



**Введение.** Теория конформных отображений является одним из основных математических методов решения задач механики сплошной среды, гидро- и аэродинамики, теории упругости и многих разделов физики. На сегодняшний день имеется множество различных подходов к решению экстремальных задач. Параметрический метод является одним из основных. Используя теорему Каратеодори о сходимости семейства плоских областей к ядру, в 1923 году Лёвнер вывел уравнение для семейства отображений. Уравнение Лёвнера легло в основу одного из главных методов исследования в геометрической теории функций. Изначально этот способ использовался с целью получения некоторых оценок. На протяжении многих лет дифференциальное уравнение Левнера служило мощным средством изучения свойств однолистных функций в единичном круге. Обнаруженные связи теории Левнера со многими разделами математики объясняют растущий интерес к ней в современных исследованиях. Дальнейшая работа над этим привела к более глубоким результатам. Уравнение Левнера для верхней полуплоскости  $\mathbb{H}$  появилось значительно позднее и стало особенно популярным в последние десятилетия. Нахождение случаев интегрируемости уравнений типа Левнера являлось и продолжает быть трудной и важной задачей в геометрической теории функций.

**Основное содержание работы.** Основной объект, с которым мы работаем в данной работе – это уравнение Лёвнера. Существует довольно много версий дифференциального уравнения Лёвнера, зависящих от интересующей нас области. Основное внимание уделено хордовому уравнению, которое является уравнением Лёвнера в верхней полуплоскости.

Прямая версия хордового уравнения представляет собой дифференциальное уравнение, имеющее вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t, z) = \frac{2}{g(t, z) - \xi(t)}, \quad g(0, z) = z \quad (1)$$

Где  $\xi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна, а область для  $z$  является верхней полуплоскостью, обозначаемой  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ .

Теперь посмотрим на уравнение с точки зрения геометрии. Пусть  $z_0$  – такая точка, что знаменатель правой части (1) равен нулю, т.е.  $g(t, z_0) = \xi(t)$ .

В результате производная,  $(t, z)$ , испытывает сингулярность в этой точке. При определенных условиях на  $\xi$  мы можем гарантировать, что множество всех таких точек порождает кривую, берущую своё начало на вещественной оси. Будем обозначать эту кривую  $\gamma$ . Определим теперь  $G_t = \{z \in \mathbb{H} : t < T_z\}$ , где содержатся только те точки из  $\mathbb{H}$ , которые в течение некоторого времени  $t < T_z$  делают точки сингулярными. Теперь  $G_t$  - наша область для (1). Схематично этот процесс изображен на рисунке (1)

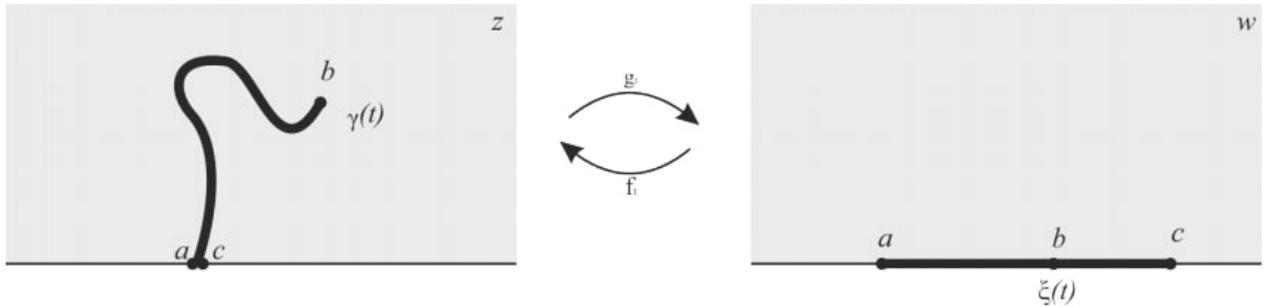


Рисунок 1 — Вертикальная линия после отображения становится горизонтальной линией на вещественной оси.

Поскольку в уравнение (1) мы подставляем разные управляющие функции  $\xi$ , то мы будем говорить, что  $\xi$  порождает  $g(t, z)$  и соответствует области  $G_z$ . Кроме того,  $\xi$  часто называют функцией управления. По мере написания данной работы будут использоваться обозначения как  $g_t(z)$ , так и  $g(t, z)$ , что само по себе одно и то же.  $g_t$  - это конформное отображение из  $G_z$  в  $\mathbb{H}$ .

Будем утверждать, что  $\lim_{z \rightarrow \infty} (g_t(z) - z) = 0$ , поэтому наше отображение будет выглядеть как тождественное отображение, когда  $z$  находится далеко от начала координат. Рассматривая разложение  $g_t$ , заметим, что все коэффициенты  $z_n$  при  $n \geq 2$  и константа должны быть равны нулю, аналогично коэффициент при  $z$  должен быть равен 1. Поэтому вблизи бесконечно удаленной точки  $g_t$  имеет вид:

$$g_t(z) = z + \frac{c(t)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)^2 \quad (2)$$

Так же существует обратная функция  $f_t(\omega)$ , которая подчиняется  $g_t : (f_t(\omega) = \omega$  для всех  $\omega$  верхней полуплоскости и :

$$\frac{\partial f_t(\omega)}{\partial t} = -\frac{2}{\omega - \xi(t)} \frac{\partial f_t(\omega)}{\partial \omega} \quad (3)$$

Далее рассмотрим несколько известных видов управляющей функции уравнения Лёвнера, при которых существует решение. Будем рассматривать только хордовое уравнение Лёвнера, порождающее функции, отображающие комплексную полуплоскость с разрезом на комплексную полуплоскость.

Для начала рассмотрим почти тривиальную ситуацию, в которой управляющая функция равна константе и имеет вид :

$$\xi(t) = A \quad (4)$$

Уравнение для  $g$  может быть получено, если при подстановке в (1) за место  $\xi(t)$  подставить  $A$  :

$$g_t(z) = A + [(z - A)^2 + 4t]^{1/2} \quad (5)$$

Обратное отображение имеет тот же вид, что и прямое, путём использования формулы (3) :

$$f_t(\omega) = A + [(\omega - A)^2 - 4t]^{1/2} \quad (6)$$

В момент времени  $t$  функция  $g$  приобретает новую сингулярность в точке

$$z_c(t) = A + 2it^{1/2} \quad (7)$$

которое отображается при  $g_t$  в точку  $\xi(t) = A$  на  $\omega$ -плоскости. Таким образом, сингулярности образуют отрезок прямой, параллельный мнимой оси, а отображаемая область  $z$ -плоскости является верхней полуплоскостью минус этот сегмент.

Теперь рассмотрим второй случай, когда управляющая функция линейна. В этом случае управляющая функция примет вид :

$$\xi(t) = t \quad (8)$$

Если теперь переопределить независимую переменную как  $h = g - \xi$ , то  $h$  подчиняется

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2 - h}{h} =: \frac{dh}{dF(h)} \quad (9)$$

В терминах  $F$  решение имеет вид :

$$F(h) = -t + c(z) \quad (10)$$

Линия сингулярности тогда имеет вид :

$$F(z_c(t)) = F(0) + t = 2 \ln 2 + t \quad (11)$$

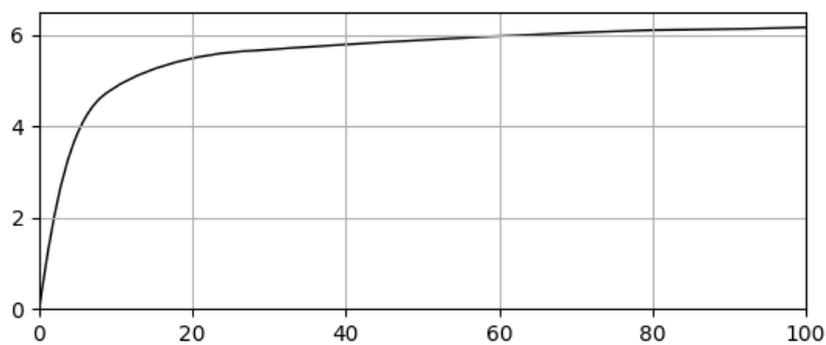


Рисунок 2 — Форма линии сингулярности в плоскости  $z$ , которая возникает в результате воздействия  $\xi(t) = t$  до момента времени  $t = 100$ .

В следующем случае управляющая функция зависит от времени как функция квадратного корня. Этот случай подразделяется на два варианта. В первом варианте управляющая функция имеет сингулярность при конечном значении времени :

$$\xi(t) = 2[k(1 - t)]^{1/2}; \quad t \leq 1, k \geq 0 \quad (12)$$

И бесконечного времени с правилом :

$$\xi(t) = 2[kt]^{1/2}; \quad k \geq 0 \quad (13)$$

Чтобы найти решение для управляющей функции 13 определим новую переменную :  $G = g/t^{1/2}$  и положим  $\tau = \ln t$ . Тогда  $G$  удовлетворяет :

$$\frac{dG}{d\tau} = -G/2 + 2/(G - 2k^{1/2}) = \frac{(G - y_+)(G - y_-)}{2(2k^{1/2} - G)} \quad (14)$$

Если мы положим

$$H(G) + \ln t = \frac{2y_+ \ln(G - y_-) - 2y_- \ln(G - y_+)}{y_+ - y_-} \quad (15)$$

Тогда  $dH(G)/d\tau = -1$  который интегрируется в

$$-H(G) = \tau + c(z) = \ln t + c(z) \quad (16)$$

И решение (16) для общего  $t$  становится простым

$$H(g/t^{1/2}) = 2 \ln(z/t^{1/2}) \quad (17)$$

Поскольку линия сингулярностей определяется условием, что  $g$  равно управляющей функции, мы получаем

$$z_c(t) = Bt^{1/2}, \quad (18)$$

Теперь обратимся к управляющей функции (12) с сингулярностью за конечное время. В этом случае можно устранить зависимость от времени, используя новую переменную :  $G = g/(1 - t)^{1/2}$

Тогда  $G$  подчиняется :

$$\frac{dG}{d\tau} = G/2 + 2/(G - 2k^{1/2}) \quad (19)$$

где  $\tau = -\ln(1 - t)$ . И снова производная становится простой функцией неизвестного, снова появляющейся в форме отношения многочленов, т. е.

$$-\frac{dG}{d\tau} = \frac{(G - y_+)(G - y_-)}{2(2k^{1/2} - G)} \quad (20)$$

Где корни :  $y_{\pm} = k^{1/2} \pm (k - 4)^{1/2}$ . Интегрирование уравнения происходит точно так же, как и в предыдущем случае полагая, что :  $H(G) = \tau + c(z)$ , где  $H$  имеет тот же вид, что и раньше, но с другим  $y_{\pm}$ :

$$H(G) = \frac{2y_+ \ln(G - y_-) - 2y_- \ln(G - y_+)}{y_+ - y_-} \quad (21)$$

Тогда из начального условия следует, что

$$H(g/(1 - t)^{1/2}) = -\ln(1 - t) + H(z) \quad (22)$$

и уравнение для линии сингулярности тогда

$$H(2k^{1/2}) = -\ln(1 - t) + H(z_c(t)) \quad (23)$$

Заметим, что уравнение (23) говорит нам, что  $H((z)_c(t))$  должна стремиться к  $-\infty$ , когда  $t$  стремится к 1. Далее мы рассмотрим асимптотику  $z_c(t)$  в этом пределе поподробнее. Мы разделим обсуждение на два случая  $k < 4$  и  $k > 4$ .

При  $k < 4$  действительная и мнимая части  $H(z)$  равны:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} H(z) &= \frac{k^{1/2}}{(k-4)^{1/2}} \operatorname{Arg}(z - y_-) + \ln |z - y_-| \\ &+ \frac{k^{1/2}}{(k-4)^{1/2}} \operatorname{Arg}(z - y_+) + \ln |z - y_+| \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} H(z) &= \operatorname{Arg}(z - y_-) \frac{k^{1/2}}{(k-4)^{1/2}} \ln |z - y_-| \\ &+ \operatorname{Arg}(z - y_+) \frac{k^{1/2}}{(k-4)^{1/2}} \ln |z - y_+| \end{aligned} \quad (25)$$

Из чего легко следует, что  $H(2k^{1/2})$  положительная действительная константа. Поскольку действительная часть  $H(z_c(t))$  должна перейти в  $-\infty$  когда  $t$  приближается к 1, мы заключаем, что  $z_c(1) = y_+$ , поскольку другой возможный вариант на ограничение, т. е.  $y_-$  - находится не в этой полуплоскости.

Разделив уравнение (23) на действительную и мнимую части, мы получим систему из двух уравнений, которую мы можем решить для неизвестных  $\ln |z_c(t) - y_+|$  и  $\operatorname{Arg}(z_c(t) - y_+)$ . И тогда получим :

$$\begin{aligned} \ln |z_c(t) - y_+| &\approx [A(k) + (4 - k) \ln(1 - t)]/4, \\ \operatorname{Arg}(z_c(t) - y_+) &\approx [B(k) - k^{1/2}(4 - k)^{1/2} \ln(1 - t)]/4 \end{aligned} \quad (26)$$

При  $k > 4$  действительная и мнимая части  $H(z)$  равны :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} H(z) &= \left(1 + \frac{k^{1/2}}{(k-4)^{1/2}}\right) \ln |z - y_-| \\ &+ \left(1 + \frac{k^{1/2}}{(k-4)^{1/2}}\right) \ln |z - y_+| \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} H(z) = & \left(1 + \frac{k^{1/2}}{(k-4)^{1/2}}\right) \operatorname{Arg}(z - y_-) \\ & + \left(1 + \frac{k^{1/2}}{(k-4)^{1/2}}\right) \operatorname{Arg}(z - y_-) \end{aligned} \quad (28)$$

И  $H(2k^{1/2})$  снова положительное действительное число. На этот раз, когда  $t$  приближается к единице,  $z_c(t)$  должна приблизиться к точке  $y_-$  на действительной оси.

Обозначим через  $\phi$  угол, при котором  $z_c(t)$  попадает в действительную ось, тогда мы имеем, что при  $t \rightarrow 1$ ,  $\operatorname{Arg}(z_c(t) - y_-) \rightarrow \phi$ . С условием  $\operatorname{Im} H(z_c(t)) = 0$  получаем :

$$\phi = \pi \frac{k^{1/2} - (k-4)^{1/2}}{k^{1/2} - (k+4)^{1/2}} \quad (29)$$

Как видно далее на рисунке (3), у нас есть плавный переход при  $k = 4$  и  $k \rightarrow \infty$ , в то время как при  $k = 9/2$  переход почти перпендикулярный.

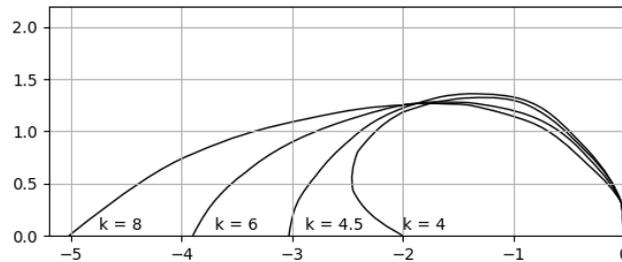


Рисунок 3 — Для извлечения квадратного корня с  $k \geq 4$  сингулярностей пересекает действительную линию под углом, изменяющимся в зависимости от  $k$ . Кривые были перенесены так, чтобы они начинались в начале координат.

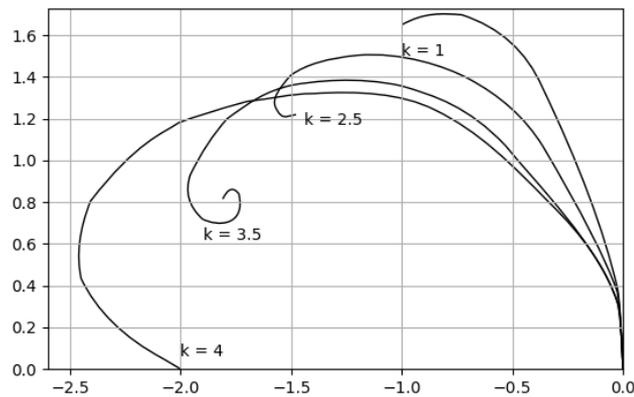


Рисунок 4 — След сингулярностей для извлечения квадратного корня с различными значениями  $k < 4$ . Также показан критический случай  $k = 4$ , когда след попадает в действительную линию. Все кривые были перенесены так, чтобы они начинались в начале координат в момент времени  $t = 0$

**Заключение.** Таким образом, в моей курсовой работе было рассмотрено хордовое уравнение Лёвнера, которое является уравнением Лёвнера в верхней полуплоскости, и особенности отображений, удовлетворяющих этому уравнению. Были изучены и выведены некоторые случаи интегрируемости уравнения Лёвнера с различными управляющими функциями, и было показано схематически, как ведёт себя кривая сингулярности в зависимости от управляющей функции.