

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической теории  
упругости и биомеханики

**Теоретическое и экспериментальное исследование влияния внутреннего  
трения на распространение упругих волн в пластине**

**АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 2 курса 237 группы

направления 01.04.03 – Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Плешкова Владимира Николаевича

Научный руководитель  
профессор, д.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_

подпись, дата

М.В. Вильде

Зав. кафедрой  
д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_

подпись, дата

Л.Ю. Коссович

Саратов 2022

## **Введение**

Настоящая магистерская работа посвящена разработке методов исследования упругих волн в пластинах с учетом внутреннего трения.

**Актуальность темы.** На настоящий момент интенсивно развиваются методы неразрушающего контроля с применением волн, распространяющихся вдоль лицевых поверхностей (guided waves) [1]. Самым распространенным типом волн, используемых для этой цели, являются волны Лэмба [2]. С середины прошлого века в научной литературе исследуются краевые волны, которые распространяются вдоль края пластины или оболочки и затухают при удалении от края. К настоящему времени эти волны достаточно хорошо исследованы теоретически на основе модели идеально упругого тела [3], в последние годы с помощью лазерных виброметров началось активное экспериментальное исследование краевых волн [4,5].

В теории, основанной на модели идеально упругого тела, волны распространяются без затухания, но в реальности, вследствие наличия внутреннего трения, а также рассеяния на микроструктуре, все волны в упругих телах затухают. Как теоретически, так и практически, исследование затухания представляет интерес, так как с помощью теоретических моделей можно было бы использовать экспериментальные данные о затухании волн в качестве источника информации о свойствах материала или наличии дефектов.

**Целью** данной работы является развитие экспериментальных методов и математических моделей, описывающих влияние внутреннего трения на распространение цилиндрических волн Лэмба и планарной краевой волны в пластине.

**Задачами** выполняемой работы являются:

1) построить модели, описывающие влияние внутреннего трения на распространение краевой волны в пластине с пленкой на торце и цилиндрических волн в круглой пластине, получить аналитическое решение краевых задач, моделирующих натурные эксперименты;

2) протестировать метод матричных пучков на численных результатах решения модельной задачи, сделать выводы о возможности и пределах его применения;

3) применить метод матричных пучков к реальным экспериментальным данным, разработать алгоритмы для очистки результатов от шума;

4) провести сравнение теоретических и экспериментальных кривых коэффициента затухания и оценить возможность подбора вязкоупругих параметров материала.

**Материалами** исследования являются математические модели и данные экспериментов, описывающие распространение волн Лэмба и краевых волн.

**Научная значимость** работы состоит в исследовании возможностей использования метода матричных пучков для определения затухания краевых волн и волн Лэмба, и в том числе цилиндрических волн, а также в выводах, содержащих рекомендации по методике проведения натурального эксперимента.

**Научная новизна** работы заключается в демонстрации влияния световозвращающей пленки на дисперсию и затухание упругих волн в алюминиевых пластинах.

**Структура и объем работы.** Магистерская работа состоит из введения, семи основных разделов, заключения, списка используемых источников, включающего 32 наименования. Работа изложена на 58 листах машинописного текста, содержит 53 рисунка.

**Положения, выносимые на защиту:**

– световозвращающая пленка влияет на дисперсию и затухание упругих волн в алюминиевых пластинах;

– рекомендации по определению оптимальных размеров области поля скоростей цилиндрических волн для экспериментального определения затухания с помощью метода матричных пучков;

– результаты исследования влияния параметра числа волн по окружной координате на точность определения затухания.

## Основное содержание работы

Во введении описывается актуальность поставленной задачи, формулируется цель исследования и ставятся задачи.

*Первый раздел* состоит из трех подразделов. В нем представлена информация о теории упругих волн, распространяющихся в пластине.

Решена задача о распространении планарной краевой волны в пластине, срединная плоскость которой занимает область  $-\infty < x_1 \leq 0$ ,  $-\infty < x_2 < \infty$ , со световозвращающей пленкой на торце. Наличие пленки моделировалось с помощью приведенных граничных условий. Для учета вязкоупругих свойств пленки использовалась модель наследственно-упругого тела Ю. Н. Работнова с ядром релаксации в виде дробно-экспоненциальной функции Работнова [6]. Задача была сведена к решению уравнений для волновых потенциалов. С помощью преобразования Лапласа по времени и преобразования Фурье по  $x_2$  было получено решение в изображениях. Для обращения преобразования Лапласа использовалась теорема о вычетах. Полюса построенного изображения соответствуют корням дисперсионного уравнения, полученного в ходе решения. С помощью формулы обращения преобразования Фурье было получено окончательное решение в виде поля скоростей распространения волны.

Также решена задача о распространении цилиндрических волн в круглой пластине областью  $-h \leq z \leq h$ ,  $r \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Рассматривался общий случай, так как в реальных экспериментах актуатор имеет неосесимметричные поля. Для учета вязкоупругих свойств материала, как и в случае прямоугольной пластины, использовалась модель наследственно-упругого тела Ю. Н. Работнова. Для получения решения в изображениях использовалось преобразование Лапласа по времени и преобразование Ханкеля по  $r$ . С помощью теоремы о вычетах было обращено преобразование Ханкеля, полюса построенного изображения соответствуют корням дисперсионного уравнения

Рэлея-Лэмба. Для окончательного получения точного решения использовалась формула обращения преобразования Лапласа.

*Второй раздел* посвящен описанию экспериментов с лазерным виброметром, на основе которых изучались волны Лэмба и краевые волны. В экспериментах по исследованию краевых волн рассматривались тонкие пластины с размерами  $600 \times 400 \times 4.85$  мм<sup>3</sup> и прямоугольным актуатором, и толстые пластины с размерами  $500 \times 500 \times 20$  мм<sup>3</sup> и круглым актуатором. При исследовании волн Лэмба рассматривалась пластина, у которой размеры были  $600 \times 600 \times 2$  мм<sup>3</sup> и использовался круглый актуатор. Размер прямоугольного актуатора –  $30 \times 5 \times 0.25$  мм<sup>3</sup>, круглый актуатор имел толщину 0.25 мм и радиус 16 мм. В ряде экспериментов на измеряемую поверхность была наклеена тонкая световозвращающая пленка, которая представляет собой композитный материал, состоящий из клейкого слоя и стеклянных микросфер, радиусы которых были немного различны. Толщина пленки составляла 100 мкм, из которых 50 мкм приходится на часть клейкого слоя без стеклянных микросфер. Результат экспериментов – поля скоростей.

*Третий раздел* посвящен описанию численных экспериментов по решениям, которые были построены в первом разделе. В модели задавались следующие свойства материала пластины:  $\mu = 26.32$  ГПа,  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0.33$ . Использовались два вида нагрузки, описывающие действие пьезоупругого актуатора: в форме тонального импульса, либо в форме прямоугольного импульса. Для проведения численных экспериментов по изучению возможности метода матричных пучков вычисляются дискретные поля скоростей, моделирующие поля, получаемые в результате натурального эксперимента.

*Четвертый раздел* посвящен методу матричных пучков [7], который позволяет из экспериментальных данных – полей скоростей, получить комплексные волновые числа, мнимая часть которых соответствует коэффициентам затухания. В реальных экспериментальных данных присутствует шум, поэтому после применения метода матричных пучков

использовались два фильтра. Первый фильтр по величине максимальной амплитуды одномерного преобразования Фурье оставлял только те частоты, на которых амплитуда превосходит некоторое пороговое значение, подбираемое в зависимости от эксперимента. После этого использовался фильтр по близости к теоретической дисперсионной кривой, который отсеивает остатки шума.

*Пятый раздел* посвящен анализу результатов численных экспериментов.

На большом расстоянии от источника амплитуда волны затухает пропорционально величине  $1/\sqrt{r}$ . Умножая экспериментально измеренное поле на  $\sqrt{r}$ , можно получить данные, в которых остается только экспоненциальная зависимость, предполагаемая методом матричных пучков [8]. Как представлено на рисунке 3, умножение на  $\sqrt{r}$  позволяет достаточно точно восстановить затухание, за исключением области низких частот, граница которой может быть приблизительно оценена как 300 кГц. Все последующие результаты были построены с учетом закона убывания амплитуды волны пропорционально  $\sqrt{r}$ .

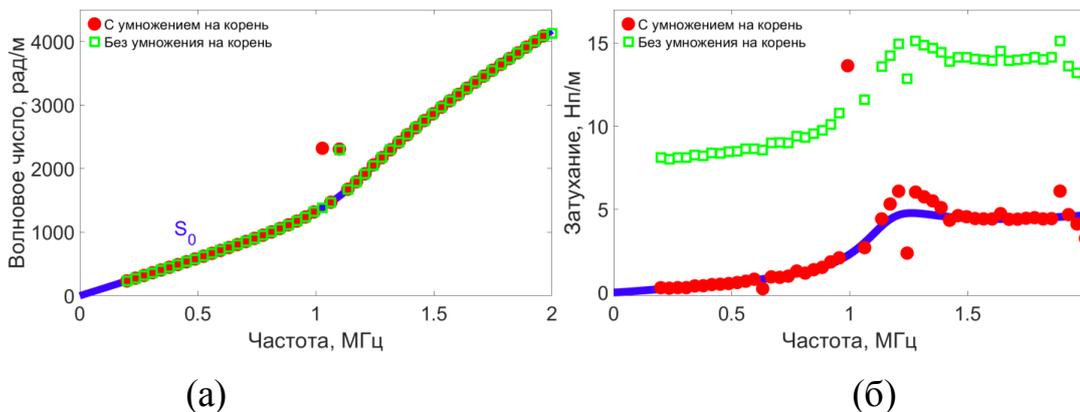


Рисунок 1 – Результат для моды  $s_0$ : волновое число (а), затухание (б)

Также было проведено исследование по изучению влияния размера области на затухание по методу матричных пучков. Размер области был увеличен или уменьшен в два раза только по времени или только по пространству в сравнении с 0.2м и 100 мкс, как представлено на рисунке 2. Результаты по методу матричных пучков местами перестали совпадать, так как начиная с какой-то координаты или начиная с какого-то времени в поле скоростей сигнал пропадает, и остаются только шумы. Если одновременно

увеличивать размер области по времени и размер области по пространству, то области, в которых отсутствует сигнал, становятся меньше, и больше точек по методу матричных пучков совпадает.

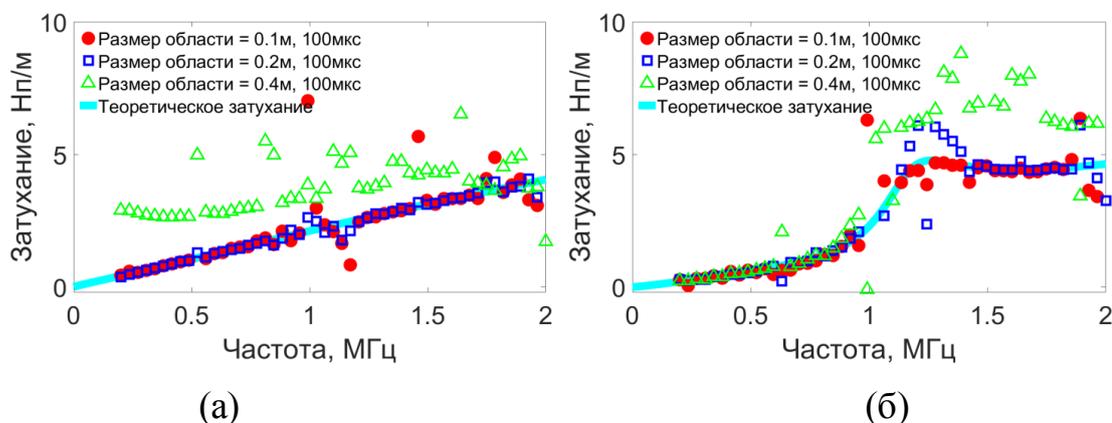


Рисунок 2 – Зависимость точности определения затухания от размера области по пространству для моды  $a_0$  (а),  $s_0$  (б)

Также выполнены численные эксперименты, в которых сигнал представлял собой сумму полей пяти мод. В методе матричных пучков был выбран параметр  $\mu=5$ . Сравнение результатов при различных параметрах вязкоупругости показало, что метод матричных пучков работает лучше при больших значениях указанных параметров. Результаты для этого случая приведены на рисунке 3.

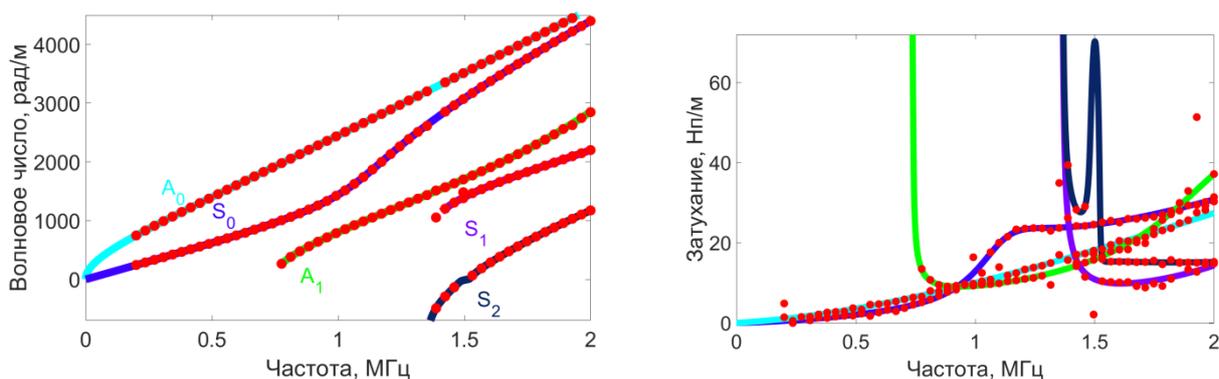


Рисунок 3 – Результаты при больших значениях вязкоупругих параметров

Также было проведено исследования влияние параметра  $n$ , отвечающего за несимметричность нагрузки актуатора в реальных экспериментах, результаты приведены на рисунке 4. При увеличении данного параметра метод матричных пучков перестает совпадать с теоретическими кривыми по

затуханию, при этом результаты уходят ниже теоретической кривой и могут уходить в отрицательную область, а результаты по волновому числу могут быть слишком разбросаны от теоретической кривой без какой-либо зависимости.

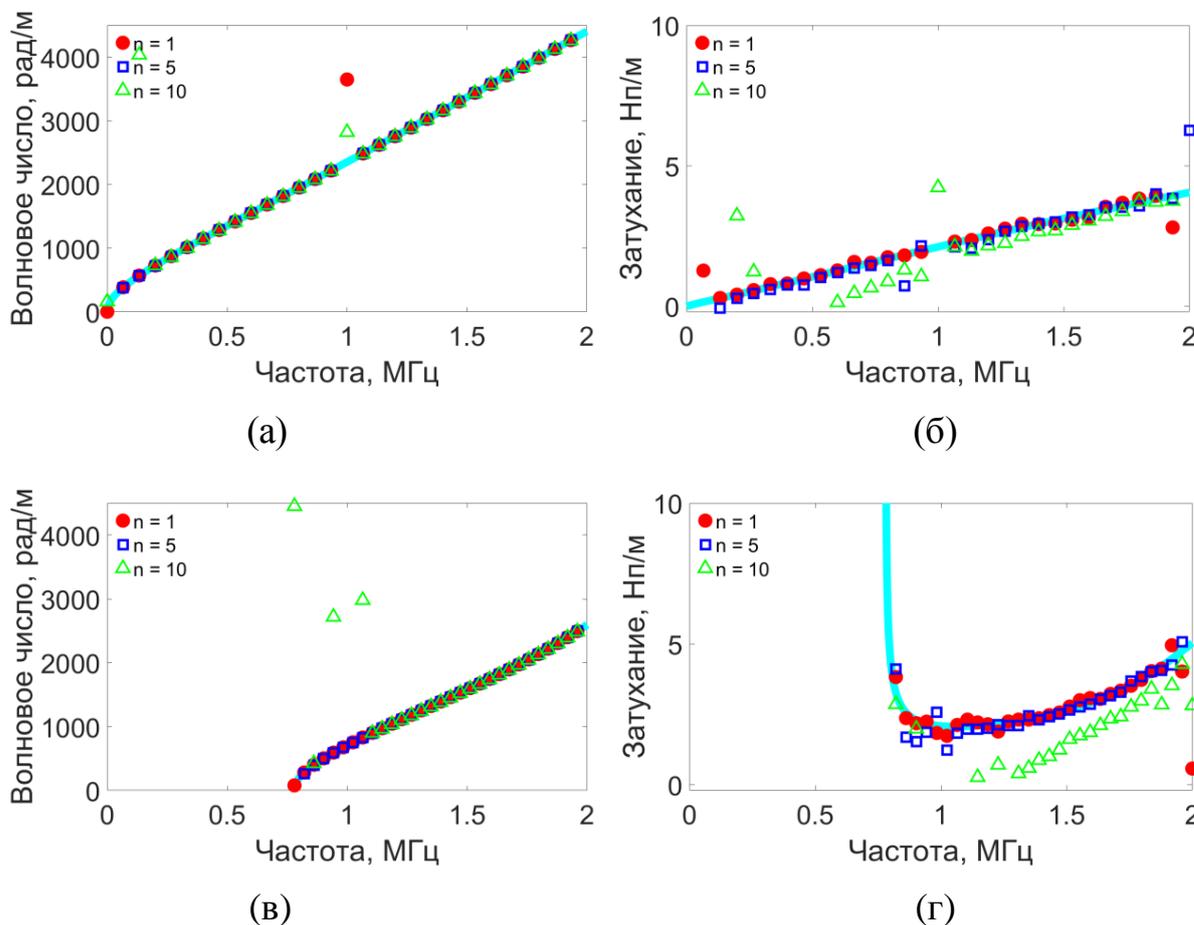


Рисунок 4 – Влияние  $n$  на точность определения дисперсионных параметров мод  $a_0$  (а), (б) и  $a_1$  (в), (г)

Для исследования фундаментальной симметричной краевой волны было проведено два численных эксперимента, для случая без пленки и с пленкой. В целом результаты показывают эффективность использования метода матричных пучков.

*Шестой раздел* посвящен анализу экспериментальных данных. Результаты данного раздела частично были опубликованы в работах [9-12]. Из экспериментов на пластине толщиной 4.85 мм были сделаны следующие выводы: на затухание и медленность фундаментальной краевой волны влияет не только пленка на торце, но и пленка на лицевой поверхности. Эффект

затухания симметричной краевой волны из-за пленки на боковой поверхности требует дополнительного изучения. Аналогичным образом обработаны результаты измерений на поверхности пластины толщиной 2 мм, где круглым актуатором и прямоугольной нагрузкой возбуждались волны Лэмба. Было проведено два эксперимента, с пленкой на поверхности и без неё. Поведение дисперсионных кривых в случае, если используется пленка, иное и не совпадает с теоретическими дисперсионными кривыми. Анализ полученных результатов показывает, что затухание волн Лэмба при использовании световозвращающей пленки значительно больше по сравнению с экспериментами, где пленка не использовалась.

Для обработки результатов также использовались данные толстой пластины, результат аналогичен предыдущему, в экспериментах с пленкой наблюдается другое поведение краевых волн, отличное от теоретических дисперсионных кривых.

*Седьмой раздел* посвящен сравнению теории с экспериментами. Так как экспериментальные данные для 4.85 мм пластины с пленкой только на торце отсутствуют, то было принято решение вычесть аппроксимацию результатов по затуханию серии 1, где на торец и на поверхность пластины была приклеена световозвращающая пленка и серии 2, где световозвращающая пленка была приклеена только на поверхности. Как представлено на рисунке 5, полученная разность сравнивалась с теоретическими моделями, где теоретическая модель I была с теми же параметрами, как в первом разделе, а в теоретической модели II к тем же самым параметрам вязкоупругости пленки и свойствам пленки, пластины добавились параметры вязкоупругости материала пластины.

Для пластины толщиной 2 мм в теоретической модели задавались свойства алюминия  $\mu = 26.32$  ГПа,  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0.33$ , а параметры вязкоупругости материала были равны:  $\gamma_E = 0.1$ ,  $\gamma = 0.4$ ,  $\theta = 4.36$  с. Сравнение результатов экспериментов по методу матричных пучков с теоретической моделью представлены на рисунке 5. В целом результаты экспериментов по

методу матричных пучков хорошо сходится с построенной в первом разделе теоретической моделью цилиндрических волн.

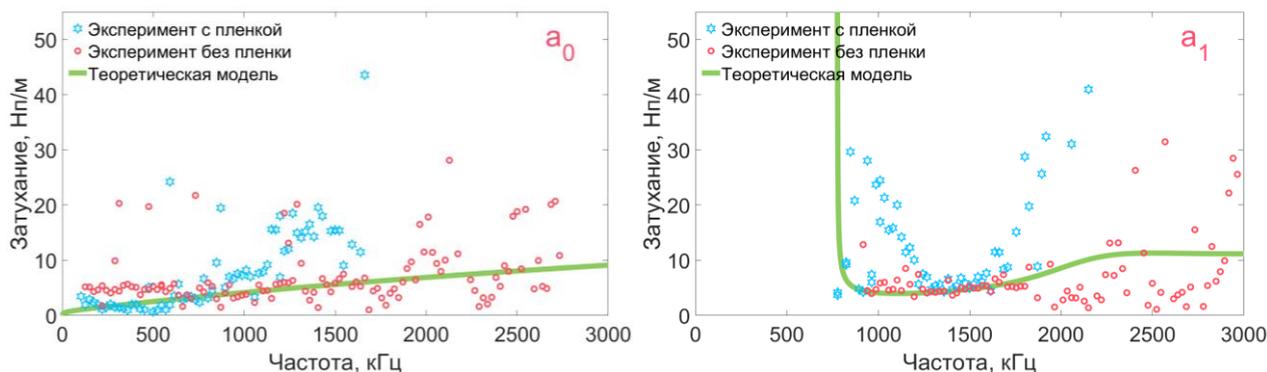


Рисунок 5 – Сравнение теоретической модели с экспериментом для волн Лэмба:

$a_0$  (а),  $a_1$  (б)

### Заключение

В ходе проделанной работы получены решения задачи о распространение краевой волны в пластине с пленкой на торце и о распространении цилиндрических волн в круглой пластине. Разработаны и реализованы в системе MATLAB программы для обработки экспериментальных данных о распространении упругих волн. В целом можно отметить, что метод матричных пучков является эффективным средством определения затухания упругих волн, однако существует ряд ограничений, при которых затухание определяется неверно.

Показано, что световозвращающая пленка оказывает значительное влияние на затухание упругих волн. С другой стороны, она улучшает качество сигнала, что тоже важно для определения затухания, на которое сильно влияет шум. В связи с этим, при проведении экспериментов по определению затухания по дисперсионным кривым рекомендуется:

- а) использовать как можно более широкий диапазон частот;
- б) сделать область наблюдения по пространству как можно больше;
- в) производить сканирование не по одной линии, а по двумерной области, чтобы определить степень неосесимметричности поля;

г) при применении метода матричных пучков контролировать вид волнового поля в рассматриваемой пространственно-временной области;

д) провести ряд экспериментов с пленкой и без пленки.

Автор выражает благодарность сотрудникам Института математики, механики и информатики Кубанского государственного университета Голубу М. В. и Еремину А. А. за предоставленные экспериментальные данные.

#### **Список использованных источников**

- 1 Rose, J. L. The upcoming revolution in ultrasonic guided waves / J. L. Rose // *Nondestructive Characterization for Composite Materials, Aerospace Engineering, Civil Infrastructure, and Homeland Security*. – 2011. – V. 7983. – 31 p.
- 2 Mitra, M. Guided wave based structural health monitoring: A review / M. Mitra, S. Gopalakrishnan // *Smart Materials and Structures*. – 2016. – V. 25, №. 5. – P. 053001.
- 3 Вильде, М. В. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах / М. В. Вильде, Ю. Д. Каплунов, Л. Ю. Коссович. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 280 с.
- 4 Wilde, M. V. Experimental and theoretical investigation of transient edge waves excited by a piezoelectric transducer bonded to the edge of a thick elastic plate / M. V. Wilde, M. V. Golub, A. A. Eremin // *Journal of Sound and Vibration*. – 2019. – V. 441. – P. 26-49.
- 5 Wilde, M. V. Experimental observation of theoretically predicted spectrum of edge waves in a thick elastic plate with facets / M. V. Wilde, M. V. Golub, A. A. Eremin // *Ultrasonics*. – 2019. – V. 98. – P. 88-93.
- 6 Работнов, Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
- 7 Schöpfer, F. Accurate determination of dispersion curves of guided waves in plates by applying the matrix pencil method to laser vibrometer measurement data / F. Schöpfer, F. Binder, A. Wöstehoff, T. Schuster, S. von Ende, S. Föll, R. Lammering // *CEAS Aeronautical Journal*. – 2013. – V. 4, №. 1. – P. 61-68.

- 8 Chekroun, M. Analysis of coherent surface wave dispersion and attenuation for non-destructive testing of concrete / M. Chekroun, L. Le Marrec, O. Abraham, O. Durand, G. Villain // *Ultrasonics*. – 2009. V. 49, №. 8. – P. 743-751.
- 9 Плешков, В. Н. Применение метода матричных пучков для экспериментального исследования затухания краевых волн в пластинах / В. Н. Плешков, М. В. Вильде // М.: ИМАШ РАН. – XXXII международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения. Сборник трудов. – 2021. – С. 547-554.
- 10 Golub M. V. Influence of retroreflective films on the behaviour of elastic guided waves measured with laser Doppler vibrometry / A. A. Eremin, M. V. Golub, M. V. Wilde, V. N. Pleshkov // *Measurement*. – 2022. – Vol. 190. – P. 110572.
- 11 Плешков, В. Н. Применение метода матричных пучков для обработки экспериментальных данных о распространении краевых волн / В. Н. Плешков // Саратов: Издательство Саратовского университета. – Научные исследования студентов Саратовского государственного университета. – 2021. – С. 5-7. – ISSN 2305-2937.
- 12 Вильде, М. В. Теоретическое и экспериментальное исследование влияния внутреннего трения на распространение фундаментальной симметричной краевой волны / М. В. Вильде, В. Н. Плешков, Н. В. Сергеева // IX Поляховские чтения: материалы международной научной конференции по механике, Санкт-Петербург, 09–12 марта 2021 года / Санкт-Петербургский государственный университет. – Санкт-Петербург: ООО "Издательство ВВМ", 2021. – С. 301-303.