МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Восстановление производных на отрезке интегральными и разностными методами

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 217 группы

направление 01.04.02 — Прикладная математика и информатика

код и наименование направления

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Горемыко Максима Сергеевича

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

Профессор, д.ф.-м.н., профессор ______________ Г.В. Хромова

должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор ______________ В.А. Юрко

должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись

Саратов 2022

Введение. Данная работа относится к области некорректно поставленных задач. Некорректно поставленные задачи возникают естественным образом во время решения самых разных прикладных задач. Во время построении математических моделей физических задач мы рано или поздно сталкиваемся с тем, что исходные данные этих задач заданы приближенно, так как получены в результате измерений. Поэтому функции, которые являются исходными данными, нуждаются в предварительной "обработке". О том, как это можно сделать и будет описано в данной работе. В ней дается математическое обоснование методов конечно-разностного и интегрального решения задачи восстановления производных функции на отрезке. Основным инструментом для реализации данного метода будет разрывный оператор Стеклова, на базе которого конструируются семейства интегральных операторов с разрывной областью значений, при помощи которых получаются равномерные приближения к непрерывной производной функции. Цель магистроской работы заключается в изучении существующих методов аппроксимации производных, а так же сравнения этих методов, в нашем случае, это сравнение интегрального и конечно-разностного метода.

Основное содержание работы.

Задача аппроксимации и восстановления производных. Рассмотрим, задачу приближенного решения уравнения I-го рода. Эта задача относится к области некорректно поставленных задач.

Определение 1. *Математическая задача называется поставленной корректно, если решение ее существует, единственно и непрерывно зависит от начальныз данных.*

Из определения следует, что задача будет являться некорректно поставленной, если не выполняется хотя бы одно из сформулированных требований. В дальнейшем мы будем понимать некорректность именно в смысле отсутствия непрерывной зависимости решения от исходных данных, а существованиеи единственность будем предпологать a priori.

Приведет общую постановку задачи приближенного уравнения I-го рода.

Пусть X_1, X_2- банаховы пространства. Рассмотрим уравнение:

$$Au = f, \tag{$*$}$$

где $A-$ линейный ограниченный оператор, действующий из X_1 в X_2, и такой, что A^{-1} существует, но неограничен.

Обозначим чреез $\overline{u}$ - точное решение, через $\overline{f}-$ точную правую часть уравнения $(*)$. Пусть правая часть $\overline{f}$ задана её δ- приближениями f_δ в пространстве X_2 : $||f_\delta - \overline{f}||_{X_2} \leq \delta$. Задача приближенного решения уравнения $(*)$ состоит в построении по f_δ последовательности элементов u_δ, такой, что $||u_\delta - \overline{u}||_{X_1} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Пусть X_1, X_2- два банахова пространства, таких, что $X_1 \subset X_2$ и выполняется оценка: $|| \cdot ||_{X_2} \leq C|| \cdot ||_{X_1}$. Пусть элемент $u \in X_1$ задан его δ приближениями f_δ в метрике пространства X_2 : $||u_\delta - u|| \leq \delta$. Требуется по f_δ и δ построить последовательность элементов $\overline{u_\delta}$ так, чтобы $||\overline{u_\delta} - u||_{X_1} \to 0$ при $\delta \to 0$. Будем называть поставленную задачу задачей восстановления из X_2 в X_1. Если, например, $X_1 = C[a, b],\ X_2 = L_2[a, b]$, то мы приходим к некорректно поставленной зааче восстановления функции по её среднеквадратическим $\delta-$ приближением. Если $X_1 = C^{(1)}[a, b],\ X_2 = C[a, b]-$ к задаче восстановления производной функции, заданной ее равномерными δ приближениями, т.е. в этом случает речь идет о приближенном решении классической некорректной задачи - задачи дифференцирования.

Пусть в уравнении $(*)$ с оператором вложения точное решение имеет абсолютно непрерывную производную $(r - 1)$ - го порядка ($r \geq 1$- целое), а $\overline{u}^{(r)}(x) \in L_2[0, 1]$, т.е. $\overline{u}(x) \in W_2^r[0, 1]$. Считаем для простоты, что

$$||\overline{u}^{(r)}(x)||_{W_2^2} = \sqrt{\int_0^1 [\overline{u}^2(x) + (\overline{u}^{(r)}(x))^2]dx}$$

Рассмотрим задачу восстановления из $L_2[0, 1]$ в $C^{(r-1)}[0, 1]$, при этом

$$||u(x)||_{C^{(r-1)}} = \max_{0 \leq p \leq r-1} ||u^{(p)}(x)||_C$$

Применим для нахождения приближенного решения метод регуляризации Тихонова. В данном случае в качестве оператора T_α выступает оператор:

$$R_{\alpha(\delta)} = T_\alpha f = \arg\inf M^\alpha[u,f]; \qquad M^\alpha[u,f] = ||Au - f||^2_{L_2} + \alpha||u||^2_{W_2^r}.$$

Теорема 1. *Семейство операторов R_α, соответствующее методу регуляризации Тихонова имеет вид:*

$$R_\alpha f = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 G(x,t,-\frac{1}{\alpha})f(t)dt,$$

где $G(x,t,-\frac{1}{\alpha})$ - ядро резольвенты дифференциального оператора $\overline{L}$, порожденного дифференициальным выражением $\bar{l}y = (-1)^r y^{(2r)} + y$ и краевыми условиями: $y^{(m)}(0) = y^{(m)}(1) = 0$, $m = r, ..., 2r-1$, со значением спектрального параметра $\lambda = -\frac{1}{\alpha}$.

Для нахождения k - й производной нужно рассмотреть функции $R_{\alpha,m}$:

$$R_\alpha f = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \frac{\partial^m}{\partial x^m} G(x,t,-\frac{1}{\alpha})f(t)dt, \qquad m = 0, 1, ..., n-1.$$

Для оперторов $R_{\alpha,m}$ справедлива теорема 3.2.

Теорема 2. *Имеет место сходимость:*

$$||R_{\alpha,m}f - f^{(m)}(x)||_{C[0,1]} \to 0 \quad \textit{при } \alpha \to 0.$$

Метод регуляризации на базе разрывного оператора Стеклова. В данном разделе рассматриваются методы приближения и восстановления непрерывных производных функции, а также методы решения интеграьных уравнений I-го рода. В.А. Стеклов ввел в рассмотрение оператор, который был назван его именем:

$$\frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha} f(t)dt. \tag{1}$$

Полагаем, что $f(x) \in C[0,1]$. Чтобы значения этих операторов не выходили за пределы этого отрезка, считаем, что при каждом фиксированном α в правосторннем операторе Стеклова $x \in [0, 1-\alpha]$, в левостороннем $x \in [\alpha, 1]$, в симметричном $x \in [\alpha, 1-\alpha]$. При этом правосторонний оператор Стеклова дает равномерную сходимость к функции $f(x)$ на отрезке $[0, 1-\epsilon]$, а левосторонний - дает сходимость функции на отрезке $[\epsilon, 1]$, а симметричный на отрезке $[\epsilon, 1-\epsilon]$, где $\epsilon \geq \alpha$. Разрывные операторы предоставляют возможность строить из них конструкции,которые позволяют получать равномерные приближения к решению различных задач. На базе разрывных операторов была решена задача восстановления непрерывной функции по ее среднеквадратичному приближению — используя разрывный оператор Стеклова. Построим разрывной оператор Стеклова следующим образом. Пусть $f(x) \in C^1[0,1]$. Возьмем правосторонний оператор Стеклова, но будем рассматривать его на отрезке $[0, 1/2]$, а левосторонний на отрезке $[1/2, 1]$ т.е. построим оператор:

$$S_\alpha f = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha} f(t)dt, & x \in [0, 1/2], \\ \frac{1}{\alpha}\int_{x-\alpha}^{x} f(t)dt, & x \in [1/2, 1]. \end{cases} \tag{2}$$

Такая запись предполагает, что мы считаем несущественным, какие именно значния приписывать функции $S_\alpha f$ при $x = 1/2$. Потребуем, чтобы значения этого оператора не выходили за границы отрезка, т.е. чтобы выполнялись неравенства: $\frac{1}{2} + \alpha \leq 1$ и $\frac{1}{2} - \alpha \geq 0$. Отсюда получим несущественное ограничение на $\alpha : \alpha \leq 1/2$. Функция $S_\alpha f$ терият разрыв 1-го рода в точке $x = 1/2$. Поэтому мы будем их рассматривать как элементы подпространства из $L_\infty[0,1]$ с нормой:

$$||\cdot||_{L_\infty} = max(||\cdot||_{C[0,1/2]}, ||\cdot||_{C[1/2,1]}). \tag{3}$$

Получение равномерных приближений к функциям и их производным разрывным оператором Стеклова. Конструкция операторов, определенных в формуле (2), позволяет строить из них семейства операторов, с помощью которых можно получать равномерные приближения к производным функций, заданных на отрезке.

Теорема 3. *Для любой $f(x) \in C[0,1]$ имеет место сходимость:*

$$||S_\alpha f - f||_{L_\infty} \to 0, \qquad \alpha \to 0.$$

Пусть $f(x) \in C^m[0,1],\ m \geq 1$ - любое целое положительное число.

Рассмотрим следующие оператор:

$$D^m S_\alpha^{(m+1)} f = \begin{cases} D^m S_{\alpha_2}^{(m+1)} f, & x \in [0,1/2], \\ D^m S_{\alpha_1}^{(m+1)} f, & x \in [1/2,1]. \end{cases} \tag{4}$$

где D^m- оператор дифференцирования порядка m.

Теорема 4. *Справедливы следующие представления:*

$$D^m S_{\alpha 1}^{m+1} f = \alpha^{-(m+1)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k F_1(x - k\alpha), \tag{5}$$

$$D^m S_{\alpha 2}^{m+1} f = \alpha^{-(m+1)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k F_2(x + (m-k)\alpha), \tag{6}$$

где $m \geq 1, \alpha \leq \frac{1}{2(m+1)}, F_1(x) = \int_{x-\alpha}^{x} f(\xi) d\xi, \qquad F_2(x) = \int_{x}^{x+\alpha} f(\xi) d\xi.$

Теорема 5. *Для любой* $f(x) \in C^m[0,1], \alpha \leq \frac{1}{2(m+1)}$ *имеет место сходимость:*

$$||D^m S_\alpha^{m+1} f - f^{(m)}||_{L_\infty} \to 0 \qquad \text{при} \qquad \alpha \to 0. \tag{7}$$

Пусть функция $f(x)$ задана ее $\delta-$ приближением в $f_\delta(x)$ в среднеквадратичной метрике $||f_\delta(x) - f(x)||_{L_2[0,1]} \leq \delta$. Построим и в этом случае равномерные приближения к $f^{(m)}(x)$ на отрезке $[0,1]$ с помощью оператора $D^m S_\alpha^{m+1}$.

Введем в рассмотрении величину:

$$\Delta^{(m)}(\delta, S_\alpha^{(m+1)}, f) = \sup\{||D^m S_\alpha^{(m+1)} f_\delta - f^{(m)}||_{L_\infty} : ||f_\delta - f||_{L_2} \leq \delta\}.$$

Лемма 1. *Для сходимости* $\Delta^{(m)}(\delta, S_\alpha^{(m+1)}, f) \to 0$ *при* $\delta \to 0,\ \alpha \to 0$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялась сходимость* (2.5) *и сходимость* $\delta ||D^m S_\alpha^{(m+1)}||_{L_2 \to L_\infty} \to 0$ *при* $\delta \to 0,\ \alpha \to 0.$

Лемма 2. *Справедлива формула:*

$$||D^m S_\alpha^{(m+1)}||_{L_2 \to L_\infty} = C_m \alpha^{-\frac{2m+1}{2}},\ \text{где}\ C_m = ((m+1)...2m(m!)^{-1})^{1/2}.$$

Теорема 6. *Для выполнения сходимости* $\Delta^{(m)}(\delta, S_\alpha^{(m+1)}, f) \to 0$ *при* $\delta \to 0, \alpha \to 0$ *необходимо и достаточно выполнения согласования* $\alpha = \alpha(\delta)$ *такого, что* $\alpha(\delta) \to 0$ *и* $\delta(\alpha(\delta))^{-\frac{2m+1}{2}} \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

Построим равномерные приближения функции и ее производной на отрезке при $m = 1$. Пусть теперь $f(x) \in C^1[0,1]$.

Лемма 3. *Справедливы равенства:*

$$||DS_\alpha^{(2)}||_{L_2 \to L_\infty} = \sqrt{2}\alpha^{-3/2}. \tag{8}$$

Теорема 7. *Справедлива оценка, не улучшаемая по порядку* δ*:*

$$C_1 K^{3/5} \delta^{2/5} \le \Delta(\delta, DS_{\alpha(\delta)}^{(2)}, M) \le C_2 K^{3/5} \delta^{2/5},$$

$$\alpha(\delta) = \left(\frac{3\delta}{K\sqrt{2}}\right)^{2/5} \qquad C_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/5}, \qquad C_2 = C_1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{1/5} 2^{1/5}.$$

Построим равномерные приближения функции и ее производной на отрезке при $m = 2$. Пусть теперь $f(x) \in C^2[0,1]$.

Лемма 4. *Справедлива формула:*

$$||D^2 S_\alpha^{(3)}||_{L_2 \to L_\infty} = \sqrt{6}\alpha^{-5/2}. \tag{9}$$

Теорема 8. *Справедлива оценка, не улучшаемая по порядку* δ*:*

$$C_1 K^{3/7} \delta^{4/7} \le \Delta(\delta, DS_{\alpha(\delta)}^{(2)}, M) \le C_2 K^{3/7} \delta^{4/7},$$

$$\alpha(\delta) = \left(\frac{5\sqrt{1.5}\delta}{K}\right)^{2/7} \qquad C_1 = \left(\frac{5}{2}\right)^{2/5}, \qquad C_2 = C_1 + \left(\frac{5}{2}\right)^{2/7} 2^{2/7}.$$

Разностный метод в задаче приближения к непрерывной производной функции.

В данном разделе опираясь будет рассматриваться разностный метод решения задачи приближения непрерывной производной функции, заданной с погрешностью в C.

Рассмотрим оператор $\Delta_h^{(m)} f$:

$$\Delta_h^{(m)} f = \begin{cases} \Delta_{h_2}^{(m)} f, & x \in [a, a+\frac{h}{2}], \\ \Delta_{h_3}^{(m)} f, & x \in [a+\frac{h}{2}, b-\frac{h}{2}], \\ \Delta_{h_1}^{(m)} f, & x \in [b-\frac{h}{2}, b]. \end{cases} \tag{10}$$

Теорема 9. *Справедливы следующие представления:*

$$\Delta_{h_1}^{(m)} f = h^{-(m)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k f(x-kh), \tag{11}$$

$$\Delta_{h_2}^{(m)} f = h^{-(m)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k f(x+(m-k)h), \tag{12}$$

$$\Delta_{h_3}^{(m)} f = h^{-(m)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k f(x+(\frac{m}{2}-k)h). \tag{13}$$

где (11) - правая конечная разность, (12) - левая конечная разность, (13) - центральная конечная разность.

Теорема 10. *Для любой $f(x) \in C^{(m)}[0,1]$, при $h \leq 1/2m$ имеет место сходимость:*

$$||\Delta_h^m f - f^{(m)}||_C \to 0 \qquad \text{при} \qquad h \to 0.$$

Пусть вместо $f(x)$ задана $f_\delta(x)$, в равномерной метрике $||f_\delta(x) - f(x)||_C \leq \delta$. Построим в этом случае равномерные приближения к $f^{(m)}(x)$ на отрезке $[0,1]$ с помощью операторов $\Delta_h^{(m)}$.

Теорема 11. *Для сходимости $||\Delta_h^{(m)} f_\delta - f||$ при $h \to 0$, $\delta \to 0$ достаточно выполнения согласования $h = h(\delta)$ такого, что $h(\delta) \to 0$ и $\delta(h(\delta))^{(-m)} \to 0$ при $\delta \to 0$.*

Следовательно: $||\Delta_h^{(m)} f_\delta - f^{(m)}||_{L_\infty} \leq ||\Delta_h^{(m)} - f^{(m)}||_{L_\infty} + \delta||\Delta_h^{(m)}||_{C\to L_\infty}$, $\delta||\Delta_h^{(m)}||_{C\to L_\infty} \leq 2^m h^{-m}$. Требуется по известной нам $f_\delta(x)$ найти приближение к $f'(x)$ в каждой точке отрезка $[0,1]$.

Рассмотрим оператор Δ_h^m при $m = 1$:

$$\Delta_h f = \begin{cases} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} & x \in [a, a+\frac{h}{2}], \\ \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} & x \in [a+\frac{h}{2}, b-\frac{h}{2}], \\ \frac{f(x)-f(x-h)}{h} & x \in [b-\frac{h}{2}, b]. \end{cases} \tag{14}$$

Применим оператор $\Delta_h f$ к функции f_δ и рассмотрим велиину: $||\Delta_h f_\delta - f'||$.
Имеем: $||\Delta_h f_\delta - f'|| = ||\Delta_h f_\delta - \Delta_h f + \Delta_h f' - f'||$.
Очевидно, что: $\Delta_h f_\delta - \Delta_h f' = \Delta_h(f_\delta - f)$.
Тогда по неравенству треугольника имеем:

$$||\Delta_h f_\delta - f'|| \leq ||\Delta_h f_\delta - \Delta_h f|| + ||\Delta_h f - f'||.$$

Отсюда получаем: $||\Delta_h f - f'|| \to 0, \qquad h \to 0$.

Теорема 12. *Следовательно справедлива оценка:* $|\Delta_h(f_\delta - f)| \leq \frac{2\delta}{h}$. *Таким образом, чтобы* $\Delta_h f_\delta$ *служило приближением в* f', *согласуем разностный шаг с* h *с погрешностью исходной функции* δ.

Найдем зависимость $h(\delta)$ такое что:

1. $h(\delta) \to 0, \ \delta \to 0$.
2. $\frac{\delta}{h(\delta)} \to 0, \delta \to 0$.

Найдем минимум формулы :

$$\varphi(h, \delta) = Mh + \frac{2\delta}{h}, \ \varphi_h^{'} = 0, \ -\frac{2\delta}{h^2} + M = 0, \ h^2 = \frac{2\delta}{M}. \tag{15}$$

Таким образом $h(\delta)$ для метода конечных разностей при $m = 1$ примет вид: $h(\delta) = \sqrt{2\delta}$.

Теорема 13. *Если параметро* h *согласован с погрешностью* δ *так, то выполняются условия 1,2, то* $||\Delta_h f_\delta - f'|| \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

Аналогичным образом находится оценка при $m = 2$.

Следовательно $h(\delta) = (8\delta)^{1/3}$.

Смоделируем функцию. Моделирование функции с заданной погрешностью занимает важную роль в некорректно поставленных задачах. Для проведения численного эксперимента приведен алгоритм моделирования функции $f_\delta(x)$ по точно заданной функции $f(x)$. Пусть $f(x) \in C[a, b]$.

Разобьем отрезок на n частей. Таким образом $[a,b] = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, где x_i- точки разбиений. Фкнцию $f(x)$ заменим набором ее значений в узлах т.е. $f(x) = \{f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)\}$. Смоделируем функцию $f_\delta(x)$, которая будет удовлетворять следудющему неравенству: $||f_\delta - f(x)||_{L_2} \leq \delta$. Распишем норму в L_2 по формуле:

$$||f(x)||_{L_2} = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}. \tag{16}$$

Следовательно получаем: $\sqrt{\int_a^b (f_\delta(x)) - f(x))^2 dx} \leq \delta$. Для получения интеграла воспользуемся квадратурной формулой прямоугольников: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i-0}^{n-1} f(x_i)$, где n- число разбиений отрезка. Получим:

$$\sqrt{\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f_\delta(x_i) - f(x_i))^2} \leq \delta. \tag{17}$$

Проведем моделирование функции $f_\delta(x)$. Сначала рассмотрим набор значений $f_\delta(x_i)$ по формуле:

$$f_\delta(x_i) = f(x_i) + (-1)^i A_i \delta \qquad A_i - random[0,1] \qquad i = 0, 3, ..., n. \tag{18}$$

Подставим в (3.15) функцию f_δ из формулы (3.16).

Проведем численный эксперимент для функции $f(x) = x^2, a = 0, b = 1$.

$$\sqrt{\frac{1}{n}(\sum_{i=0}^{n}((-1)^i A_i \delta)^2} \leq \delta \tag{19}$$

Задаем n, δ. Выбираем A_i так чтобы выполнялась оценка: (3.18).

Применим численный алгоритм подсчета интеграла разрывного оператора Стеклова для функции f_δ.Получим:

Численный эксперимент по восстановлению первой производной функции. Построим численный алгоритм по восстановлению первой производной.

Пусть $m = 1$, таким образом представления (5) и (6) примут вид:

$$DS^2_{\alpha_1} f = \alpha^{-2} \sum_{k=0}^{1} (-1)^k C_1^k F_1(x - k\alpha) = \frac{F_1(x) - F_1(x-\alpha)}{\alpha^2},$$

для $f(x)$, где $x \in [1/2, 1]$.

$$DS^2_{\alpha_2} f = \alpha^{-2} \sum_{k=0}^{1} (-1)^k C_1^k F_2(x + (1-k)\alpha) = \frac{F_2(x+\alpha) - F_2(x)}{\alpha^2}.$$

для $f(x)$, где $x \in [0, 1/2]$.

Пусть нам дана смоделированная по некотрому закону функция заданная ее δ приближением: $f_\delta(x_i)$. Применим данные операторы к этой функции. Построим алгоритмы для подсчета интегралов этих операторов.Рассмотрим численный алгоритм подсчета интеграла разрывного оператора Стеклова. Пусть функция $f(x) \in C[0, 1]$. Нам требуется вычислить определенный интеграл: $\int_a^b f(x)dx$.

Рассмотрим для $DS^2_{\alpha_1} f_\delta$:

$$DS^2_{\alpha_1} f_\delta = \frac{1}{\alpha^2}\left[-\int_{x_i-2\alpha}^{x_i-\alpha} f_\delta(t)dt + \int_{x_i-\alpha}^{x_i} f_\delta(t)dt\right] = \frac{1}{\alpha \cdot n}\sum_{1}^{m}[f_\delta(t_l) - f_\delta(t_l-\alpha)] =$$

$$= \frac{1}{\alpha \cdot n}[(f_\delta(t_1) - f_\delta(t_1-\alpha)) + ... + (f_\delta(t_m) - f_\delta(t_m-\alpha))].$$

Рассмотрим для $DS^2_{\alpha_2} f_\delta$

$$DS^2_{\alpha_2} f_\delta = \frac{1}{\alpha^2}\left[-\int_{x_i}^{x_i+\alpha} f_\delta(t)dt + \int_{x_i+\alpha}^{x_i+2\alpha} f_\delta(t)dt\right] = \frac{1}{\alpha \cdot n}\sum_{0}^{m-1}[f_\delta(t_k+\alpha) - f_\delta(t_k)] =$$

$$= \frac{1}{\alpha \cdot n}[(f_\delta(t_0+\alpha) - f_\delta(t_0)) + ... + (f_\delta(t_{m-1}+\alpha) - f_\delta(t_{m-1}))].$$

Проведем численный эксперимента по восстановлениию производной функции при помощи интегрального оператора $DS^2_{\alpha} f_{\delta}$ и численного метода конечных разностей. Дана точная функция $f(x) = x^2$, на основее ее мы моделируем функцию $f_{\delta}(x)$.Параметр α задается зависимостью от δ: $\alpha(\delta) = \left(\frac{3\delta}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{5}}$. Параметр h задается зависимостью от δ: $h(\delta) = \sqrt{2\delta}$. Наша задача - сравнить эти два метода на модельной задаче, на сколько хорошо они восстанавливают эту функцию по дискретным значениям $f_{\delta}(x_i)$ и узнать как согласуются параметры α и δ в интегральном операторе и шаг h и δ в разностном методе.

Результаты восстановления первой производной функции x^2, когда α и h подсчитаны по точной формуле:

Рисунок 1 — Значения: $\delta = 0.05, N = 100$

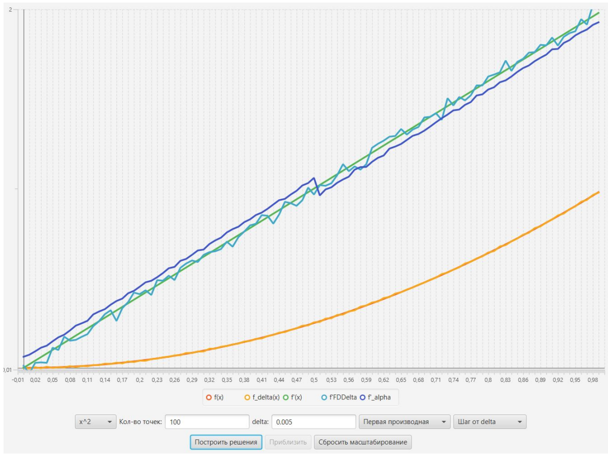

Рисунок 2 — Значения: $\delta = 0.005, N = 100$

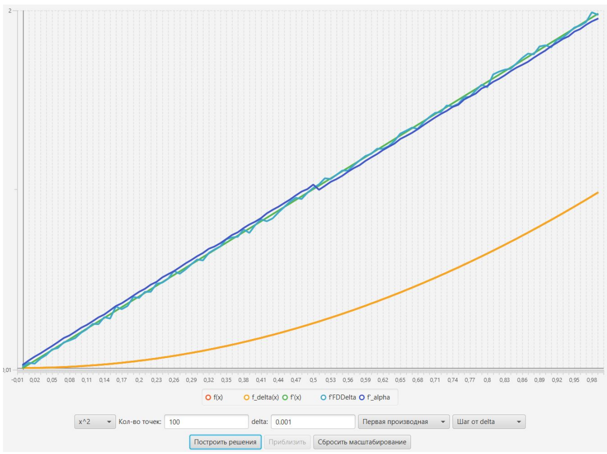

Рисунок 3 — Значения: $\delta = 0.001, N = 100$

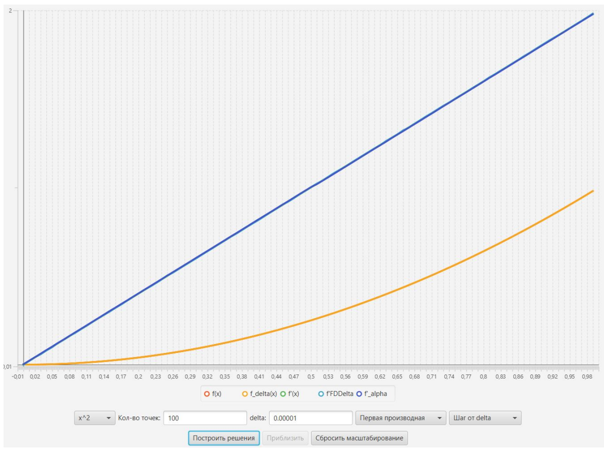

Рисунок 4 — Значения: $\delta = 0.00001, N = 100$

Численный эксперимент по восстановлению второй производной функции. Пусть $m = 2$, таким образом представления (5) и (6) примут вид:

$$D^2 S^3_{\alpha_1} f = \alpha^{-3} \sum_{k=0}^{2} (-1)^k C_2^k F_1(x - k\alpha) = \frac{F_1(x) - 2F_1(x-\alpha) + F_1(x-2\alpha)}{\alpha^3},$$

для $f(x)$, где $x \in [1/2, 1]$.

$$D^2 S^3_{\alpha_2} f = \alpha^{-3} \sum_{k=0}^{2} (-1)^k C_2^k F_2(x+(2-k)\alpha) = \frac{F_2(x+2\alpha) - 2F_2(x+\alpha) + F_2(x)}{\alpha^3},$$

для $f(x)$, где $x \in [0, 1/2]$.

Пусть нам дана смоделированная по некотрому закону функция заданная ее δ приближением: $f_\delta(x_i)$. Применим данные операторы к этой функции. Построим алгоритмы для подсчета интегралов этих операторов.

Рассмотрим для $D^2 S^3_{\alpha_1} f_\delta$:

$$D^2 S^3_{\alpha_1} f_\delta = \frac{1}{\alpha^3}\left[\int_{x_j-\alpha}^{x_j} f_\delta(t)dt - 2\int_{x_j-2\alpha}^{x_j-\alpha} f_\delta(t)dt + \int_{x_j-3\alpha}^{x_j-2\alpha} f_\delta(t)dt\right] =$$

$$= \sum_{1}^{m} \frac{1}{\alpha^3} \cdot \frac{\alpha}{n}[f_\delta(t_m) - 2f_\delta(t_m-\alpha) + f_\delta(t_m-2\alpha)] =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2 \cdot n}[(f_\delta(t_1) - 2f_\delta(t_1-\alpha) + f_\delta(t_1-2\alpha)) + ... + (f_\delta(t_m) - 2f_\delta(t_m-\alpha) + f_\delta(t_m-2\alpha))].$$

Рассмотрим для $D^2 S^3_{\alpha_2} f_\delta$

$$D^2 S^3_{\alpha_2} f_\delta = \frac{1}{\alpha^3}\left[\int_{x_i+2\alpha}^{x_i+3\alpha} f_\delta(t)dt - 2\int_{x_i+\alpha}^{x_i+2\alpha} f_\delta(t)dt + \int_{x_i}^{x_i+\alpha} f_\delta(t)dt\right] =$$

$$= \sum_{0}^{m-1} \frac{1}{\alpha^3} \cdot \frac{\alpha}{n}[f_\delta(t_{m-1}+2\alpha) - 2f_\delta(t_{m-1}+\alpha) + f_\delta(t_{m-1}))] =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2 \cdot n}[(f_\delta(t_0+2\alpha) - 2f_\delta(t_0+\alpha) + f_\delta(t_0)) + ... + (f_\delta(t_{m-1}+\alpha) - 2f_\delta(t_{m-1}+\alpha) + f_\delta(t_{m-1}))].$$

Проведем численный эксперимента по восстановлениию второй производной функции при помощи оператора $D^2 S^3_\alpha f_\delta$. Дана точная функция $f(x) = x^3$, на основее ее мы моделируем функцию $f_\delta(x)$ по некотрому закону.Параметр α задается зависимостью от δ: $\alpha(\delta) = \left(\frac{5\delta}{2}\right)^{\frac{2}{7}}$. Параметр h задается зависимостью от δ: $h(\delta) = (8\delta)^{1/3}$. Наша задача - сравнить эти два метода на модельной задаче, на сколько хорошо они восстанавливают эту функцию по дискретным значениям $f_\delta(x_i)$ и узнать как согласуются параметры α и δ в интегральном операторе и шаг h и δ в разностном методе. Результаты восстановления функции при точных α и h приведены далее на рисунках: Результаты восстановления первой производной функции x^3, когда α и h подсчитаны по точной формуле:

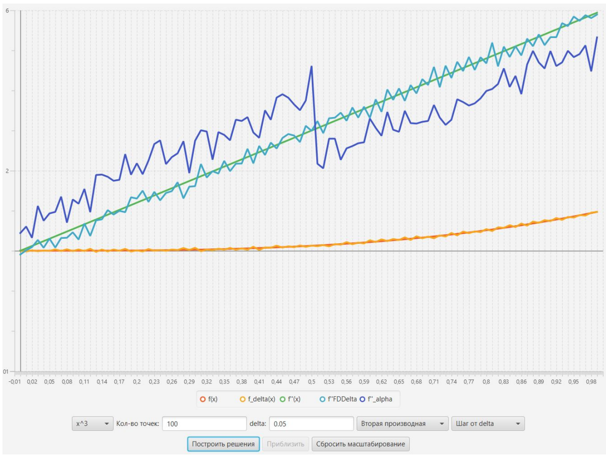

Рисунок 5 — Значения: $\delta = 0.05, N = 100$

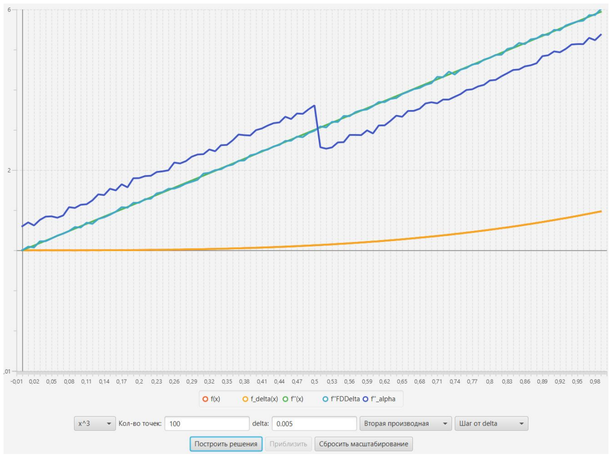

Рисунок 6 — Значения: $\delta = 0.005, N = 100$

Рисунок 7 — Значения: $\delta = 0.001, N = 100$

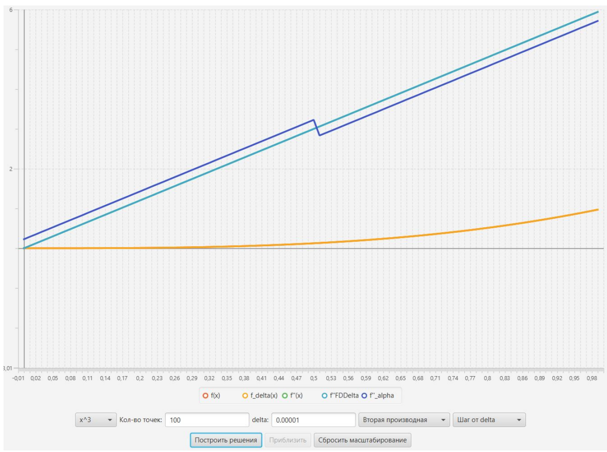

Рисунок 8 — Значения: $\delta = 0.00001, N = 100$

Заключение. На рисунках $(1-8)$, где δ - приближение,N - общее число узлов на $[0,1]$, отчетливо видно, что функции $DS_{\alpha}^{2}f_{\delta}$ (отмечена синим цветом) стремится к производной $f'(x)$ (отмечена зеленым цветом), функция $\Delta_h f_{\delta}$ (отмечена голубым цветом) аппроксимирует производную $f'_{\delta}(x)$ при $\delta \to 0$. Функция $DS_{\alpha}^{2}f_{\delta}$ строится с помощью функции $f_{\delta}(x)$ (отмечена оранжевым цветом), заданая дискретно и смоделирована для функции $f(x)$ (отмечена красным цветом). При проведении численного эксперимента были использованы функции $y = x^2$,$y = x^3$ а также согласования $\alpha(\delta)$ и $h(\delta)$. Рассмотрим графики на рисунках $(1-4)$, на которых продемонстированы результаты восстановления первой производной функции x^2, в случае, когда α и h подсчитаны по точной формуле, мы видим, что при высоких значениях δ функции $DS_{\alpha}^{2}f_{\delta}$ и $\Delta_h f_{\delta}$ плохо восстанавливают первую производную, но при низких значениях δ, например при $\delta = 0.001$ рис.(2). функция $DS_{\alpha}^{2}f_{\delta}$ лучше сглаживает первую производную, в то время как $\Delta_h f_{\delta}$ лучше аппроксимирует, но хуже сглаживает, однако при совсем низких показателях δ, как показано на рис.(4) эти различия несущественны. Обратим внимание, что при вычислении значений функции для второй производной интегральным оператором $D^2S_{\alpha}^{3}f_{\delta}$ и разностным оператором $\Delta_h^2 f_{\delta}$ рис. $(5-8)$ закономерности повторяются аналогичным образом.При подсчете α была использована формула согласования для разрывного оператора Стеклова, а для подсчета h была использована формула согласования для разностного метода. Благодаря этим формулам, мною была замечена закономерность такая, что чем точнее выбрана δ, тем точнее результат вычисления. В ходе выполнения магистерской работы были рассмотрены основы дифференцирования функции на отрезке на базе методов регуляризации, а так же изучена основная литература касающаяся темы получения равномерных приближений к функциям и их непрерывным производым при помощи разрывного оператора Стеклова. Проведенный численный эксперимент наглядно показал различия между разностным и интегральным методом восстановления непрерывных производных, заданных с погрешностью. Так же была получена закономерность: чем точнее выбрано δ и формула для согласования α и δ для интегрального метода и разностный шаг h и δ для разностного, тем точнее результаты вычисления.