МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

Резольвентный подход в методе Фурье

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 217 группы

направление 01.04.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Шершнева Сергея Романовича

Научный руководитель
Профессор, д. ф.-м. н.,
профессор ____________ А.П. Хромов

Зав. кафедрой
Профессор, д. ф.-м. н.,
профессор ____________ С.И. Дудов

Саратов 2022

Введение. Обоснование метода Фурье в задачах математической физики традиционно опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, получающихся из него почленным дифференцированием нужное число раз. В.А. Стеклов [1], впервые давший строгое обоснование метода Фурье, придерживался этой точки зрения. Эта точка зрения сделала метод Фурье очень популярным, было проведено большое количество исследований и достигнуты значительные успехи. Информация обзорного характера содержится, в частности, в книгах И.Г. Петровсого, В.И. Смирнова, О.А. Ладыженской, В.А. Ильина, В.А. Чернятина [2,7]. Недостатком такого подхода является то, что он требует завышения гладкости начальных данных. Выход из этого положения намечен А.Н. Крыловым в его исследованиях по ускорению сходимости рядов Фурье и им подобных. Суть его приема состоит в том, что изучаемый вопрос о дифференцировании ряда решается путем разбиения его на два ряда, один из которых точно суммируется (и тем самым в этом случае не надо прибегать к почленному дифференцированию), а второй ряд сходится настолько быстро, что его можно почленно дифференцировать. Им были успешно преодолены трудности, связанные с невозможностью почленного дифференцирования на ряде конкретных прикладных задач. Приведем его слова: «Изложенный прием усиления быстроты сходимости рядов Фурье и нахождения производных от функций, ими представляемых, может служить для доказательства или проверки того, что представляемая рядом функция действительно удовлетворяет тому дифференциальному уравнению, как решение коего она найдена, хотя бы самый ряд и нельзя дифференцировать почленно требуемое число раз». В.А. Чернятин приемом А.Н. Крылова с применением асимптотик для собственных значений и собственных функций успешно исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости, а в ряде случаев эти условия стали минимально возможными. Переход от формального решения к новому виду, вытекающему из исследований А.Н. Крылова, В.А. Чернятина, есть качественно новый шаг, позволяющий с исчерпывающей полнотой исследовать смешанные задачи методом Фурье и ставящий много новых важных вопросов и в теории функций.

В данной работе излагается дальнейшее развитие метода А.Н. Крылова и В.А. Чернятина путем привлечения метода контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей метода Фурье. В результате удается получить классическое решение двух смешанных задач для волнового уравнения (случаи условий закрепления и периодических) при минимальных условиях на исходные данные, не используя при этом уточненных асимптотик для собственных значений и никакой информации о собственных функциях.

Цель работы: ознакомиться с общими свойствами собственных функций и собственных значений, в том числе, с асимптотикой дифференциального оператора и изучить резольвентный подход в методе Фурье.

Магистерская работа состоит из введения, пяти разделов ("Асимптотика собственных значений и собственных функций дифференциального оператора"; "Смешанная задача для волнового уравнения с закрепленными концами"; "Смешанная задача для волнового уравнения с периодическими краевыми условиями"; "Смешанная задача для гиперболического уравнения с инволюцией"; "Определение собственных значений в методе Фурье"), заключения и списка использованных источников из 21 наименования. В приложении приведён исходный код программы, соответствующий пятому разделу данной работы.

Работа состоит из пяти разделов.

Асимптотика собственных значений и собственных функций дифференциального оператора. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$y'' - q(x)y + \lambda y = 0, \tag{1.1}$$

$$y(a) = 0, \tag{1.2}$$

$$y(b) = 0, \tag{1.3}$$

где $\lambda \in \mathbb{C},\ q(x) \geq 0$.

Краевая задача (1.1)-(1.3) при любых λ имеет тривиальное решение. Но при некоторых λ эта задача может иметь и нетривиальное решение.

Определение 1.1. Число λ_0 называется *собственным значением* краевой задачи (1.1)-(1.3), если при $\lambda = \lambda_0$ у нее существуют нетривиальные комплекснозначные решения. Эти решения называются *собственными функциями*, соответствующими собственному значенипю λ_0.

Если функция $y_0(x)$ - собственная функция, то и $cy_0(x)$ $(c \neq 0)$ - собственная функция.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $q(x)$ - вещественная непрерывная на $[a, b]$ функция, причем $q(x) \geq 0$.

Теорема 1.1. Собственные значения краевой задачи (1.1)-(1.3) являются вещественными и неотрицательными.

Смешанная задача для волнового уравнения с закрепленными концами. Обоснование метода Фурье в задачах математической физики традиционно опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, получающихся из него почленным дифференцированием нужное число раз. Изучаемый вопрос о дифференцировании ряда решается путем разбиения его на два ряда, один из которых точно суммируется (и тем самым в этом случае не надо прибегать к почленному дифференцированию), а второй ряд сходится настолько быстро, что его можно почленно дифференцировать.

Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \tag{2.1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = \phi(x), \ u'_t(x,0) = 0. \tag{2.3}$$

Это наиболее простой случай для исследования. Считаем, что $q(x) \in C[0,1]$ и комплекснозначная, и

$$\varphi(x) \in C^2[0,1], \ \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0. \tag{2.4}$$

Условия (2.4) на $\varphi(x)$ являются минимальными для существования классического решения. Условие $u'_t(x,0)=0$ берется для простоты.

Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора L:

$$Ly=-y''(x)+q(x)y(x),\ y(0)=y(1)=0.$$

Теорема 2.1. Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые, и для них имеют место асимптотические формулы:

$$\lambda_n=\rho_n^2,\ \rho_n=n\pi+O(1/n),\ (n=n_0,n_0+1,\dots).$$

Обозначим $\gamma_n=\{\rho||\rho-n\pi|=\delta\}$, где $\delta>0$ и достаточно мало, а $n\geq n_0$ и n_0 таково, что при всех $n\geq n_0$ внутрь и на границу γ_n попадает лишь по одному из ρ_n. Пусть $\tilde{\gamma_n}$ образ γ_n в λ-плоскости ($\lambda=\rho^2, Re\rho\geq 0$). Обозначим через R_λ резольвенту оператора L, т.е. $R_\lambda=(L-\lambda E)^{-1}$, где E - единичный вектор, λ - спектральный параметр. Тогда по методу Фурье формальное решение задачи (2.1)-(2.3) представимо в виде:

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)cos\rho td\lambda+\sum_{n\geq n_0}(\varphi,\psi_n)\varphi_n(x)cos\rho_n t, \tag{2.6}$$

где $r>0$ фиксировано и взято таким, что все собственные значения меньшие по модулю r имеют номера меньшие n_0, на контуре $|\lambda|=r$ нет собственных значений, $\varphi_n(x)$ собственная функция оператора L для собственного значения λ_n, система $\{\psi_n(x)\}$ биортогональна системе $\{\varphi_n(x)\}$. Представим в виде:

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)cos\rho td\lambda-\sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma_n}}(R_\lambda\varphi)cos\rho td\lambda. \tag{2.7}$$

Таким образом, получаем, что при формальном решении $u(x,t)$ не фигирируют ни собственные значения, ни собственные функции, поэтому исходным рядом будет ряд (2.8). Проведем дальнейшее преобразование ряда (2.8).

Теорема 2.2. Для формального решения $u(x,t)$ имеет место формула

$$u(x,t)=u_0(x,t)+u_1(x,t)+u_2(x,t), \tag{2.10}$$

где $u_0(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{R^0_\lambda g}{\lambda-\nu_0}cos\rho t d\lambda-\sum\limits_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma_n}}\frac{R^0_\lambda g}{\lambda-\nu_0}cos\rho t d\lambda,$

$u_1(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda-\nu_0}[R_\lambda g-R^0_\lambda g]cos\rho t d\lambda,$

$u_2(x,t)=-\sum\limits_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma_n}}\frac{1}{\lambda-\nu_0}[R_\lambda g-R^0_\lambda g]cos\rho t d\lambda,$

$R^0_\lambda=(L_0-\lambda E)^{-1}$ - резольвента оператора L_0, который есть оператор L при $q(x)\equiv 0$ (требования на ν_0 выполняются и для оператора L_0).

Теорема 2.3. Для резольвенты R_λ имеет место формула:

$$R_\lambda f=-z_2(x,\rho)(f,z_1)+v(x,\rho(f,z_2)+(M_\rho f)(x), \tag{2.13}$$

где $v(x,\rho)=\frac{z_2(x,\rho)z_1(1,\rho)}{z_2(1,\rho)},\ (f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx,$

$(M_\rho f)(x)=\int\limits_0^x M(x,t,\rho)f(t)dt,\ M(x,t,\rho)=\begin{vmatrix} z_1(t,\rho) & z_2(t,\rho)\\ z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho)\end{vmatrix}.$

Смешанная задача для волнового уравнения с периодическими краевыми условиями. Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-q(x)u(x,t), \tag{3.1}$$

$$u(0,t)=u(1,t),\ u_x(0,t)=u_x(1,t), \tag{3.2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u'_t(x,0)=0,\ x\in[0,1],\ t\in(-\infty,\infty), \tag{3.3}$$

где $q(x)\in C[0,1]$ комплекснозначная функция. Естественные минимальные требования для классического решения следующие:

$$\varphi(x)\in C^2[0,1],\ \varphi(0)=\varphi(1),\ \varphi'(0)=\varphi'(1). \tag{3.4}$$

Кроме того, в силу дифференциального уравнения

$$\varphi''(0)-\varphi''(1)-(q(0)-q(1))\varphi(0)=0. \tag{3.5}$$

При применении метода Фурье здесь возникают трудности из-за возможной кратности собственных значений соответствующей спектральной задачи.

Успешно справиться с этими трудностями позволяет резольвентный подход [21].

По методу Фурье с задачей (3.1)-(3.3) связывается спектральная задача для оператора L:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x),\ y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1). \tag{3.6}$$

Теорема 3.1. Для резольвенты R_λ оператора L имеет место формула:

$$R_\lambda f = -\frac{z_1(x,\rho)}{\Delta(\rho)}\begin{vmatrix} U_1(M_\rho f) & u_{12}(\rho) \\ U_2(M_\rho f) & u_{22}(\rho)\end{vmatrix} - \frac{z_2(x,\rho)}{\Delta(\rho)}\begin{vmatrix} u_{11}(\rho) & U_1(M_\rho f) \\ u_{21}(\rho) & U_2(M_\rho f)\end{vmatrix} + (M_\rho f)(x), \tag{3.7}$$

где $U_1(y) = y(0) - y(1),\ U_2(y) = y'(0) - y'(1),\ u_{ij}(\rho) = U_1(z_j),\ \Delta(\rho) = det(u_{ij}(\rho))^2_{i,j=1},\ \lambda = \rho^2,\ Re\rho \geq 0$.

Теорема 3.2. Нули ρ_n определителя $\Delta(\rho)$, достаточно большие по модулю, образуют две серии с асимптотикой $\rho'_n = 2\pi n + \epsilon'_n,\ \rho''_n = 2\pi n + \epsilon''_n$ $(n = n_0, n_0+1, \dots)$, где ϵ'_n и ϵ''_n стрмятся к нулю при $n \to \infty$. В случае $\epsilon'_n \neq \epsilon''_n$ они простые, а в случае $\epsilon'_n = \epsilon''_n$ они двукратные.

Смешанная задача для гиперболического уравнения с инволюцией. В данном разделе методом Фурье решается следующая смешанная задача с инволюцией:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + q(x)u(1-x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{4.1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{4.3}$$

где $q(x)$ - комплекснозначная функция из $C^1[0,1]$ такая, что $q(0) = q(1)$, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет естественным минимальным требованиям: $\varphi(x) \in C^1[0,1], \varphi(0) = \varphi(1), \varphi'(0) = \varphi'(1)$.

Рассматривая простейшую смешанную задачу с инволюцией при производной $u_x(x,t)$ и применяя идеи А. Н. Крылова и В. А. Чернятина, можно избежать исследования равномерной сходимости почленно продифференцированного формального решения по методу Фурье. Это позволяет получить классическое решение задачи при минимальных требованиях на $\varphi(x)$.

Теорема 4.2. Если $\operatorname{Re}\lambda \geq -h$, то для $U(x,\lambda) = (u_{ij}(x))_1^2$ в формуле (4.11) справедливь асимптотические формулы:

$$u_{11}(x) = 1 + \frac{1}{2\lambda}\int_0^x q_1(t)q_2(t)dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$
$$u_{12}(x) = \frac{1}{2\lambda}\left(q_2(x) - q_2(1)e^{-2\lambda(1-x)} + \int_x^1 e^{2\lambda(x-t)}q_2'(t)dt\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$
$$u_{21}(x) = -\frac{1}{2\lambda}\left(q_1(x) - q_1(0)e^{-2\lambda x} - \int_0^x e^{-2\lambda(x-t)}q_1'(t)dt\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$
$$u_{22}(x) = 1 - \frac{1}{2\lambda}\int_0^x q_1(t)q_2(t)dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

где $q_2(x) = q(x), q_1(x) = -q(1-x), O\left(1/\lambda^2\right)$ регулярны при больших $|\lambda|$ и оценки $O(\cdot)$ равномерны по x.

Аналогичные формулы справедливы и при $\operatorname{Re}\lambda \leq h$.

Нахождение собственных значений. Рассмотрим смешанную задачу (2.1)-(2.3). Была разработана программа нахождения собственных значений спектральной задачи (2.5), которая используется в методе Фурье:

$$-y'' + q(x)y = 0,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0 \qquad (5.1).$$

В основе метода нахождения собственных значений (5.1) используется следующая теорема [11]:

Теорема 5.1. Пусть $g(x) \geq 0$ и непрерывная на $[0;\pi]$. Тогда вес собственнных значений задачи (5.1) неотрицательный.

Теорема 5.2. Для того, чтобы число $\lambda_0 = \rho_0^2,\ \rho_0 > 0$, было собственное значение задачи (5.1), необходимо добавить, чтобы

$$y_0(\pi,\rho_0) = 0, \tag{5.2}$$

где $y_0(x,\rho)$ является решением задачи, выполняется:

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y + \rho_0^2 y = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = \rho_0 \end{cases} \tag{5.3}$$

Задача (5.3) в программе решается методом Рунге-Кутта.

Для этого задача (5.3) сводится к задаче Коши

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_1(0) &= 0, \\ y_2' &= -q(x)y_1 + \rho^2 y, & y_2(0) &= \rho, \end{aligned}$$

где $y_1(x) = y(x),\ y_2(x) = y'(x)$.

Для реализации метода Рунге-Кутты используется язык Python. Код программы приведен в приложении.

Заключение. Многие вопросы математической физики приводят к задаче определения собственных значений и собственных функций дифференциальных операторов и разложения произвольной функции в ряд по собственным функциям. Например, к подобным вопросам приходят всегда, применяя метод Фурье для нахождения решения дифференциального уравнения в частных производных, удовлетворяющего начальным и краевым условиям. Особенно интенсивно спектральный анализ дифференциальных операторов используется в квантовой механике, где он является основным математическим аппаратом для решения многих задач.

В процессе написания магистерской работы были рассмотрены асимптотические свойства собственных функций и собственных значений; изучена смешанная задача для волнового уравнения с закрепленными концами; изучена смешанная задача для волнового уравнения с периодическими краевыми условиями; изучена смешанная задача для гиперболического уравнения с инволюцией; описана программа нахождения собственных значений спектральной задачи.