

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

**Задачи Бомбиери**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы  
направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки  
код и наименование направления  
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук  
механико-математического факультета  
наименование факультета, института, колледжа

**БАРАКАЕВОЙ САБИНЫ ЭДИКОВНЫ**

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

доцент, к.ф. - м.н.

должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

А. М. Захаров

инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

и.о.зав.кафедрой, доцент, к.ф.-м.н.

должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

Е. В. Разумовская

инициалы, фамилия

Саратов 2022

**Введение.** Данная дипломная работа посвящена задаче Бомбиери. Пусть  $S$  обозначает класс функций

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n + \dots$$

аналитических и однолистных в единичном круге  $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ . Бомбиери сформулировал гипотезу о равенстве

$$\sigma_{mn} := \liminf_{a_m \rightarrow m} \frac{n - \operatorname{Re}(a_n)}{m - \operatorname{Re}(a_m)} \quad \text{и}$$

$$B_{mn} := \min_{\theta} \frac{n \sin(\theta) - \sin(n\theta)}{m \sin(\theta) - \sin(m\theta)}$$

$m, n \geq 2$ . Полная гипотеза Бомбиери была опровергнута. В 2001 Грайнер и Ротт доказали для  $m = 3$  и  $m = 2$ , что числа различны. Прохоров и Васильев (2005) использовали метод оптимального управления для получения численного значения  $\sigma_{42} = 0.0500\dots$  Точное значение  $B_{42} = 1/10 = 0.1$ . Целью дипломной работы является собрать воедино все результаты известные на сегодняшний день о гипотезе Бомбиери. Дипломная работа опирается на результаты: Прохорова, Васильева, Гордиенко, Арабузовой и др.

**Основная часть работы.** Одним из главных объектов исследований в геометрической теории функций комплексного переменного служит класс  $S$ , состоящий из всех голоморфных и однолистных в единичном круге  $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$  функций  $f$ , нормированных разложением

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

Подкласс  $S(M) \subset S$ ,  $M > 1$  ограниченных функций  $f \in S$ , удовлетворяющих неравенству  $|f(z)| < M$  в  $\mathbb{D}$ . Традиционно функция Кебе

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \in S$$

оказывается экстремальной во многих задачах на классе  $S$ . Числа Бомбиери вычисляются как

$$\sigma_{mn} = \liminf_{S \ni f \rightarrow K} \frac{n - \operatorname{Re} a_n}{m - \operatorname{Re} a_m}$$

в частности  $\sigma_{mn} = 0$ .

Гипотеза Бомбиери во всем классе  $S$  была опровергнута для  $n = 2, m = 3$  и было показано, что

$$\sigma_{32} = \frac{e-1}{4e} < \frac{1}{4} = B_{32}$$

В продолжение этого вклада в работе было выявлено, что

$$\sigma_{42} = 0.050057... < B_{42} = 0.1,$$

$$\sigma_{24} = 0.969556... < B_{24} = 1,$$

$$\sigma_{34} = 0.791557... < B_{34} = 0.828427....$$

Поиск чисел Бомбиери  $\sigma_{mn} > 0$  сводится к оценкам линейных функционалов на классе  $S$

$$\sigma_{mn} = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \operatorname{Re}(a_n - \lambda a_m) \text{ локальный максимум на } S \text{ с помощью } K(z)\}.$$

Обозначим через  $S(M)$ ,  $M > 1$  подкласс  $S$  ограниченных отображений  $|f(z)| < M$  в  $\mathbb{D}$ ,  $S(\infty) = S$ . Аналогом функции Кебе  $K$  в классе  $S$ , является функция Пика

$$P_M(z) = MK^{-1}(K(z)N) = z + \sum_{n=2}^{\infty} p_n(M)z^n, \quad N = \frac{1}{M},$$

которая является экстремальной в оценках функционалов в  $S(M)$ . Сформулируем результат.

**Теорема 1** Для  $1 < M \leq \infty$ , имеем  $\sigma_{23}(M) = -4N$ ,  $N = 1/M$ .

Теорема 1 будет доказана позже. Знаменитое дифференциальное уравнение Левнера [9]

$$\frac{d\omega}{dt} = -\omega \frac{e^{iu} + \omega}{e^{iu} - \omega}, \quad \omega|_{t=0} = z, \quad |z| < 1, \quad t \geq 0,$$

с кусочно непрерывной по  $t$  управляющей функцией  $u = u(t)$ , представляет собой компактный подкласс класса  $S$ . Сделаем замену переменных  $t \rightarrow 1 - e^{-t}$  и перепишем уравнение Левнера следующим образом

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{-\omega e^{iu} + \omega}{1 - t e^{iu} - \omega}, \quad \omega|_{t=0} = z, \quad |z| < 1, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1)$$

Шеффер и Спенсер [10] использовали уравнение Левнера для класса  $S(M)$ . Они представили собой компактный подкласс функций  $f$  из  $S(M)$  интегралами

$$\omega = \omega(t) = (1 - t)(z + a_2(t)z^2 + \dots), \quad f(z) = M\omega(z, 1 - N), \quad (2)$$

уравнения (1). Отныне мы будем принимать обозначение (2), включающее  $M = \infty$ , если произведение в (2) рассматривается как предел при  $M \rightarrow \infty$ .

При выборе  $u \equiv \pi$  в (1) мы получаем функцию Кебе в классе S или функцию Пика в классе S(M) из (2). Все эти функции приводят граничные точки к областям коэффициентов

$$V_3(M) := \{(a_2, Rea_3)\}, \quad 1 \leq M \leq \infty$$

Каждая другая граничная точка  $V_3(M)$  приводится функцией из компактного подкласса S(M), заданного в (2).

Для заданного действительного числа  $\mu$  рассмотрим линейный функционал

$$L(\mu; f) := a_3 + \mu a_2$$

в S(M). Функция Кебе  $K(z)$  максимизирует  $ReL(0; f)$  в S, но функция Пика  $P_M(z)$  не максимизирует  $ReL(0; f)$  в S(M), если M конечна, см., [11]. Опишем множество  $\mu$ , для которого локальный максимум  $ReL(\mu; f)$  в S(M) достигается функцией Пика. Этот результат будет применен для определения обобщенных чисел Бомбиери.

Обозначим  $a_2(t) = x_1(t) + ix_2(t)$  и  $Rea_3(t) = x_3(t)$ . Подставляя (2) в (1), получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -2\cos u, \quad x_1(0) = 0; \quad \dot{x}_2(t) = 2\sin u, \quad x_2(0) = 0; \\ \dot{x}_3(t) &= -4x_1\cos u - 4x_2\sin u - 2(1-t)\cos 2u, \quad x_3(0) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Локальная экстремальная задача  $ReL(\mu; f) \rightarrow$  локальному максимуму в классе S(M) с экстремальной функцией Пика  $P_M$  эквивалентная локальной экстремальной задаче

$$\mu x_1(1-N) + x_3(1-N) \rightarrow \text{локальному максимуму} \quad (4)$$

для решений системы (3) с управляющими функциями из окрестности  $u \equiv \pi$ . Следуя классической схеме, введем гамильтонову функцию для формулировки необходимого условия экстремума задачи (4)

$$H(t, x, \Psi, u) = -2\cos u \Psi_1 + 2\sin u \Psi_2 - (4x_1 \cos u + 4x_2 \sin u + 2(1-t)\cos 2u) \Psi_3, \quad (5)$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  выполняется для (3) и  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)^T$  удовлетворяет сопряженной системе с условием трансверсальности

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_1 &= 4\cos u \Psi_3, & \Psi_1(1-N) &= \mu, \\ \dot{\Psi}_2 &= 4\sin u \Psi_3, & \Psi_2(1-N) &= 0, \\ \Psi_3 &= 0, & \Psi_3(1-N) &= 1, \end{aligned} \quad (6)$$

Оптимальная управляющая функция  $u^*$ , соответствующая экстремальной функции  $f^*$  в задаче (4), удовлетворяет принципу максимума Понтрягина

$$\max_u H(t, x^*, \Psi^*, u) = H(t, x^*, \Psi^*, u^*), \quad 0 \leq t \leq 1-N, \quad (7)$$

где  $(x^*, \Psi^*)$  решение уравнений (3) и (6) при  $u = u^*$  в правой части. Это свойство максимума подразумевает, что  $u^*$  является корнем уравнения

$$H_u(t, x, \Psi, u) = 0 \quad (8)$$

для  $x = x^*$  и  $\Psi = \Psi^*$ . Кроме того, есть еще одно необходимое условие

$$H_{uu}(t, x^*, \Psi^*, u^*) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq 1-N.$$

Доказательство теоремы 1.

**Лемма 1** Предположим, что управляющая функция  $u$  в (3) и (6) порождает решения  $x(t)$  и  $\Psi(t)$ , для которых  $u$  удовлетворяет (7), единственно с точностью до  $2\pi$ -преобразования, и

$$H_{uu}(t, x, \Psi, u) < 0, \quad 0 \leq t \leq 1 - N.$$

Обозначим через  $(x(t, \xi)\Psi(t, \xi))$  решения (3) и (6) с начальными условиями  $\Psi(0, \xi) = \Psi(0) + \xi$  и  $u = u(t, \xi)$  где правая сторона, удовлетворяет принципу максимума (7). Тогда при  $\xi \rightarrow 0$  мы имеем асимптотическое поведение

$$\|(x(1 - N, \xi), \Psi(1 - N, \xi)) - (x(1 - N), \Psi(1 - N))\| = o(1),$$

где  $\|\cdot\|$  - евклидова векторная норма.

**Лемма 2** Пусть  $\mu \in D(M)$ , обозначим через  $(x^-(t, \xi)\Psi^-(t, \xi))$  решение системы (3) и (6) с условием предела  $\Psi^-(1 - N, \xi) = \Psi^0(1 - N) + \xi$ ,  $u = u^-(t, \xi)$  с правой стороны (3) и (6), удовлетворяют принципу максимума (7). Если

$$\|x^-(1 - N, \xi) - x^0(1 - N)\| = o(1) \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow 0.$$

то  $\|\Psi^-(0, \xi) - \Psi^0(0)\| = o(1)$  при  $\xi \rightarrow 0$ .

**Лемма 3** Предположим, что  $\mu \in D(M)$  с начальными условиями из (6)

$$\Psi(0, \xi) = \Psi^0(0) + \xi, \quad \xi = \epsilon e, \quad \epsilon > 0, \quad e = (e_1, e_2, e_3)^T, \quad \|e\| = 1 \quad (11)$$

и

$$x(t, \xi) = x^0(t) + \epsilon \delta x(t) + o(\epsilon), \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad (12)$$

Тогда  $\Psi^0(1 - N)$  ортогонально  $\delta x(1 - N)$ , если  $\delta x(1 - N) \neq 0$ .

Покажем, что вариации из (11), являются начальными значениями для  $\Psi_1$  и  $\Psi_3$  в (6) не меняя  $x(1 - N)$ .

**Лемма 4** Предположим, что при условиях леммы 3 вектор  $e = (e_1, E_2, e_3)^T$ ,

соответствует изменению  $\Psi^0$  в (11), координата  $e_2$  обращается в нуль. Тогда  $\delta_x(1 - N) = 0$ .

**Лемма 5** Предположим, что  $\mu \in D(M)$ . Если  $P_M$  локальный максимум  $ReL(\mu, f)$  в  $S(M)$ , то  $F''(0) \leq 0$ . И наоборот, если  $F''(0) < 0$ , то  $P_M$  локальный максимум  $ReL(\mu; f)$  в  $S(M)$ .

*Доказательство теоремы 1* Мы применим лемму 5 для построения аналитического процесса. Дифференцируя (8) относительно  $p$ , получаем  $H_{ux}x_p + H_{u\Psi}\Psi_p + H_{uu}u_p = 0$  что приводит нас к формуле

$$u_p = \frac{H_{ux}x_p + H_{u\Psi}\Psi_p}{H_{uu}}.$$

Результат вычисления

$$H_{uu}(t, x^0, \Psi^0, \pi) = 8N - 2\mu - 8t, \quad 0 \leq t \leq 1 - N. \quad (14)$$

Дифференцируя (5) по соответствующим переменным при  $u = \pi$ , находим

$$\begin{aligned} H_{ux_1}(t, x^0, \Psi^0, \pi) &= 0, \quad H_{u\Psi_1}(t, x^0, \Psi^0, \pi) = 0, \\ H_{ux_2}(t, x^0, \Psi^0, \pi) &= 4, \quad H_{u\Psi_2}(t, x^0, \Psi^0, \pi) = -2, \\ H_{ux_3}(t, x^0, \Psi^0, \pi) &= 0, \quad H_{u\Psi_3}(t, x^0, \Psi^0, \pi) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) позволяют рассчитать  $u_p$  как

$$u_p(t, 0) = -\frac{4(x_2)_p(t, 0) - 2(\Psi_2)_p(t, 0)}{8N - 2\mu - 8t}$$

Дифференцируя  $x_2$  из (3) и  $\Psi_2$  из (6) с начальными значения из (13) относительно  $p$  при  $p = 0$ , мы видим, что

$$\frac{d(x_2)_p}{dt} = -2p, \quad (x_2)_p(0, 0) = 0,$$

$$\frac{d(\Psi_2)_p}{dt} = -4up, \quad (\Psi_2)_p(0, 0) = 1,$$

из чего следует, что  $2(x_2)_p(t, 0) = (\Psi_2)_p(t, 0) - 1, 0 \leq t \leq 1 - N$ . Отсюда мы делаем вывод, что

$$u_p(t, 0) = [4N - \mu - 4t]^{-1}, \quad 0 \leq t \leq 1 - N, \quad (16)$$

и

$$(x_2)_p(t, 0) = \frac{1}{2} \log \frac{\mu - 4N + 4t}{\mu - 4N}. \quad (17)$$

Дважды дифференцируя первое уравнение из (3) относительно  $p$  при  $p = 0$ , получаем

$$\frac{d(x_1)_{pp}}{dt} = -2u_p^2(t, 0) = \frac{-2}{(4N - \mu - 4t^2)^2}, \quad (x_1)_{pp}(0, 0) = 0,$$

или

$$(x_1)_{pp}(t, 0) = \frac{-2t}{(4N - \mu)(4N - \mu - 4t)} \quad (18)$$

И дважды дифференцируя третье уравнение из (3) относительно  $p$  при  $p = 0$  и принимая во внимание (9), (16), (17) и (18) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d(x_3)_{pp}}{dt} &= 4(x_1)_{pp} - 4x_1u_p^2 + 8(x_2)_pu_p + 8(1-t)u_p^2 = 4(x_1)_{pp} + 8(x_2)_pu_p + 8(1-2t)u_p^2 \\ &= \frac{-8t}{(\mu - 4N)(\mu - 4N + 4t)} - \frac{4}{\mu - 4N + 4t} \log \frac{\mu - 4N + 4t}{\mu - 4N} + \\ &\quad \frac{8(1-2t)}{(\mu - 4N + 4t)^2}, \quad (x_3)_{pp}(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, мы находим

$$(x_3)_{pp}(t, 0) = \frac{2t(4 + \mu - 4N - 4t)}{(\mu - 4N)(\mu - 4N + 4t)} - \frac{1}{2} \log \frac{\mu - 4N + 4t}{\mu - 4N} - \frac{1}{2} \log^2 \frac{\mu - 4N + 4t}{\mu - 4N}. \quad (19)$$

Теперь мы можем записать достаточное максимальное условие в экстремальной задаче (4) из леммы 5  $F''(0) < 0$ , которое эквивалентно неравенству

$$(x_3)_{pp}(1-N, 0) + \mu(x_1)_{pp}(1-N, 0) = - \left[ \frac{1}{2} \log \frac{\mu - 8N + 4}{\mu - 4N} \left( 1 + \log \frac{\mu - 8N + 4}{\mu - 4N} \right) \right] < 0.$$

Это неравенство справедливо для всех  $\mu \in D(M)$ .

Поэтому выберем функцию  $P_M$  порожденных функцией управления  $u \equiv \pi$  в дифференциальном уравнении Левнера (1) локально увеличивающее  $R(\mu; f)$  в классе  $S(M)$ , т. е.  $Rea_3 + \mu Rea_2 \leq p_3(M) + \mu p_2(M)$  окрестности  $P_M$  в  $S(M)$  с максимально возможными числами  $\mu = 4N$  и со знаком равенства для  $f = P_M$ . Следовательно,

$$Re(p_3(M) - a_3) \geq 4N Re(a_2 - p_2(M)) = -4N Re(p_2(M) - a_2)$$

и отсюда

$$\sigma_{23}(M) = \liminf_{S(M) \ni f \rightarrow P_M} \frac{Re(p_3(M) - a_3)}{Re(p_2(M) - a_2)} = -4N,$$

что завершает доказательство теоремы 1.

В дипломной работе также были рассмотрены числа Бомбиери с помощью языка программирования Python и была реализована проверка неравенства, где было известно, что  $\sigma_{mn} = B_{mn}$ , если

$$B_{mn} = \min_{\theta} \frac{n \sin \theta - \sin(n\theta)}{m \sin \theta - \sin(m\theta)}$$

с помощью алгоритма. В качестве области для исследования гипотезы Бомбиери рассмотрим  $0,5 \leq \frac{n}{m} \leq 0,8194, m \leq 81$ . В такой области содержится 1080 пар  $m, n$ . Обозначим

$$f(x) = \frac{n \sin x - \sin(nx)}{m \sin x - \sin(mx)}.$$

Поиск  $B_{mn}$  состоит из нескольких шагов:

1.разбиваем  $[0, \pi]$  на отрезки. Выбор  $[0, \pi]$  обусловлен тем, что  $f(x)$  является  $2\pi$ -периодической и четной. Количество отрезков, на которое требуется разбить, задается с помощью переменной  $N$ ;

2.находим корни числителя производной  $f'(x)$  : для каждого, полученного в результате разбиения на шаге 1, отрезка  $[c, d]$  применяем метод деления отрезка пополам;

3.находим значение функций  $f(x)$  в этих точках. Если  $x < \epsilon = 1e - 15$ , то поиск  $f(x)$  в этой точке осуществляется по формуле:  $\frac{n^3-n}{m^3-m}$ .

4.завершаем работу поиском минимального значения из тех, что получили в шаге 3.

В результате проведенного численного эксперимента показано, что  $\sigma_{mn} < B_{mn}$  для  $m, n$  из области  $0,5 \leq \frac{n}{m} \leq 0,8194, m \leq 81$ . Таким образом, гипотеза Бомбиери опровергнута для 1080 пар  $m, n$ .

**Заключение.** В данной работе рассмотрены задачи Бомбиери используя материалы опубликованных работ Прохорова Д.В, Гордиенко В.Г, Арабузовой Д.А. Гипотеза Бомбиери опровергнута для 1080 пар  $m$  и  $n$ . Полностью задача остается нерешенной.

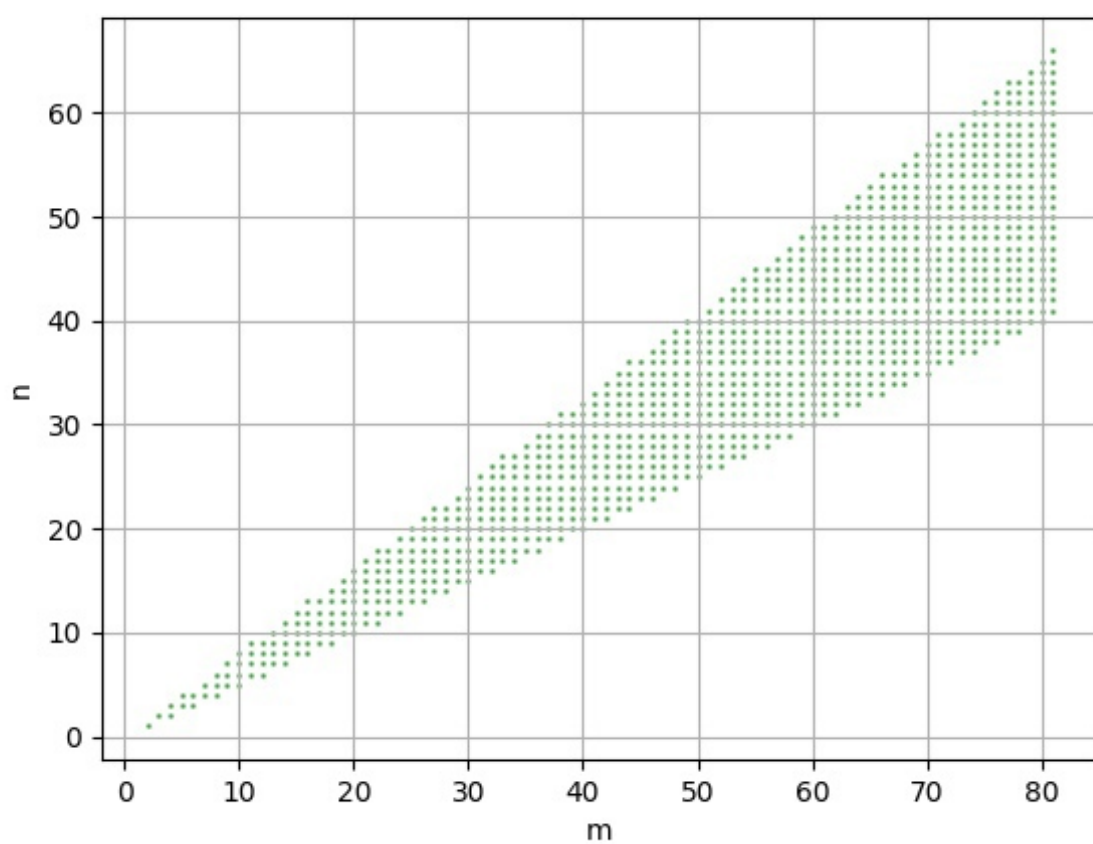


Рисунок 1