

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической теории упругости

и биомеханики

**АНАЛИЗ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН
В НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОМ СЛОЕ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы

направления 01.03.03 — Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Шубаева Андрея Алексеевича

Научный руководитель

доцент, к. ф.-м. н.

Я. А. Парфенова

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., профессор

Л. Ю. Коссович

Саратов 2022

ВВЕДЕНИЕ

Распространение гармонических волн в упругом слое и цилиндре было предметом многочисленных теоретических и экспериментальных исследований, ведущихся уже более столетия. Возможность выразить характеристики волнового поля в цилиндре через хорошо исследованные специальные функции впервые отмечалась в работах Похгамера и Кри. Для упругого слоя аналогичные результаты получены Рэлеем и Лэмбом.

Последующие публикации в этой области относятся уже к 40-м годам двадцатого века. Именно в этот период, вследствие развития электроники, появилась возможность легко возбуждать и обнаруживать упругие волны высокой частоты. Появление новых материалов, таких как пластики, вызвало интерес к теории механических свойств несовершенного упругих тел, а волны напряжения оказываются мощным средством для изучения механических характеристик таких материалов.

Тема работы является актуальной поскольку в различных отраслях производства и строительной индустрии широко используются конструкции из вязкоупругих материалов. Они подвергаются импульсным воздействиям, при этом в деформируемом материале происходят волновые процессы.

Целью работы является изучение распространения гармонических волн в наследственно-упругом слое, материал которого описывается с помощью мелко-экспоненциальной функции Работнова.

Задачи, которые необходимо решить в работе:

- Изучить свойства интегральных операторов, применяемых в моделях линейных наследственно-упругих материалов;
- Поставить задачу о распространении гармонических волн в наследственно-упругом слое, описываемом моделью Работнова;
- Вывести и численно решить соответствующее дисперсионное уравнение для задачи растяжения-сжатия;
- Получить асимптотики корней дисперсионного уравнения при малых значениях круговой частоты;
- Сравнить асимптотики корней дисперсионного уравнения с численным решением.

Работа состоит из введения, двух разделов, заключения, списка использованных источников. Работа включает 15 рисунков. Список использованных источников содержит 27 наименований.

Основное содержание работы

Во введении обосновывается актуальность проводимого исследования, приведен обзор литературы по данному исследованию, сформулирована цель работы и решаемые задачи.

В первом разделе рассмотрены функции, используемые в качестве ядер для описания свойств линейных наследственно-упругих материалов, основные свойства ядер наследственности, интегральные уравнения Вольтерра второго рода, резольвентные операторы, построена дробно-экспоненциальная функция Работнова.

Во втором разделе поставлена задача о распространении гармонических волн в наследственно-упругом слое, материал которого описывается моделью Работнова.

Рассмотрим распространение гармонических волн в бесконечном наследственно-упругом слое, ограниченном плоскостями $z = \pm h$, в декартовой системе координат. Плоскость Oxy совместим со срединной поверхностью слоя. Будем рассматривать распространение волн в направлении оси x .

Динамическое напряженно-деформированное состояние (НДС) слоя описывается уравнениями движения в напряжениях; уравнениями состояния в напряжениях и деформациях, описывающие свойства материала и геометрическими соотношениями, связывающими компоненты тензора деформаций с компонентами вектора перемещений.

Для случая плоской задачи уравнения движения примут вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (1)$$

а уравнения состояния будут иметь вид

$$\begin{cases} \tilde{E}\varepsilon_{11} = \sigma_{11} - \tilde{\nu}(\sigma_{22} + \sigma_{33}), \\ \tilde{E}\varepsilon_{33} = \sigma_{33} - \tilde{\nu}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\ 0 = \sigma_{22} - \tilde{\nu}(\sigma_{11} + \sigma_{33}), \\ \tilde{E}\varepsilon_{13} = (1 + \tilde{\nu})\sigma_{13}, \end{cases} \quad (2)$$

где σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, причем $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}$, $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ v_i - компоненты вектора перемещений; ρ - плотность материала; t - время, \tilde{E} и $\tilde{\nu}$ интегральные операторы, определяемые формулами

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= E(1 - \Gamma^*), \quad \tilde{\nu} = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2}\Gamma^*, \\ \Gamma^* f(t) &= k \int_{-\infty}^t \mathfrak{D}_{-\frac{1}{2}}(-\beta, t - \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Здесь k и β - параметры материала.

В качестве ядра интегрального оператора выберем дробно-экспоненциальную функцию Работнова

$$\mathfrak{D}_{-\frac{1}{2}}(\beta, t) = t^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n t^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1)\right]},$$

где $\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1)\right]$ - гамма-функция.

Компоненты тензора деформаций связаны с компонентами вектора перемещений соотношениями

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial y}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial v_3}{\partial z}, \quad (3)$$

При изучении собственных колебаний будем исследовать свойства тех мод, которые изменяются во времени по гармоническому закону и удовлетворяют уравнениям движения (1), уравнениям состояния (2), геометрическим соотношениям (3) и однородным граничным условиям на лицевых поверхностях:

$$\sigma_{13} = \sigma_{33} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h.$$

Решение для перемещений v_i будем искать в виде

$$v_i = V_i(z) \exp(i\omega t - (\delta + i\chi)x),$$

где ω - частота, χ - волновое число, $\delta > 0$ - коэффициент затухания, определяющий убывание амплитуды волны с увеличением координаты x .

Одной из основных характеристик некоторых типов сред является дисперсия волн, указывающая, что фазовая скорость волны (и частота) является функцией волновой постоянной.

Дисперсионное уравнение получается подстановкой решения в форме распространяющейся волны в уравнение движения, записанное в перемещениях, и граничные условия и одновременного их удовлетворения. Бесконечное число решений дисперсионного уравнения для каждой волновой постоянной описывает частотный спектр бесконечного количества мод. Это уравнение обеспечивает нас фундаментальными свойствами распространения волн.

С учетом действия операторов система уравнений состояний (2) примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \frac{EE^F}{(1 + \nu^F)(1 - 2\nu^F)} \left((1 - \nu^F)\varepsilon_{11} + \nu^F \varepsilon_{33} \right), \\ \sigma_{33} = \frac{EE^F}{(1 + \nu^F)(1 - 2\nu^F)} \left((1 - \nu^F)\varepsilon_{33} + \nu^F \varepsilon_{11} \right), \\ \sigma_{22} = \frac{EE^F}{(1 + \nu^F)(1 - 2\nu^F)} \nu^F (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}), \\ \sigma_{13} = \frac{EE^F}{1 + \nu^F} \varepsilon_{13}, \end{array} \right.$$

где E^F и ν^F определяются формулами

$$E^F = 1 - \frac{k}{\beta + (i\omega)^{\frac{1}{2}}}, \quad \nu^F = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{k}{\beta + (i\omega)^{\frac{1}{2}}}.$$

Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad t_* = \frac{c_2 t}{h},$$

где $c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1 + \nu)\rho}}$.

Введем безразмерные величины

$$v_i^* = \frac{v_i}{h}, \quad \sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}}{E}, \quad \Omega_*^2 = \omega_*^2 \frac{1 + \nu_*^F}{(1 + \nu)E_*^F}, \quad \omega_* = \frac{h}{c_2}\omega,$$

$$E_*^F = 1 - \frac{k_*}{\beta_* + \sqrt{i\omega_*}}, \quad \nu_*^F = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{k_*}{\beta_* + \sqrt{i\omega_*}}, \quad \beta_* = \sqrt{\frac{h}{c_2}}\beta, \quad k_* = \sqrt{\frac{h}{c_2}}k,$$

$$i\tilde{\chi}_* = -\delta_* - i\chi_*, \quad \delta_* = h\delta, \quad \chi_* = h\chi.$$

В дальнейшем, звездочки у безразмерных переменных будут опущены.

Рассмотрим случай симметричного по нормальной координате НДС. В этом случае перемещение v_1 и напряжения σ_{11} , σ_{33} являются четными по нормальной координате функциями, а v_3 , σ_{13} – нечетными. В этом случае приходим к следующему уравнению

$$\gamma^4 \operatorname{ch}(a) \frac{\operatorname{sh}(b)}{b} - a^2 \tilde{\chi}^2 \frac{\operatorname{sh}(a)}{a} \operatorname{ch}(b) = 0. \quad (4)$$

где a и b определяются формулами

$$a^2 = \tilde{\chi}^2 - \kappa_F^2 \Omega^2, \quad b^2 = \tilde{\chi}^2 - \Omega^2, \quad \kappa_F^2 = \frac{1 - 2\nu^F}{2 - 2\nu^F}.$$

Формально дисперсионное уравнение (4) имеет тот же вид, что и соответствующее дисперсионное уравнение для упругого слоя, но, в отличие от последнего, левая часть уравнения в наследственно-упругом случае является комплексно-значной функцией. Поэтому дисперсионное уравнение в случае наследственно-упругого слоя не имеет комплексно-сопряженных корней. Из вида этого уравнения следует, что если $\tilde{\chi}$ является его решением, то и $-\tilde{\chi}$ также будет его решением, следовательно, существует симметрия дисперсионных кривых при замене $\tilde{\chi}$ на $-\tilde{\chi}$. Отсутствие комплексно-сопряженных корней ведет к нарушению симметрии частотного спектра относительно плоскостей $\chi = 0$ и $\delta = 0$. Таким образом, в наследственно-упругом спектре ветви разделяются.

Полученное дисперсионное уравнение (4) не имеет аналитического решения, поэтому для получения численного решения воспользуемся методом построения решения дисперсионного уравнения на основе метода продолже-

ния решения по параметру. Реализация такого метода решения дисперсионных уравнений достаточно удобна в пакете Wolfram Mathematica.

Были построены зависимости волнового числа $\chi = \chi(\omega)$ от частоты для нескольких первых мод при различных значениях параметров материала.

На рисунках 1 а, 1 б изображены действительная и мнимая часть первой моды для значений $\alpha = -0.5$, $\beta = 1$, и различных значений k в случае симметричного НДС. Точечная линия соответствует значению $k = 0.8$, штрих-пунктирная – $k = 0.5$, пунктирная – $k = 0.2$, сплошная – $k = 0$ (упругий случай). На рисунках 2 а (3 а), 2 б (3 б) изображены вторая и третья моды для тех же параметров материала.

На рисунках 4 а, 4 б изображены действительные и мнимые части для первой моды для значений $\alpha = -0.5$, $k = 0.9$ и различных значений β в случае симметричного НДС. Точечная линия соответствует значению $\beta = 1$, штрих-пунктирная – $\beta = 5$, пунктирная – $\beta = 10$, сплошная линия соответствует упругому случаю. На рисунках 5 а (6 а), 5 б (6 а) изображены вторая и третья моды для тех же параметров материала. Коэффициент Пуассона ν для всех случаев принят равным 0.3.

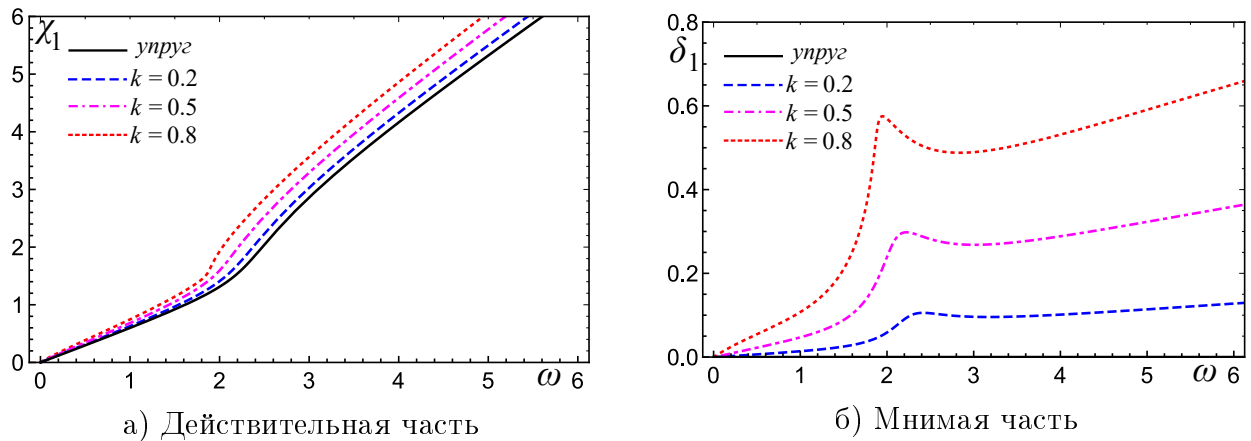


Рисунок 1 – Первая мода

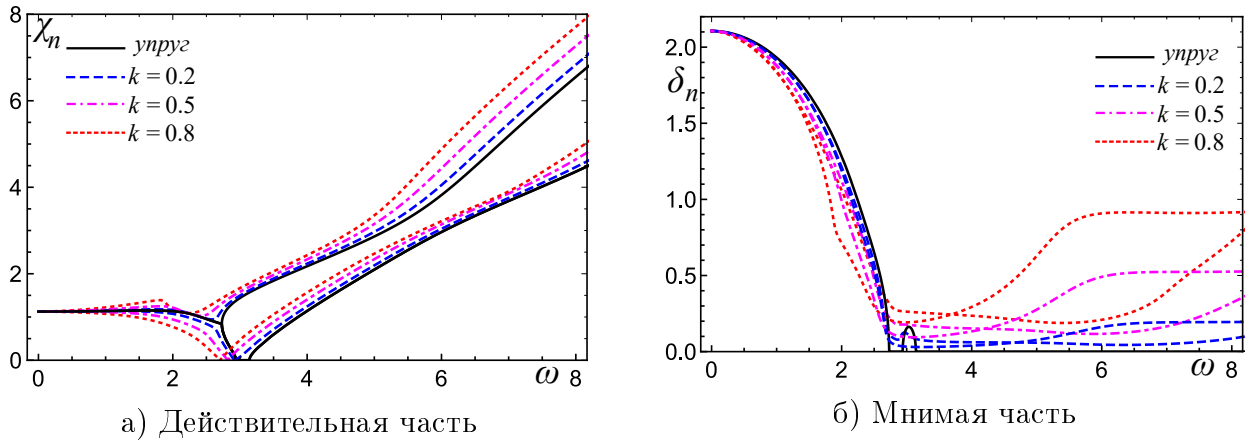


Рисунок 2 – Вторая и третья моды

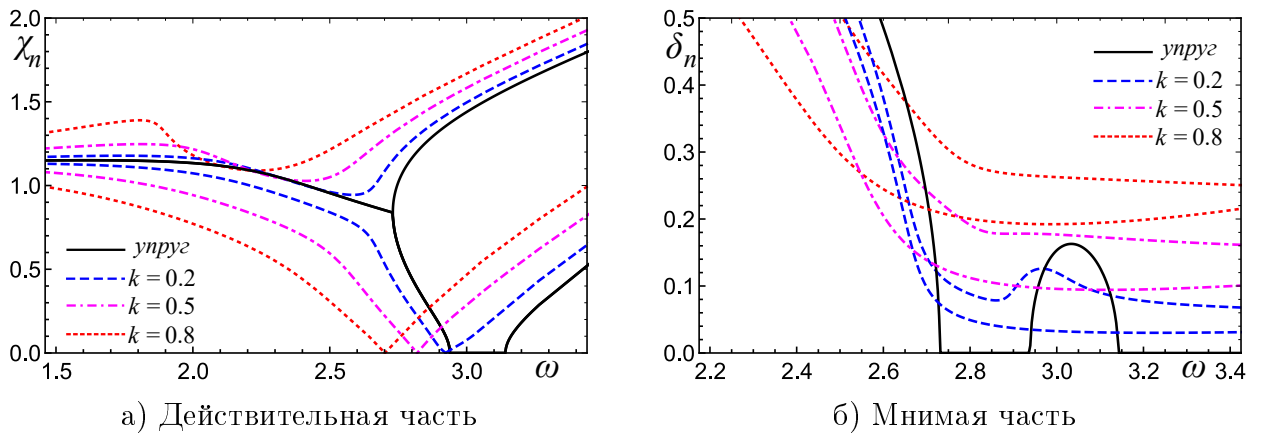


Рисунок 3 – Вторая и третья моды (фрагмент)

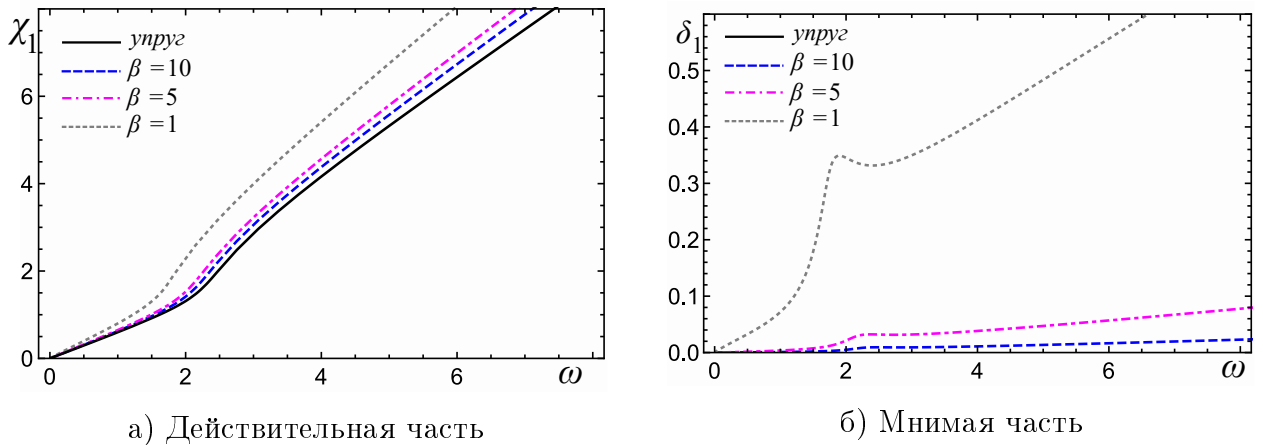


Рисунок 4 – Первая мода

Анализ дисперсионного уравнения и полученных решений позволяет сделать следующие выводы:

1. Существует симметрия дисперсионных кривых при замене $\tilde{\chi}$ на $-\tilde{\chi}$.
2. Дисперсионные кривые наследственно-упругого спектра, соответствующие

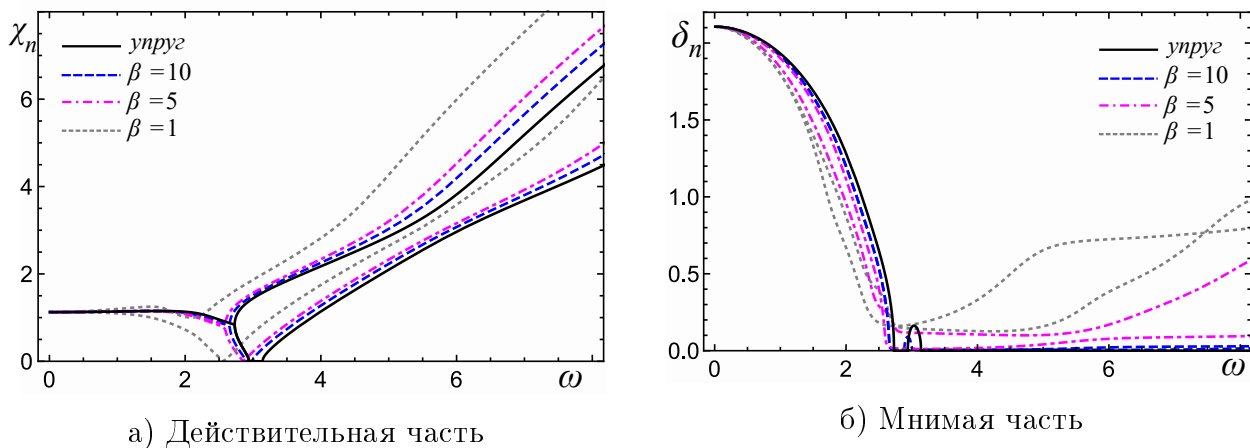


Рисунок 5 – Вторая и третья моды

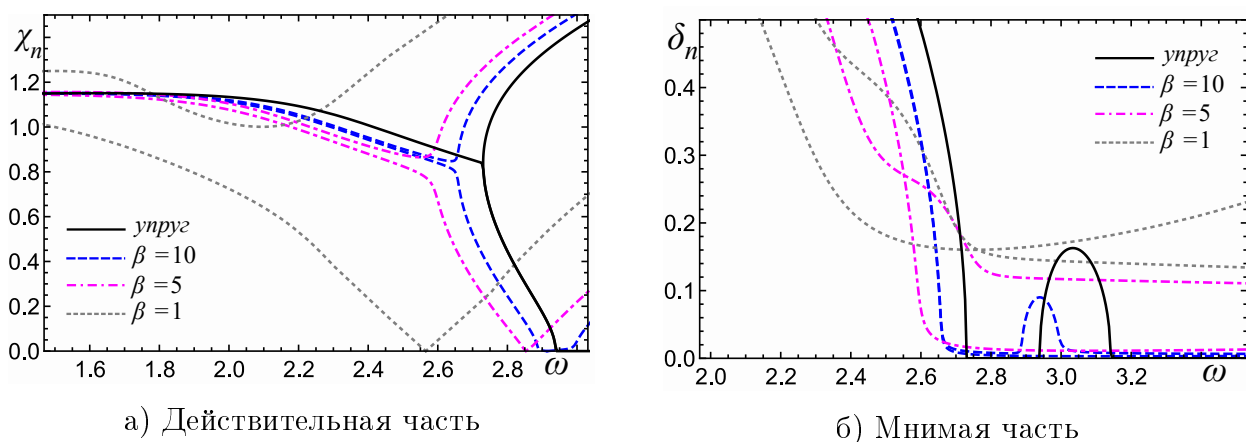


Рисунок 6 – Вторая и третья моды (фрагмент)

ющие действительным ветвям упругого спектра, являются комплексными с положительной мнимой частью $\tilde{\chi}$, что определяет затухание решение по координате.

3. В наследственно-упругом случае отсутствуют частоты запирания, так как $\chi = 0$ и $\omega > 0$ не являются корнями дисперсионного уравнения.

4. При увеличении k и (или) уменьшении β наследственно-упругие дисперсионные кривые больше отклоняются от соответствующих упругих кривых. В окрестностях частот запирания упругих мод наследственно-упругие кривые имеют наибольшую кривизну. Увеличение k или уменьшение β ведет к сглаживанию дисперсионных кривых в этих областях. При $k = 0$ решение будет соответствовать решению аналогичной упругой задаче.

Численные расчеты показывают, что при уменьшении значений k или при увеличении значений β , мнимая часть волновой постоянной $\tilde{\chi}$ стремиться

к нулю.

Получим приближенные аналитические формулы для корней дисперсионных уравнений для малых и больших значений частот с помощью асимптотических методов.

Анализ уравнения (4) и численного решения показывает, что один корень при $\omega \rightarrow 0$ ведет себя как $O(\omega)$, а остальные имеют порядок $O(1)$. Поэтому асимптотики корней при $\omega \rightarrow 0$ ищем в виде

$$\chi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} c_{1m} \omega^{\frac{m}{2}}, \quad \delta_1 = \sum_{m=1}^{\infty} d_{1m} \omega^{\frac{m}{2}}, \quad (5)$$

$$\chi_n = c_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \omega^{\frac{m}{2}}, \quad \delta_n = d_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} d_{nm} \omega^{\frac{m}{2}}, \quad n > 1. \quad (6)$$

Найдем сначала коэффициенты формул (5), для этого подставляем (5) в уравнение (4) и раскладываем функции a , b , гиперболические синусы и косинусы от них в степенные ряды по степеням $\sqrt{\omega}$, группируем элементы с одинаковыми степенями ω . Поскольку получившийся степенной ряд по $\sqrt{\omega}$ равен нулю тождественно только в том случае, когда равны нулю все его коэффициенты, то получаем бесконечную систему зацепляющихся уравнений для определения искоемых коэффициентов разложения. Решая полученную систему, находим следующие асимптотики корней для первой моды в окрестности нулевой частоты с точностью $O(\omega^2)$:

$$\chi_1 = c_{12} \omega + c_{13} \omega^{\frac{3}{2}} + O(\omega^2), \quad \delta_1 = d_{13} \omega^{\frac{3}{2}} + O(\omega^2), \quad (7)$$

где c_{12} , c_{13} , d_{13} - функции, зависящие от ν , k , β . В частности, коэффициент c_{12} выражается следующим образом

$$c_{12} = \sqrt{\frac{\left(1 + \nu + \frac{(\frac{1}{2} - \nu)k}{\beta}\right) \left(1 - \nu - \frac{(\frac{1}{2} - \nu)k}{\beta}\right)}{2 \left(1 - \frac{k}{\beta}\right) (1 + \nu)}}.$$

Подставляя (6) в уравнение (4) получим бесконечную систему зацепляющихся уравнений для определения искоемых коэффициентов разложения, из

которой имеем следующее уравнение для определения первых членов c_{n0} , d_{n0} рядов (6):

$$\operatorname{sh}(2(c_{n0} + id_{n0})) + (2(c_{n0} + id_{n0})) = 0.$$

Решим полученное уравнение асимптотическим методом. В результате получим выражения для коэффициентов разложения c_{n0} , d_{n0} в первом приближении в виде:

$$c_{n0} = \frac{1}{2} \ln(4\pi n - \pi), \quad d_{n0} = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Далее подставляя c_{n0} , d_{n0} в следующее уравнение системы зацепляющихся уравнений для нахождения коэффициентов (6), находим c_{n1} , d_{n1} и т.д. Асимптотики корней при $n > 1$ примут вид:

$$\chi_n = c_{n0} + c_{n1}\omega^{\frac{1}{2}} + O(\omega), \quad \delta_n = d_{n0} + d_{n1}\omega^{\frac{1}{2}} + O(\omega), \quad (8)$$

где c_{n1} , d_{n1} - функции, зависящие от ν , k , β , причем $c_{n1} \ll 1$, $d_{n1} \ll 1$.

При $k = 0$ асимптотика корней дисперсионного уравнения соответствующая первой моде совпадает с аналогичной асимптотикой для случая упругого слоя.

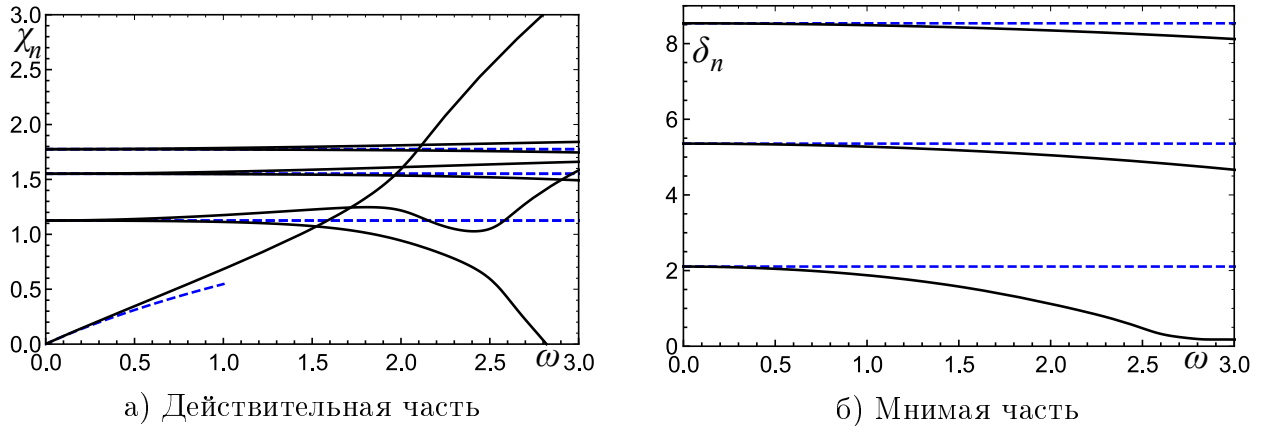


Рисунок 7 – Численные решения и асимптоки

На рисунке 7а приведены проекции на плоскость (ω, χ) ветвей дисперсионного спектра построенных по результатам численных расчетов и по асимптотическим формулам (7) и (8) для нескольких первых мод для случая $\nu = 0.3$, $k = 0.5$, $\beta = 1$. Дисперсионные кривые соответствующие числен-

ным расчетам изображены сплошной линией, а асимптотическим формулам - пунктирной линией. На рисунке 7б приведены проекции на плоскость (ω, δ) ветвей дисперсионного спектра и асимптотик корней для нескольких первых мод для того же случая.

Из графиков видно, что численные и асимптотические решения хорошо совпадают на интервале $0 \leq \omega \leq 0.4$. А с увеличением номера n наблюдается расширение интервала совпадения асимптотик с численным решением.

В заключении приведены основные результаты работы.

Основные результаты работы

В результате работы были изучены свойства интегральных операторов, применяемых в моделях линейных наследственно-упругих материалов. Была поставлена задача о распространении гармонических волн в наследственно-упругом слое, описываемом моделью Работнова. В работе был рассмотрен случай симметричного по нормальной координате НДС. При изучении собственных колебаний исследовались свойства тех мод, которые изменяются по времени по гармоническому закону. Для данного случая были получены частные решения для перемещений и напряжений с точностью до постоянного множителя, выведено дисперсионное уравнение. Дисперсионное уравнение было решено численно методом продолжения решения по параметру. Численные расчеты, проведенные для различных значений наследственно-упругих параметров, определяющих механическое поведение материала слоя, позволили сделать выводы о влиянии наследственных факторов на поведение дисперсионных кривых. Также были получены асимптотические решения дисперсионного уравнения в окрестности нулевой частоты. Проведен сравнительный анализ численных и асимптотических решений.