МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Неравенства трехреберников типов eep(I) и hhp(I) на гиперболической плоскости положительной кривизны

АВТОРЕФЕРАТ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИЦИОННОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направление 02.03.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Кириллова Ильи Игоревича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ____________ Л.Н. Ромакина

Зав. кафедрой
зав. каф., к.ф.-м.н., доцент ____________ С.В. Галаев

Саратов 2022

Введение. Для обозначения актуальности темы, обратимся к истокам. Так, в 1859 году свет увидел «Шестой мемуар о формах» А. Кэли, который и послужил первым шагом для исследования неевклидовых пространств при помощи идей проективной геометрии. Несмотря на то, что сам А. Кэли не применял проективные методы к неевклидовым геометриям, по мнению Ф. Клейна, работа А. Кэли привела его к идее рассматривать евклидову и неевклидовы геометрии в общей схеме, с точки зрения проективной геометрии. Далее, эта схема будет предложена им в 1872 году в лекции «Эрлангенская программа». В настоящее время проективные модели неевклидовых пространств, включая и рассматриваемую нами на идеальной области плоскости Лобачевского гиперболическую плоскость $\widehat{H}$ положительной кривизны, называют моделями Кэли-Клейна.

В модели Кэли-Клейна внешняя область проективной плоскости P_2 относительно овальной кривой γ, т.е. идеальная область плоскости Лобачевского Λ^2, является полной гиперболической плоскостью $\widehat{H}$ положительной кривизны. Плоскость $\widehat{H}$ гомеоморфна ленте Мебиуса без края. Геометрия плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны $1/\rho^2$ может быть реализована на сфере вещественного радиуса ρ в псевдоевклидовом пространстве R^3_1 с выявленными противоположными точками. Следовательно, плоскость $\widehat{H}$ является проективной моделью двумерного пространства де Ситтера. Число ρ называется радиусом кривизны плоскости $\widehat{H}$. Кривая γ называется абсолютом плоскостей $\widehat{H}$ и Λ^2. Группа G проективных автоморфизмов абсолютной овальной кривой γ является фундаментальной группой преобразований для плоскости $\widehat{H}$ и плоскости Лобачевского Λ^2.

В евклидовой геометрии и на подмногообразиях римановых пространств теория геометрических неравенств хорошо развита и имеет обширные приложения. В геометрии плоскости $\widehat{H}$ аналогичная теория только формируется. В данной работе мы доказываем некоторые геометрические неравенства в плоскости $\widehat{H}$, принимая во внимание возрастающий интерес современных исследователей к геометрии на идеальной области плоскости Лобачевского. Описанные в работе неравенства позволяют определить основные свойства фигур на плоскости $\widehat{H}$, в частности, с их помощью проведено доказательство экстремальности диагоналей простого 4-контура.

Теоретическая часть работы имеет реферативный характер и основывается на источниках [1] - [20].

Основное содержание работы. Рассмотрим важные определения и теоремы.

Определение 1. Трехвершинником плоскости $\widehat{H}$ назовем совокупность трех точек общего положения плоскости $\widehat{H}$ и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки. Данные точки назовем вершинами, отрезки - ребрами, а прямые, содержащие отрезки, - сторонами трехвершинника. Каждые две стороны трехвершинника разбивают плоскость $\widehat{H}$ на две или три части; ту из этих частей, которая содержит не принадлежащее данным сторонам ребро трехвершинника, будем называть углом трехвершинника, противолежащим указанному ребру, уточняя при необходимости тип угла. Для трехвершинника со сторонами a, b, c используем обозначения: $A = b \cap c$, $B = a \cap c$, $C = A \cap b$.

Согласно определению каждая точка трехвершинника является собственной на $\widehat{H}$, так как собственной является любая точка каждого отрезка с концами в собственных для $\widehat{H}$ точках.

Классификацию трехвершинников плоскости $\widehat{H}$ проведем по следующим инвариантным относительно фундаментальной группы G характеристикам: типы сторон; типы углов; тип расположения на абсолюте точек сторон трехвершинника.

Тип эллиптической, гиперболической и параболической стороны в трехвершиннике плоскости $\widehat{H}$ обозначим e, h и p соответственно. Каждое ребро трехвершинника может принадлежать прямой одного из трех типов, поэтому для всех сторон трехвершинника существует десять различных наборов:

$$eee,\ eeh,\ ehh,\ hhh,\ eep,\ ehp,\ hhp,\ epp,\ hpp,\ ppp. \tag{1}$$

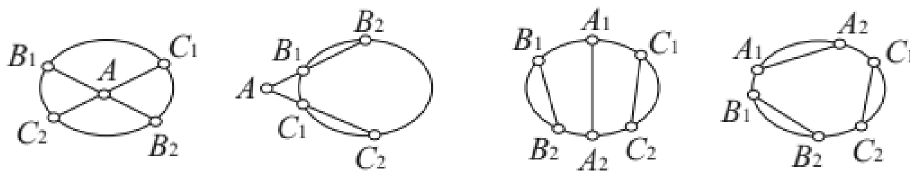
Если три стороны трехвершинника содержат вместе более трех точек абсолютной линии γ, то различные типы положений этих точек на γ определяют различные типы трехвершинников плоскости $\widehat{H}$. Из десяти наборов (1) сторон трехвершинника случаю наличия более трех точек сторон на абсолюте соответствуют следующие четыре:

$$ehh,\ hhh,\ hhp,\ hpp. \qquad (2)$$

Рассмотрим возможные типы положений абсолютных точек сторон трехвершинника на линии γ соответствующие наборам (2).

1. ehh. Пусть гиперболические прямые b, пересекают абсолют соответственно в точках $B_1,\ B_2$ и $C_1,\ C_2$. Возможны два варианта: точки в парах $(B_1,\ B_2)$ и $(C_1,\ C_2)$ разделены (не разделены) на γ (рис. 1, а (б)). При разделенности точек в парах точка $A = b \cap c$ является внутренней относительно абсолюта, следовательно, тройка точек $A,\ B,\ C$ не определяет трехвершинник плоскости $\widehat{H}$. Поэтому для набора ehh остается возможным единственный тип расположения точек сторон трехвершинника на абсолютной линии - неразделенность точек в парах $(B_1,\ B_2)$ и $(C_1,\ C_2)$ (рис. 1, б).

2. hhh. Пусть гиперболические прямые $a,\ b,\ c$ пересекают абсолют соответственно в парах точек $(A_1,\ A_2)$, $(B_1,\ B_2)$ и $(C_1,\ C_2)$. Если в данных парах есть разделяющие друг друга на γ пары, то тройка точек $A,\ B,\ C$ не определяет трехвершинник плоскости $\widehat{H}$. Прямые $a,\ b,\ c$ равноправны, поэтому для набора hhh допустимы только два различных типа положения точек сторон трехвершинника на абсолюте:



а *б* *в* *г*

Рисунок 1 — Расположение на абсолюте несобственных точек сторон трехвершинников с набороми ehh (а, б) hhh(в, г)

1) одна из пар точек $(A_1,\ A_2)$, $(B_1,\ B_2)$, $(C_1,\ C_2)$ разбивает линию γ на две дуги так, что каждая из дуг содержит обе точки другой пары, т. е. одна из пар разделена на γ (рис. 1, в);

2) пары $(A_1,\ A_2)$, $(B_1,\ B_2)$, $(C_1,\ C_2)$ равноправны, ни одна из них не разделена на γ (рис. 1, г).

Соответственно первому (второму) типу положения точек сторон на абсолюте трехвершинник ABC отнесем к типу $hhh(I)$ $(hhh(II))$.

3. hpp. Пусть гиперболическая сторона a трехвершинника ABC пересекает абсолют в точках $A_1,\ A_2$, и $b \cap \gamma = B_0$, $c \cap \gamma = C_0$. Тогда прямая B_0C_0 - поляра относительно γ вершины A. Возможны два варианта:

1) пара точек $A_1,\ A_2$ разделяет на γ пару точек $B_0,\ C_0$, в этом случае точка $M = a \cap B_0C_0$ является внутренней относительно γ (рис. 3, в);

2) пара точек $A_1,\ A_2$ не разделяет на абсолюте пару точек $B_0,\ C_0$, в этом случае точка M является внешней относительно γ (рис. 3, г).

Таким образом, существует два типа трехвершинников с набором hpp. Соответственно первому (второму) типу положения па абсолюте точек сторон трехвершиппик ABC отнесем к типу $hpp(I)$ $(hpp(II))$.

Итак, тип расположения па абсолюте точек сторон трехвершиппика определяет по два типа трехвершинников с наборами hhh, hhp, hpp и один тип трехвершинников с набором ehh.

Если сторона трехвершинника является эллиптической, то вершипы этой сторопы определяют па пей два отрезка, лежащие в углах различных типов между двумя другими сторопами. Типы углов инвариантны в преобразованиях группы G. Поэтому ожидаем получить, по крайней мере, по два различных типа трехвершинников с каждым из наборов

$$eee,\ eeh,\ ehh,\ eep,\ ehp,\ epp. \tag{3}$$

Рассмотрим все возможные случаи.

1. eee. Пусть $a,\ b,\ c$ - эллиптические прямые. Смежные попарно отрезки на каждой из этих прямых, определенные парами точек из тройки $A,\ B,\ C$, обозначим соответственно $\tilde{a}$, $\bar{a}$, $\tilde{b}$, $\bar{b}$, $\tilde{c}$, $\bar{c}$ так, чтобы отрезки $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ принадлежали эллиптическим углам, а отрезки $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ эллиптическим псевдоуглам между сторонами трехвершинника ABC. Трехвершинники с наборами ребер ($\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\bar{c}$), ($\tilde{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$), ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$), ($\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$) отнесем соответственно к типам $eee(I)$, $eee(II)$, $eee(III)$, $eee(IV)$ (рис. 2).

2. eeh. Пусть $a,\ b$ - эллиптические стороны трехвершинника ABC. На ребрах CA, CB построим отрезки CA', CB' длиной e, $e \in (0;\ \pi/2)$. Если при любом

e отрезки CA', CB' принадлежат одной полувалиане (различным полувалианам) точки C, трехвершинник ABC отнесем к типу $eeh(I)$ $(eeh(II))$.

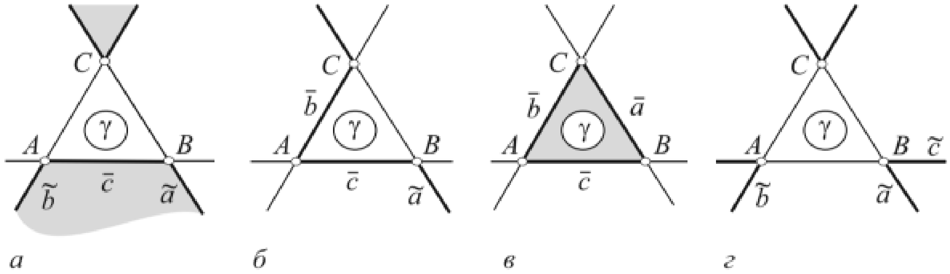


Рисунок 2 — Типы трехвершинников с набором eee : $eee(I)$ (а), $eee(II)$ (б), $eee(III)$ (в), $eee(IV)$ (г)

3. ehh. Пусть a - эллиптическая сторона трехвершинника ABC. Вершины B, C образуют на прямой a два смежных отрезка, один из них принадлежит одному из гиперболических углов между прямыми b, c, другой - смежному с ним гиперболическому псевдоуглу. Если ребро эллиптической стороны трехвершинника с набором ehh принадлежит гиперболическому углу (гиперболическому псевдоуглу) между не содержащими данное ребро сторонами трехвершинника, тип трехвершинника обозначим $ehh(I)$ $(ehh(II))$.

4. ehp. Пусть в трехвершиннике ABC a - эллиптическая, b - гиперболическая, c - параболическая сторона. Вершины B, C на прямой a определяют два смежных отрезка, один из которых принадлежит гиперболическому флагу, другой - гиперболическому псевдофлагу между прямыми b, c. Обозначим $ehp(I)$ и $ehp(II)$ тот тип трехвершинника с набором сторон ehp, ребро эллиптической стороны которого принадлежит гиперболическому флагу и гиперболическому псевдофлагу между неэллиптическими сторонами соответственно.

5. epp. Пусть a - эллиптическая сторона трехвершинника ABC. Точки B, C определяют на прямой a два смежных отрезка, один из которых принадлежит ковалиане, другой - валиане точки A. Следовательно, точки A, B, C определяют два типа трехвершинников, обозначим их соответственно $epp(I)$, $epp(II)$.

Итак, существует 15 типов трехвершинников плоскости $\widehat{H}$ с наборами сторон (3).

Каждые две точки на параболической прямой определяют единственный отрезок. Три параболические прямые имеют три несобственные точки, тип расположения которых на абсолютной овальной линии согласно теореме 2.9.1 определен однозначно. Поэтому существует единственный тип трехвершинников с набором ppp. Трехвершинники типа ppp названы 3-контурами.

Каждый из введенных типов трехвершинников инвариантен относительно группы G, так как относительно G инвариантны типы прямых, типы углов и тип расположения системы более чем из трех точек на абсолютной овальной линии.

На основании проведенных рассуждений справедлива следующая теорема классификации трехвершинников плоскости $\widehat{H}$.

Подробнее рассмотрим трехреберники eep и hhp.

1. eep. Пусть a, b - эллиптические стороны трехвершинника ABC. Прямые в парах $a,\ c$ и $b,\ c$ образуют эллиптический флаг и смежный с ним псевдофлаг. Смежные попарно отрезки на прямых $a,\ b$, определенные парами точек из тройки $A,\ B,\ C$, обозначим $\tilde{a}$, $\bar{a}$, $\tilde{b}$, $\bar{b}$ так, чтобы отрезки $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ принадлежали эллиптическим флагам, а отрезки $\bar{a}$, $\bar{b}$ - эллипическим псевдофлагам между сторонами трехвершинника. Отрезок параболической прямой c, определенный точками $A,\ B$, обозначим $\tilde{c}$.

С точностью до обозначения прямых в паре a, b возможны три набора ребер: 1) $(\tilde{a}, \bar{b}, \tilde{c})$, или $(\bar{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$; 2) $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$; 3) $(\bar{a}, \bar{b}, \tilde{c})$.

Тип трехвершинника ABC соответственно вариантам 1)- 3) обозначим $eep(I)$, $eep(II)$, $eep(III)$.

2. hhp. Пусть $a,\ b$ - гиперболические прямые, $a \cap \gamma = \{A_1,\ A_2\},\ b \cap \gamma =$
$= \{B_1,\ B_2\}$, и $c \cap \gamma = C_0$. Если пара точек $A_1,\ A_2$ разделяет на γ пару точек $B_1,\ B_2$, то точка $C = a \cap b$ является внутренней относительно γ, следовательно, тройка точек $A,\ B,\ C$ не определяет трехвершинник. Пусть пары точек $A_1,\ A_2$ и $B_1,\ B_2$ не разделены на γ. Возможны два различных типа положения точек $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2,\ C_0$ на абсолюте:

1) одна из пар точек $(A_1,\ A_2)$, $(B_1,\ B_2)$ разделяет линию γ на две дуги так, что одна из дуг содержит точку C_0, другая - точки второй пары (рис. 3, а);

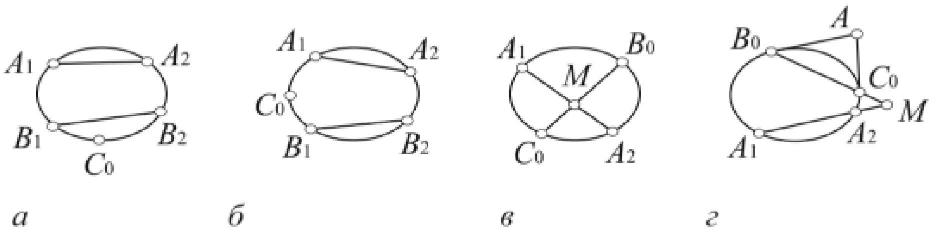


Рисунок 3 — Расположение на абсолюте несобственных точек сторон трехвершинников с набороми hhp (а, б) hpp(в, г)

2) каждая пара точек $(A_1,\ A_2)$, $(B_1,\ B_2)$ разделяет линию γ на две дуги так, что одна из дуг содержит и точку C_0, и точки второй пары (рис. 3, б).

Типы трехвершинников плоскости $\widehat{H}$, соответствующие первому (второму) типу положения абсолютных точек сторон, обозначим $hhp(I)$ $(hhp(II))$.

Определение 2. Точку M плоскости $\widehat{H}$, не принадлежащую трехвершиннику F, назовем внутренней относительно F, если каждая проходящая через M прямая имеет с F две общие точки. Непустое множество всех внутренних относительно F точек плоскости $\widehat{H}$ назовем внутренностью F.

Трехвершинник плоскости $\widehat{H}$, обладающий внутренностью, назовем трехреберником.

Теорема 2. Пусть трехвершинники $F_1,\ F_2$ плоскости $\widehat{H}$ имеют общие вершины и составлены ребрами соответственно $\tilde{a},\ \tilde{b},\ \tilde{c}$ и $\tilde{a},\ \tilde{b},\ \bar{c}$, где $\tilde{c}$ и $\bar{c}$ - смежные отрезки эллиптической стороны c. Тогда один и только один из трехвершинников $F_1,\ F_2$ является трехреберником.

Определение 3. Трехреберник типа $eee(III)$ обладает бесконечной внутренностью. Все его ребра являются эллиптическими сегментами. В таком трехребернике сумма длин любых двух ребер больше длины третьего ребра. Все ребра трехгреберника типа $eee(I)$ или $hhh(I)$ эллиптические или, соответственно, гиперболические. Одно из этих ребер лежит напротив эллиптического или, соответственно, гиперболического псевдоугла. Два других ребра лежат напротив эллиптических или, соответственно, гиперболических углов. Длины ребер в таком трехребернике связаны условием:

$$\bar{a} > \widetilde{b} + \widetilde{c}$$

где символ $\bar{a}$ обозначает длину ребра, противоположного эллиптическому или, соответственно, гиперболическому псевдоуглу, а символы $\tilde{b}, \tilde{c}$ обозначают длины двух других ребер в трехребернике

В дипломной работе мы будем использовать 10 из 15 типов углов в плоскости $\hat{H}$. Далее, определим используемые объекты.

Угол между эллиптическими прямыми в плоскости $\widehat{H}$ называется эллиптическим псевдоуглом (эллиптическим углом), если он содержит (соответственно не содержит) абсолютную кривую γ. Угол между гиперболическими прямыми называется гиперболическим псевдоуглом (гиперболическим углом), если он содержит (не содержит) параболические прямые из прямых пучков его сторон. Угол между параболическими прямыми с общей точкой X называется ковалианой (валианой) точки X, если он содержит (не содержит) абсолют. Ковалиана точки состоит из двух компонентов связности. Мы называем их семиковалианами.

Угол между эллиптической прямой a и параболической прямой b называется эллиптическим псевдофлагом (флагом), если он содержит (не содержит) параболическую прямую $c, c \neq b$, из пучка строки a и b. Угол между гиперболической прямой a и параболической прямой b называется гиперболическим псевдофлагом (флагом), если он содержит (не содержит) параболическую прямую $c, c \neq b$, из пучка прямых a и b.

Трехреберник типа $eep(I)$ и $hhp(I)$ имеет следующий набор внутренних углов: эллиптический (гиперболический) угол, эллиптический (гиперболический) флаг и эллиптический (гиперболический) псевдофлаг.

В дальнейших доказательствах теорем 3 и 4 используется канонический репер второго типа в плоскости $\widehat{H}$. Это проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, вершины которого образуют автополярный трехугольник $A_1A_2A_3$ второго порядка относительно абсолютной кривой γ, а единичная точка E лежит на абсолюте. Семейство всех канонических реперов второго типа зависит от трех параметров. В любом каноническом репере R второго типа абсолютная кривая γ задается уравнением

$$x_1x_2 - x_3^2 = 0 \tag{4}$$

Если точки A и B эллиптической (гиперболической) прямой имеют координаты (a_p) и (b_p), $p = 1, 2, 3$, то расстояние $|AB|$ между ними в репере R можно выразить по формуле:

$$\cos\frac{|AB|}{\rho} = \pm\frac{a_1b_2 + a_2b_1 - 2a_3b_3}{2\sqrt{a_1a_2 - a_3^2}\sqrt{b_1b_2 - b_3^2}} \tag{5}$$

$$\left(\cosh\frac{|AB|}{\rho} = \pm\frac{a_1b_2 + a_2b_1 - 2a_3b_3}{2\sqrt{a_1a_2 - a_3^2}\sqrt{b_1b_2 - b_3^2}}\right) \tag{6}$$

Уравнение (4) абсолютной кривой γ имеет тангенциальный вид:

$$4X_1X_2 - X_3^2 = 0 \tag{7}$$

где тройка чисел (X_p) обозначает координаты произвольной касательной к кривой γ. Квадратичная форма $4X_1X_2 - X_3^2$ определяет характеристику прямой на плоскости $\widehat{H}$. Для вещественных координат (a_p) эллиптической (гиперболической) прямой a в репере R справедливо неравенство:

$$4a_1a_2 - a_3^2 < 0 \quad \left(4a_1a_2 - a_3^2 > 0\right) \tag{8}$$

Далее, имея необходимые определния, мы переходим непосредственно к неравенствам в трехреберниках типа $eep(I)$ и $hhp(I)$.

Теорема 3. На плоскости $\widehat{H}$ в трехребернике типа $eep(I)$ большее эллиптическое ребро лежит напротив эллиптического псевдофлага.

Теорема 4. На плоскости $\widehat{H}$ в трехребернике типа $hhp(I)$ большее гиперболическое ребро лежит напротив гиперболического псевдофлага.

Свойство трехреберников типа $eep(I)$ и $hhp(I)$.

Теорема 5. Пусть ξ - некоторая эллиптическая (гиперболическая) кривая в плоскости $\widehat{H}$, $\xi(AB)$ - дуга между различными точками A и B на кривой ξ, и пусть $[AB]$ - прямолинейный эллиптический (гиперболический) отрезок между точками A и B. Предполагается, что дуга $\xi(AB)$ удовлетворяет следующим условиям:

(I) замкнутая кривая ξ_0, где $\xi_0 = \xi(AB) \cup [AB]$, является двусторонней кривой;
(II) абсолютная кривая γ не принадлежит области $\mu\,(\xi_0)$, ограниченной замкнутой кривой ξ_0 и топологически эквивалентной открытому кругу ;
(III) область $\mu\,(\xi_0)$ выпукла.
Тогда дуга $\xi(AB)$ короче отрезка $[AB]$.

Далее, мы описываем свойство диагоналей простого 4-контура.

Простой 4-контур - это ячейка в серии разбиений плоскости $\widehat{H}$. Границы простого 4-контура состоят из четырех параболических отрезков. Простой 4-контур выпуклый и симметричный относительно диагоналей. Одна из диагоналей простого 4-контура эллиптическая. Вторая диагональ гиперболическая. Точка пересечения диагоналей делит каждую из них пополам. Прежде чем доказывать еще одно свойство диагоналей простого 4-контура, даем следующее определение.

Определение 4. Эллиптический (гиперболический) отрезок максимальной длины между двумя точками фигуры на плоскости $\widehat{H}$ называется эллиптическим (гиперболическим) диаметром этой фигуры.

Теорема 6. Эллиптическая (гиперболическая) диагональ простого 4-контура плоскости $\widehat{H}$ есть эллиптический (гиперболический) диаметр этого 4-контура.

Заключение. В дипломной работе доказываются неравенства трехреберников типов $eep(I)$ и $hhp(I)$ на гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны: ребро трехреберника $eep(I)$ (или $hhp(I)$) напротив эллиптического (соответственно гиперболического) флага короче ребра, противоположного эллиптическому (гиперболическому) псевдофлагу. С помощью этих неравенств установлены экстремальные свойства отрезков на эллиптических и гиперболических прямых и экстремальные свойства диагоналей простого 4-контура.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Cayley, A. A Six memoir upon quantics / A. Cayley. - London : Phil. Trans. Roy. Soc. - 1859. - Vol. 149. - P. 61-70.

2 Кэли, А. Шестой мемуар о формах / А. Кэли // Об основаниях геометрии : Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей под ред. А. П. Нордена. - М. : ГИТТЛ, 1956. - С. 222-252.

3 Klein, F. Vergleichende Betrachtungen uber neuere geometrische Vorschungen / F. Klein -Programm zum Eintritt in die philosophische Facultat und den Senat der Universitat zu Enlargen. Erlangen: A. Deichert, 1872. - P. 63-100.

4 Клейн, Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований «Эрлангенская программа» / Ф. Клейн // Об основаниях геометрии : Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей под ред. А. П. Нордена. - М. : ГИТТЛ, 1956. - С. 399-434.

5 Каган, В. Ф. Основания геометрии: в 2 ч. Ч. 2. / В. Ф. Каган. - М. : ГИТТЛ, 1956. - 344 с.

6 Клейн, Ф. Неевклидова геометрия / Ф. Клейн. М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. - 348 с.

7 Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. М. : Наука, 1969. - 644 с.

8 Coxeter, H. S. M. A Geometrical Background for De Sitter's World / H. S. M. Coxeter // Amer. Math. Mon. - 1943. - Vol. 50, №4. - P. 217-228.

9 Розенфельд, Б. А. Неевклидовы пространства / Б. А. Розенфельд. - М. : Наука, 1969. - 548 с.

10 Romakina, L. N. Inequalities of trihedrals on a hyperbolic plane of positive curvature / L. N. Romakina // Beitr. Algebra Geom. - 2017. - Vol. 58. - P. 723–734.

11 Bottema, O. Geometric inequalities / O. Bottema, R. Z. Djordjivic, R. R. Janic, D. S. Mitrinovic, P. M. Vasic. - Groningen : Volters–Noordhoff Publishing, 1969. - P. 151.

12 Asmus, Im. Duality between hyperbolic and de Sitter geometry / Im.Asmus. // J. of Geom., 2009. - Vol. 96, iss. 1-2. - P. 11-40.

13 Cho, Y. Trigonometry in extended hyperbolic space and extended de Sitter space / Y. Cho // Bull. Korean Math. Soc., 2009. - Vol. 46. №6. - P. 1099–1133.

14 Певзнер, С. Л. Проективная геометрия / С. Л. Певзнер. - М. : Просвещение, 1980. - 128 с.

15 Певзнер, С. Л. Проективная геометрия: учеб. пособие по курсу «Геометрия» для студентов-заочников II-III курса физ.-мат. фак. / С. Л. Певзнер. - М. : Просвещение, 1980. - 128 с.

16 Вольф, Дж. Пространства постоянной кривизны / Дж. Вольф, Ю. Д. Бураго. - М. : Наука, 1982. - 480 с.

17 Ромакина, Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 1 : Тригонометрия / Л.Н. Ромакина. - Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. - 244 с.

18 Певзнер, С. Л. Свойства кривых 2-го порядка на плоскости Лобачевского с помощью фокально-директориальных инвариантов / С. Л. Певзнер // Изв. вузов. Матем. - 1962. - №6. - С. 85-90.

19 Розенфельд, Б. А. Неевклидовы геометрии / Б. А. Розенфельд. - М. : ГИТТЛ, 1955. - 744 с.

20 Ромакина, Л. Н. Конечные замкнутые 3(4)-контуры расширенной гиперболической плоскости / Л. Н. Ромакина // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. - 2010. - Сер. Математика. Механика. Информатика. - Т. 10, вып. 3. - С. 14-26.