

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического анализа

Полиномиальная интерполяция

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направление 02.03.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Петраченкова Ивана Анатольевича

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н.

Ю.В.Матвеева

Заведующий кафедрой

И.о. зав. кафедрой, к.ф.-м.н., доцент

Е.В. Разумовская

Саратов 2022

Введение. Данная дипломная работа будет посвящена полиномиальной интерполяции с помощью сплайнов и полинома Лагранжа. Сплайны в математике известны давно, в конце XIX века английские инженеры так называли гибкую линейку, которую применяли для проектирования закруглений железных дорог. Математика получила этот термин благодаря работам Шонберга в 1946 г., который назвал так рассмотренные им функции с «кусочными» свойствами. Сплайн В. С. Рябенского был первым интерполяционным минимальным сплайном. К настоящему времени имеется большая серия статей и ряд монографий, освещающих многие стороны теоретических исследований и широкого практического применения различных сплайнов.

Существует большое количество разнообразных пространств сплайнов с различными полезными свойствами: гладкостью, качественной аппроксимацией, численной устойчивостью, неотрицательностью базисных функций, минимальной кратностью накрытия носителями функций базиса при заданном порядке аппроксимации. Некоторые пространства сплайнов обладают интерполяционным локальным базисом, определенными фильтрационными свойствами. Выбор пространства сплайнов обычно определяется типом данных и целями, которые ставятся при их обработке.

Первая цель - улучшение качества приближения: при одинаковых вычислительных затратах абсолютные погрешности аппроксимации сплайнами меньше, чем абсолютные погрешности аппроксимации многочленами, а при одинаковых погрешностях уменьшается объем вычислений. Сплайны позволяют избежать осцилляций. Для сходимости аппроксимации к аппроксимируемой функции предъявляются более слабые требования, чем в случае многочленов. Например, интерполяция сплайнами невысоких степеней сходится даже для непрерывных функций.

Вторая цель - резкое уменьшение вычислительных трудностей как при построении алгоритмов решения задач, так и при дальнейшей работе с аппроксимантами, которые на каждом звене представляют собой многочлены невысоких степеней или иные элементарные функции.

Необходимо отметить, что сплайновые функции представляют собой мощное и привлекательное в вычислительном отношении средство современной теории аппроксимации.

Сплайны обладают рядом интересных свойств:

- если аппроксимируемая функция неотрицательна, то такова и аппроксимирующая функция;
- сплайновая аппроксимация равномерно сходится к аппроксимируемой функции при возрастании степени используемых полиномов или числа узлов;
- можно построить точные границы ошибки аппроксимации, использующие только свойство непрерывности функции;
- достаточно точные аппроксимации получаются даже при низких степенях полиномов и малом числе узлов, поэтому необходимая память и вычислительные требования невелики

Основное содержание работы. Сплайны первой степени $S_1(x)$ дефекта 1 на сетке $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ - это непрерывные кусочно-линейные функции.

$C[a, b]$ -пространство непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|f(x)\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

На сетке $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ эти функции характеризуются колебанием на отрезках $[x_i, x_{i+1}]$

$$\omega_i(f) = \max_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x'') - f(x')|,$$

а также величиной

$$\omega(f) = \max_{0 \leq i \leq N-1} \omega_i(f).$$

Характеристикой функции, не зависящей от сетки Δ , является модуль непрерывности

$$\omega_i(f) = \max_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}], |x'' - x'| \leq h} |f(x'') - f(x')|, \quad h \leq b - a.$$

Если обозначить $\bar{h} = \max_i h_i$, то очевидно неравенства

$$\omega_i(f) \leq \omega(f) \leq \omega(f; \bar{h}). \quad (1)$$

Пусть в узлах сетки Δ заданы значения $f_i = f(x_i)$ некоторой функции $f(x)$, определенной на $[a, b]$. Интерполяционный сплайн определяется условиями

$$S_1(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, N. \quad (2)$$

Геометрически он представляет собой ломаную, проходящую через точки (x_i, y_i) , где $y_i = f_i$. Если обозначить $h_i = x_{i+1} - x_i$, то при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ уравнение сплайна будет иметь вид

$$S_1(x) = f_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + f_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}, \quad (3)$$

или

$$S_1(x) = f_i + \frac{x - x_i}{h_i} (f_{i+1} - f_i). \quad (4)$$

Для запоминания сплайна нужно хранить $2(N+1)$ чисел. Вычисление сплайна удобнее всего проводить в таком порядке: сначала находим $u_i = (f_{i+1} - f_i)/h_i$ и затем $S_1(x) = f_i + (x - x_i)u_i$

Если величина f_i заданы с погрешностью, не превосходящей ε , то значение $S_1(x)$, вычисляются с такой же точностью. Значение производной $S'_1(x)$ находятся с точностью $2\varepsilon/h_i$

Качество приближения функций, в том числе и интерполяции, характеризуется остаточным членом. В данном случае это $R(x) = S_1(x) - f(x)$. Оценка остаточного члена зависит от того, какими дифференциальными свойствами обладает интерполируемая функция $f(x)$.

Теорема 1. Если сплайн первой степени $S_1(x)$ интерполирует функцию $f(x)$ на сетке Δ , то справедливы оценки

$$\|R^{(r)}(x)\|_\infty = \|S_1^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)\|_\infty \leq R_r, \quad r = 0, 1,$$

где R_r даются в таблице¹.

Класс функций	R_0	R_1
$C[a, b]$	$\omega(f)$	-
$W_\infty^1[a, b]$	$\frac{\bar{h}}{2} \ f'(x)\ _\infty$	-
$CC_\Delta^1[a, b]$	$\frac{\bar{h}}{4} \omega(f')$	$\omega(f')$
$CW_{\Delta, \infty}^2[a, b]$	$\frac{\bar{h}^2}{8} \ f''(x)\ _\infty$	$\frac{\bar{h}}{2} \ f''(x)\ _\infty$

Теорема 2. Если $f(x) \in CC_\Delta^k[a, b]$, $k \geq 3$, то для $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$S_1(f; x) = f(x) + t(1-i) \sum_{\alpha=2}^{k-1} \frac{h_i^\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha)}(x) [(-1)^\alpha t^{\alpha-1} + (1-t)^{\alpha-1}] + O(h_i^k), \quad (5)$$

Следствие 1. Если $f(x) \in CC_\Delta^3[a, b]$, то

$$S_1' \left(f; x_i + \frac{h_i}{2} \right) = f' \left(x_i + \frac{h_i}{2} \right) + O(h_i^2), \quad (6)$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Формула (6) показывает, что порядок аппроксимации первой производной функции $f(x)$ повышается на единицу в середине каждого из промежутков $[x_i, x_{i+1}]$. Во всех остальных точках порядок аппроксимации $O(h_i)$.

Исследование сходимости интерполяционного процесса и выяснение порядка сходимости необходимы при решении вопроса о возможности интерполяции с любой наперед заданной точностью. Действительно, если сходимость имеет место, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение Δ_v , что

$$\|S_{1, \Delta_v}(x) - f(x)\|_C[a, b] \leq \varepsilon \quad (7)$$

¹Завьялов, Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. — Москва : Наука, 1980. — 352 с.

Изучим сходимость интерполяции сплайнами первой степени. Для, сплайнов более высоких степеней характер рассуждений остается тем же самым. Обратимся к оценкам, установленным в теореме 1. Если $f(x) \in C[a, b]$, то в силу неравенства (1) $\|R_v(x)\|_\infty = \|R_v(x)\|_c \leq \omega(f, \bar{h}_v)$. Но модуль непрерывности $\omega(f, \bar{h}_v) \rightarrow 0$ при $\bar{h}_v \rightarrow 0$, и тем самым сходимость обеспечивается. Если, кроме того, $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка γ :

$$|f(x'') - f(x')| \leq L|x'' - x'|^\gamma, L = \text{const},$$

то $\omega(f, \bar{h}_v) \leq L\bar{h}_v^\gamma$ и сходимость будет иметь порядок $O(\bar{h}_v^\gamma)$. Аналогично если $f(x) \in C^1[a, b]$, то $\|R_v^{(r)}(x)\|_\infty \rightarrow 0$ как $\bar{h}_v^{1-r}\omega(f'; \bar{h}_v)$, $r = 0, 1$.

Рассмотрим сходимость для функций $f(x) \in W_\infty^1[a, b]$ и $f(x) \in W_\infty^2[a, b]$. В первом случае она имеет порядок $O(\bar{h}_v)$, а во втором $\|R_v^{(r)}(x)\|_\infty = O(\bar{h}_v^{2-r})$, $r = 0, 1$.

В некоторых случаях целесообразно ввести дополнительные условия для последовательности сеток Δ_v . Пусть, например, $f(x) \in CW_{\tilde{\Delta}, \infty}^2[a, b] \subset W_\infty^1[a, b]$, где $\tilde{\Delta} : \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_l, \xi_j \in [a, b], j = 0, \dots, l$. Это означает, что $f'(x)$ и $f''(x)$ имеют разрывы первого рода в узлах сетки $\tilde{\Delta}$. Для такой функции на произвольной последовательности сеток, как было отмечено выше, $\|R_v^{(r)}(x)\|_C = O(\bar{h}_v)$. Однако, если дополнительно потребовать, чтобы при каждом v узлы сетки $\tilde{\Delta}$ включались в сетку Δ_v , то по теореме 3.1 $\|R_v^{(r)}(x)\|_\infty = O(\bar{h}_v^{2-r})$, $r = 0, 1$. Порядок повысился на единицу. Полученный эффект есть следствие того, что существенную роль в оценках погрешности интерполяции играют свойства интерполируемой функции только внутри интервалов $[x_i, x_{i+1}]$.

Рассмотрим алгоритм построения $S_{1,1}(x, y)$. Так при фиксированном значении одной из переменных x, y $S(x, y)$ является сплайном первой степени относительно другой переменной, то используя формулу (3), имеем

$$S_{1,1}(x, y_q) = (1 - t)f_{i,q} + tf_{i+1,q}, q = j, j + 1 \quad (8)$$

где $t = (x - x_i)/h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$. Интерполируя теперь найденные значения $S_{1,1}(x, y_j)$ и $S_{1,1}(x, y_{j+1})$, получаем

$$S_{1,1}(x, y) = (1 - u)S_{1,1}(x, y_j) + uS_{1,1}(x, y_{j+1}), \quad (9)$$

где $u = (y - y_j)/l_j$, $l_j = y_{j+1} - y_j$. Окончательно из (8) и (9) имеем

$$S_{1,1}(x, y) = (1 - u)[(1 - t)f_{ij} + tf_{i+1,j}] + u[(1 - t)f_{i,j+1} + tf_{i+1,j+1}]. \quad (10)$$

Получим оценку погрешности интерполяции для сплайнов $S_{1,1}(x, y)$. Из формулы (10) имеем

$$\begin{aligned} S_{1,1}(x, y) - f(x, y) &= (1 - u)[(1 - t)f_{ij} + tf_{i+1,j} - f(x, y_j)] + \\ &+ [(1 - t)f_{i,j+1} + tf_{i+1,j+1} - f(x, y_{j+1})] + [(1 - u)f(x, y_j) + uf(x, y_{j+1}) - f(x, y)], \end{aligned} \quad (11)$$

Выражения в квадратных скобках представляют собой погрешности интерполяции сплайнами одной переменной. Это обстоятельство позволяет получить оценки для сплайна $S_{1,1}(x, y)$ через соответствующие оценки для сплайнов одной переменной данные в теореме 1.

Теорема 3. Если $f(x, y) \in CW_{\Delta, \infty}^2[\Omega]$, то

$$\|S_{1,1}(x, y) - f(x, y)\|_C \leq \frac{1}{8}h^2\|D^{2,0}f(x, y)\|_\infty + \frac{1}{8}l^2\|D^{0,2}f(x, y)\|_\infty \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \|D^{r,s}[S_{1,1}(x, y) - f(x, y)]\|_\infty &\leq \frac{1}{2}(rl + sh)\|D^{1,1}(x, y)\|_\infty + \\ &+ \frac{1}{2}rh\|D^{2,0}f(x, y)\|_\infty + \frac{1}{2}sl\|D^{0,2}f(x, y)\|_\infty, \quad r + s = 1 \end{aligned} \quad (13)$$

Теорема 4. Если $f(x, y) \in CW_{\Delta, \infty}^2[\Omega]$, то

$$\begin{aligned} \|D^{1,1}[S_{1,1}(x, y) - f(x, y)]\|_\infty &\leq \frac{1}{2}h\|D^{2,1}f(x, y)\|_\infty + \\ &+ \frac{1}{2}l\|D^{1,2}f(x, y)\|_\infty + \frac{1}{4}lh\|D^{2,2}f(x, y)\|_\infty. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть задано множество $\Omega_n \subset [a, b]$, состоящее из $n + 1$ различных точек $\Omega_n = x_0, x_1, \dots, x_n$, которое мы будем называть множеством или сеткой узлов лагранжевой интерполяции.

Определение 1. Интерполяционным полиномом Лагранжа для заданного набора значений $f_i (i = 0 : n)$, в узлах Ω_n называют такой полином $L_n \in P_n$, что

$$L_n(x_i) = f_i \quad \forall i = 0 : n. \quad (15)$$

Определение 2. Базисом Лагранжа для набора узлов Ω_n называется семейство полиномов

$$\varphi_i(x) = c_i \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j), \quad c_i = \frac{1}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)}, \quad i = 0 : n. \quad (16)$$

Из формулы следует, что каждый из $\varphi_i(x)$ является полиномом в точности степени n со старшим коэффициентом (т.е. коэффициентом при x^n) c_i . Нулями полинома с номером i являются узлы с номерами, отличными от i , т.е. множество $\Omega_n \setminus x_i$. Кроме того, коэффициент c_i подобран так, что $\varphi_i(x_i) = 1$. Таким образом, полиномы $\varphi \in P_n$ обладают следующими свойствами:

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 0 : n. \quad (17)$$

Из этого следует

Теорема 5. Интерполяционный полином Лагранжа, удовлетворяющий (15), определяется единственным образом и может быть представлен в виде линейной комбинации базисных функций Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \varphi_i(x) \quad \forall x \in R \quad (18)$$

Определение 3. Полином, вычисляемый по формуле (18) называется интерполяционным полиномом, записанным в форме Лагранжа.

Теорема 6. Для того, чтобы семейство полиномов $\Psi = \{\psi_j \in P_n : j = 0 : n\}$ было базисом пространства P_n , необходимо и достаточно, чтобы матрица A ,

составленная из коэффициентов

$$a_{ij} = \psi_j(x_i) \quad \text{для} \quad i, j = 0 : n, \quad (19)$$

было невырожденной.

Свяжем с сеткой Ω_n следующий набор полиномов: $\alpha_0(x) = 1, \alpha_1(x) = x - x_0$, и вообще,

$$\alpha_j(x) = \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k), \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (20)$$

Матрица (19) для этой системы является нижнетреугольной, причем элементы главной диагонали

$$a_{ii} = \prod_{k=0}^{i-1} (x_i - x_k) \neq 0$$

а потому $\det A = \prod_i a_{ii} \neq 0$. По теореме, семейство полиномов (20) является базисом пространства P_n , следовательно, решение задачи (15) может быть записано в виде линейной комбинации

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \alpha_j(x) \quad (21)$$

Коэффициенты y_j в этом разложении носят специальное название - разделенные разности, и могут быть вычислены по значениям f рекуррентно.

Теорема 7. Справедлива формула

$$f(z_0, z_1, \dots, z_k) = \sum_{j=0}^k \frac{f(z_j)}{\prod_{l=0, l \neq j}^k (z_j - z_l)}.$$

Теорема 8. В формуле (21) коэффициенты y_j являются разделенными разностями $y_j = f(x_0, x_1, \dots, x_j)$. Таким образом,

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1) \alpha_1(x) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n) \alpha_n(x) \quad (22)$$

Далее предполагается, что $f(x)$ - некоторая достаточно гладкая функция на отрезке $[a, b]$ и $L_n(x)$ - интерполяционный полином, совпадающий с f в узлах $\Omega_n \subset [a, b]$. Погрешность интерполяции - это разность $f(x) - L_n(x)$.

Зафиксируем произвольную точку $x \in [a, b] \setminus \Omega_n$. Обозначим через L_{n+1} интерполяционный полином, совпадающий с f в точках $\Omega_n \cup \{x\}$. В силу (21) $f(x) = L_{n+1}(x) = L_n(x) + f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) \alpha_{n+1}(x)$ от куда

$$f(x) - L_n(x) = f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) \alpha_{n+1}(x) \quad \forall x \in [a, b] \setminus \Omega_n. \quad (23)$$

Теорема 9. Для того, чтобы в узле $x_i \in \Omega_n$ существовал конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_i} f(x_0, x_1, \dots, x_n, x)$, необходимо и достаточно, чтобы f была дифференцируема в этой точке. Если это условие выполнено, то $\lim_{x \rightarrow x_i} f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) = c_i (f'(x_i) - L'_n(x_i))$. Следовательно, если функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке $f(x_0, x_1, \dots, x_n, x)$ непрерывна как функция переменных x .

Теорема 10. Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке справедливо представление погрешности интерполяции Лагранжа

$$f(x) - L_n(x) = f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) \alpha_{n+1}(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Теорема 11. Если функция $f(x)$ $n + 1$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то в любой точке $x \in [a, b]$ справедливо представление

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \alpha_{n+1}(x) \quad (24)$$

где $\xi_x \in (a, b)$ - некоторая точка, лежащая между точками множества $\Omega_n \cup \{x\}$.

Теорема 12. Если функция $f(x)$ $n + 1$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то имеют место оценки производных:

$$\left\| f^{(k)} - L_n^{(k)} \right\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\left\| f^{(n+1)} \right\|_{\infty, [a, b]}}{(n+1-k)!} (b-a)^{n+1-k}, \quad k = 0 : n. \quad (25)$$

Теорема 13. На отрезке e_i справедлива оценка погрешности лагранжевой интерполяции

$$\|f - L_n\|_{\infty, e_i} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty, e_i}}{4C_{n+1}^i} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \quad (26)$$

где величина

$$C_{n+1}^i = \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!}$$

Для равномерно распределенных узлов имеет место оценка

$$\|\alpha_{n+1}\|_{\infty, [a,b]} \leq \frac{n!}{4} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}.$$

Следовательно,

$$\|f - L_n\|_{\infty, [a,b]} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty}}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \quad (27)$$

Рассмотрим функцию $F_1(x) = x^4 \sin^3(x) - \frac{1}{3} \cos(2x)$ на сетках Δ и $\bar{\Delta}$, где Δ это равномерная сетка на отрезке $[-3, 3]$ с шагом $h = 0.3$, а $\bar{\Delta}$ это неравномерная сетка на отрезке $[-3, 3]$. Теперь с помощью узлов сеток Δ и $\bar{\Delta}$ построим линейные сплайны и интерполяционные полиномы Лагранжа. Полученные данные запишем в таблицы.

Теперь сделаем то же самое с сетками Ω и $\bar{\Omega}$, где Ω это равномерная сетка на отрезке $[20, 30]$ с шагом $h = 0.3$, а $\bar{\Omega}$ это неравномерная сетка на отрезке $[20, 30]$.

Изменим первоначальную функцию на $F_2(x) = x^4 \sin^3(x) - x^{10}$ и проделаем те же действия на сетках Ω и $\bar{\Omega}$.

Заключение. Данная дипломная работа была посвящена изучению полиномиальной интерполяции, для детального изучения этой темы, рассмотрены и изучены следующие аспекты:

- Построены линейные сплайны на отрезке;
- Построены линейные сплайны на прямоугольнике;
- Построен полином Лагранжа;
- Получены оценки точности построенных интерполяционных полиномов;

- Практически реализованы построение линейного сплайна и полинома Лагранжа на отрезке для конкретных функций.

В процессе написания дипломной работы я убедился что с помощью сплайнов можно уменьшать вычислительные трудности при построении алгоритмов решения задач и при работе с аппроксимантами, которые на каждом звене представляют собой многочлены невысоких степеней или иные элементарные функции. А также с помощью сплайнов можно добиться улучшения качества приближения, так как в сравнение с многочленами, при одинаковых вычислительных затратах абсолютные погрешности аппроксимации сплайнами меньше.

Многочлен в форме Лагранжа в явном виде содержит значения функций в узлах интерполяции, поэтому он удобен, когда значения функций меняются, а узлы интерполяции неизменны. Число арифметических операции, необходимых для построения многочлена Лагранжа, пропорционально и является наименьшим для всех форм записи. К недостаткам этой формы записи можно отнести то, что при построении полинома степени $n + 1$ полностью теряется информация о предыдущем полиноме степени n , то есть с изменением числа узлов приходится все вычисление выполнить заново.