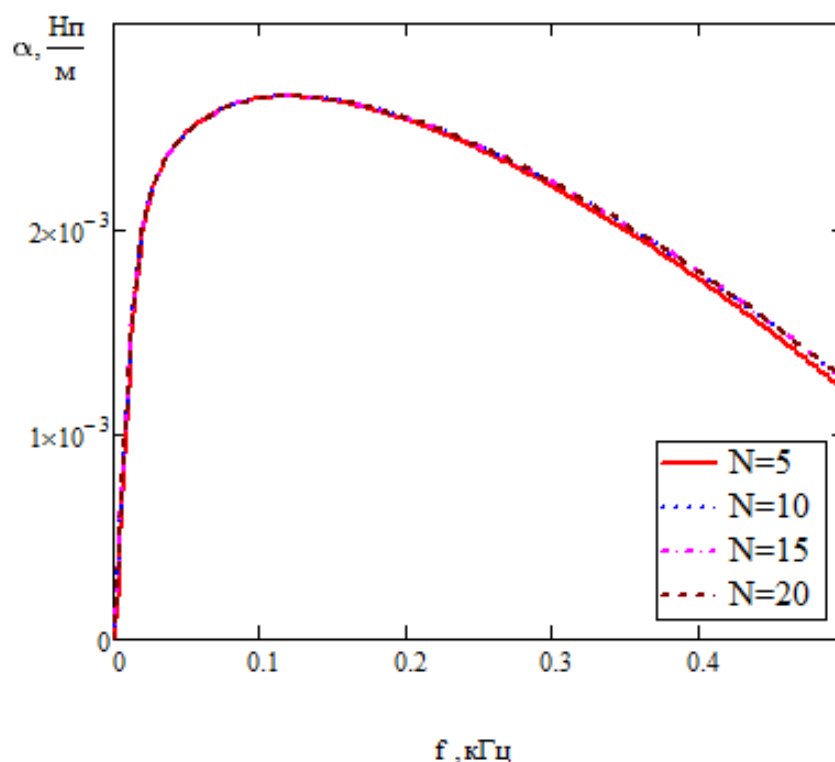


Рисунок 6 – Коэффициент затухания краевой волны для пластины из магниевого сплава

Скорость волны в данном случае тоже практически не отличается от случая идеально упругой пластины. Коэффициент затухания получился на три порядка больше, чем в случае линейного закона, и вид его зависимости от частоты получился совершенно другой: наблюдается рост до некоторого конечного максимального значения, и далее медленное уменьшение. Поведение коэффициента затухания на более высоких частотах требует дополнительного исследования, поскольку использованная в данной работе теория изгиба пластины, основанная на гипотезах Кирхгофа, применима только в ограниченной области частот.

Заключение.

В данной работе построена теория изгибных колебаний термоупругой пластины, основанная на гипотезах Кирхгофа. Задача определения температурного поля решается в точной постановке. Выведено уравнение

изгиба пластины с учетом температурного расширения. Решена задача о колебаниях термоупругой прямоугольной пластины и исследовано влияние тепловых параметров материала на мнимую часть частоты, характеризующую затухание колебаний. Показано, для случая граничных условий первого рода для уравнения теплопроводности мнимая часть больше, чем для случая граничных условий второго рода. Также исследовано распределение температуры по толщине пластины. Выведено приближенное дисперсионное уравнение для изгибной краевой волны в термоупругой пластине на основе гипотезы о линейном законе изменения температуры по толщине. Также рассмотрена задача в точной постановке для случая, когда на поверхностях пластины поддерживается постоянная температура и получено дисперсионное уравнение изгибной краевой волны в виде бесконечного определителя. Получено численное решение выведенных уравнений и исследовано влияние тепловых параметров материала.

Список использованных источников

- 1 Helal, J. Non-Destructive Testing of Concrete: A Review of Methods / J. Helal, M. Sofi, P. Mendis // *Electronic Journal of Structural Engineering*. – 2015. – V. 14. – P. 97-105
- 2 Rose, J. L. The upcoming revolution in ultrasonic guided waves / J. L. Rose // *Nondestructive Characterization for Composite Materials, Aerospace Engineering, Civil Infrastructure, and Homeland Security*. – 2011. – V. 7983. – 31 p.
- 3 Mitra, M. Guided wave based structural health monitoring: A review / M. Mitra, S. Gopalakrishnan // *Smart Materials and Structures*. – 2016. – V. 25, №. 5. – P. 053001.
- 4 Коненков, Ю. К. Об изгибной волне «рэлеевского» типа / Ю. К. Коненков // *Акуст. Журн.* – 1960. – Т. 6, вып. 1. – С. 124-126.
- 5 Rayleigh, J. On waves propagated along the surface of an elastic solid / J. Rayleigh // *Proc. Lond. Math. Soc.* – 1885/1886. – V. 17. – P. 4-11.

- 6 Головин, И.С. Внутреннее трение и механическая спектроскопия металлических материалов: учеб. / И.С. Головин. – М.: Изд. Дом МИСиС, 2012. – 247 с.
- 7 Постников, В.С. Внутреннее трение в металлах / В. С. Постников — 2-е изд., — М.: Металлургия 1974 — 352 с.
- 8 Амензаде, Ю.А. Теория упругости / Ю.А. Амензаде — 3-е изд., доп. М.: Высшая школа 1976. - 272 с.
- 9 Новацкий, В. Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий. — М.: Мир 1970. — 256 с.
- 10 Безухов, Н.И., Бажанов В.Л, Гольденблат И.И, Николаенко Н.А, Синюков А.М. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. / Н.И. Безухов М: Машиностроение, 1965 — 567 р.
- 11 Капринос, Д.М. Композитные материалы. Справочник / Ред. Д.М. Капринос. Киев: Наукова думка, 1985 — 592 р.
- 12 Handbook of composites / Ed. by G. Lubin. N.Y.: Springer, 1982. — 786 p.