

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра геометрии

Геометрия порядка

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Радькова Александра Сергеевича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент

подпись, дата

В.Б. Поплавский

Зав. кафедрой
доцент, к.ф.-м.н., доцент

подпись, дата

С.В. Галаев

Саратов 2022

Введение. Евклид черпал материал для своих книг из разных источников, поэтому не удивительно, что мы можем извлечь из его «Начал» две самостоятельные геометрии, различающиеся как своей логической основой, так и своими первоначальными.

Они известны как абсолютная и аффинная геометрии.

Абсолютная геометрия, которую впервые выделил Боляй (венг. Bolyai), - это часть евклидовой геометрии, которая опирается на четыре постулата и не зависит от пятого. Абсолютная геометрия - это геометрия, не опирающаяся на единственность прямой линии, параллельной данной прямой линии и проходящей через данную точку. С другой стороны, в аффинной геометрии, которую выделил Эйлер, эта единственность параллельной играет ведущую роль. Третий и четвертый постулаты Евклида теряют в ней смысл, так как окружности в этой геометрии не рассматриваются, а углы не измеряются. Поэтому единственными допустимыми являются параллельный перенос и центральная симметрия. Аффинные предложения Евклида - это те предположения, которые сохраняют силу при параллельном проектировании с одной плоскости на другую. Так как каждое предложение Евклида принадлежит либо аффинной геометрии, либо абсолютной, либо не принадлежит ни той, ни другой, то с первого взгляда может показаться, что эти две геометрии не имеют ничего общего, за исключением первого и второго постулатов. Однако существует группа весьма важных предложений, принадлежащих обеим геометриям. Основной идеей в этих предложениях является идея о расположении «между» (или «промежуточности»), которую Евклид использовал в своем знаменитом определении «концы-линии-точки», где линия, под которой имеется в виду прямолинейный отрезок, определяется как то, что находится между ее концами. Это наводит на мысль о возможности принять понятие «быть между» за первоначальное. Если точка В лежит между точками А и С, мы можем сказать, что эти три точки „АВС расположены в определенном порядке на отрезке, луче, прямой. Это отношение - отношение порядка может быть распространено с трех точек на четыре и более.

Простая геометрия, о которой идет речь в этой работе и которая имеет общий фундамент с аффинной и абсолютной геометрией, достаточно важна, чтобы иметь свое название. Название дескриптивная геометрия, которое

применяет Бертран Рассел ¹, кажется неудачным, так как употребляется в другом смысле (начертательная геометрия). Артин ² называл эту геометрию геометрией порядка, которая так и вошла в русскую математическую терминологию. Согласно Хашимото (англ. Hashimoto) ³, эту геометрия в зарубежной литературе можно встретить под названием «betweenness geometry», что можно перевести как геометрия промежуточности. Придерживаясь русской математической терминологии, мы будем называть эту геометрию геометрией порядка.

Дипломной работа посвящена изучению истории возникновения и развития геометрии порядка, нахождение различных подходов в построении геометрии порядка и их анализ. В частности, это перевод найденного в зарубежной литературе материала на русский язык, разбор переведенного материала, включивший в себя исправления многочисленных ошибок, обнаруженных в английском варианте.

Геометрия порядка опирается на десять аксиом, которые будут формулироваться последовательно по мере необходимости.

Основное содержание работы. Рассмотрим эти аксиомы и важные определения.

Сначала описываются аксиомы тернарного отношения «быть между»

Аксиома 1. Существуют по крайней мере две точки.

Аксиома 2. Если A и B — две различные точки, то существует по крайней мере одна такая точка C , что $[ABC]$.

Аксиома 3. Если $[ABC]$ то A и C различны: $A \neq C$.

Аксиома 4. Если $[ABC]$, то $[CBA]$, но не $[BCA]$.

Теорема 1. Если $[ABC]$, то не $[CAB]$.

Теорема 2. Если $[ABC]$, то $A \neq B \neq C$ (т. е. в условиях аксиомы 3 все три точки различны).

Определение 1. Если A и B — две различные точки, то *интервалом* AB называется множество точек P , для которых $[APB]$. Если $[APB]$, то мы

¹Russell, B. The Principles of Mathematics / B.Russell. Cambridge — London, 1903.

²Artin, E. Geometric Algebra. / E.Artin. N. Y., 1957.

³Hashimoto, J. Betweenness geometry / J.Hashimoto. Osaka Math. J., 1958, 10, 147-158.

скажем, что точка P принадлежит интервалу AB . В дальнейшем мы будем говорить об элементах других множеств, например «прямой».

Теорема 3. Ни A , ни B не принадлежат интервалу AB .

Доказательство. Если бы точка A или B принадлежала интервалу AB , мы имели бы $[AAB]$ или $[ABB]$, что противоречит теореме 2. $\square$

Теорема 4. Интервал AB совпадает с интервалом BA .

Доказательство. В силу аксиомы 4, $[APB]$ влечет за собой $[BPA]$. $\square$

Теперь вводится понятие прямой, луча, интервала, а также необходимые аксиомы инцидентности.

Определение 2. Отрезком $\overline{AB}$ называется интервал AB вместе с его концами A и B :

$$\overline{AB} = A + AB + B. \quad (1)$$

Определение 3. Лучом A/B («исходящим из точки A в сторону, противоположную точке B ») называют множество таких точек P , что $[PAB]$.

Определение 4. Прямой AB называется отрезок $\overline{AB}$ с добавленными лучами A/B и B/A :

$$AB = A/B + \overline{AB} + B/A. \quad (2)$$

Следствие. (Из теоремы 4). Отрезок AB совпадает с отрезком BA . Прямая AB совпадает с прямой BA .

Аксиома 5. Если C и D — различные точки прямой AB , то A принадлежит прямой CD .

Теорема 5. Если C и D — различные точки прямой AB , то прямая AB совпадает с прямой CD .

Доказательство. Пусть некоторые из точек A, B, C, D совпадают; например $D = B$. Тогда нам нужно доказать, что прямая AB совпадает с прямой BC . Пусть X — произвольная точка прямой BC , отличная от A и B . Согласно аксиоме 5, точка A , как и X , принадлежит BC . Следовательно, B принадлежит AX и X принадлежит AB . Таким образом, любая точка, принадлежащая BC , принадлежит также и AB . Поменяв ролями точки A и C ,

мы видим, что точно так же каждая точка, принадлежащая AB , принадлежит и BC . Таким образом, $AB = BC$. Если же все точки A, B, C, D различны, мы имеем $AB = BC = CD$. $\square$

Следствия из теоремы 5:

Следствие 1. Через две различные точки проходит в точности одна прямая. Две различные прямые (если они существуют) имеют не более одной общей точки. (Эта общая точка F называется *точкой пересечения*, а про прямые говорят, что они пересекаются в точке F .)

Следствие 2. Три произвольные различные точки A, B, C , принадлежащие одной прямой, удовлетворяют одному из трех соотношений $[ABC]$, $[BCA]$, $[CAB]$.

Аксиома 6. Какова бы ни была прямая AB , существует точка C , не принадлежащая этой прямой.

Теорема 6. Если точка C не принадлежит прямой AB , то точка A не принадлежит BC и точка B не принадлежит прямой AC , т. е. все три прямые BC , CA , AB различны.

Доказательство. Согласно аксиоме 5, если бы точка A принадлежала BC , то точка C принадлежала бы AB . $\square$

Определение 5. Точки, принадлежащие одной прямой, называются *коллинеарными*. Три неколлинеарные точки A, B, C определяют *треугольник* ABC , который состоит из этих трех точек, называемых *вершинами*, и трех отрезков $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, называемых *сторонами* треугольника.

Аксиома 7. Если ABC — треугольник и $[BCD]$ и $[CEA]$, то на прямой DE существует такая точка F , что $[AFB]$ в соответствии с рисунком 1.

Теорема 7. Для любых двух различных точек существует точка, лежащая между ними.

Доказательство. Пусть A и B — различные точки. Согласно аксиоме 6, существует точка E , не принадлежащая прямой AB . Согласно аксиоме 2, существует точка C , для которой $[AEC]$. По теореме 5, прямая AC совпадает с прямой AE . Из теоремы 6 следует, что точка B не принадлежит этой прямой. Снова применяя аксиому 2, мы видим, что существует точка F , для которой

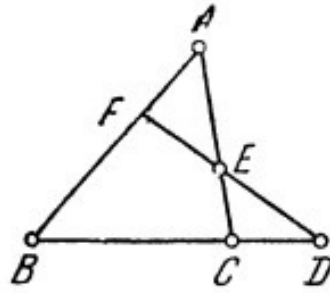


Рис. 1

$[BCD]$. И наконец, в силу аксиомы 7 существует точка D , лежащая между A и B . □

Теорема 8. В обозначениях аксиомы 7 $[DEF]$.

Теорема 9. Прямая не может пересекать все три стороны треугольника.

Теорема 10. Если $[ABC]$ и $[BCD]$, то $[ABD]$.

Теорема 11. Если $[ABC]$ и $[ABD]$, причем $C \neq D$, то $[BCD]$ или $[BDC]$ и $[ACD]$ или $[ADC]$.

Теорема 12. Если $[ABD]$ и $[ACD]$, причем $B \neq C$, то $[ABC]$ или $[ACB]$.

Теорема 13. Если $[ABC]$ и $[ACD]$, то $[BCD]$ и $[ABD]$.

Определение 6. Если $[ABC]$ и $[ACD]$, мы пишем $[ABCD]$.

Порядок четырех точек, как легко видеть, обладает всеми «наглядными» свойствами: например, если $[ABCD]$, то $[DCBA]$, но в таком случае никакой другой порядок не имеет места.

Теорема 14. Если ABC — треугольник, а точки F и D таковы, что $[AFB]$ и $[BCD]$, то на прямой DF существует такая точка E , что $[CEA]$.

Теорема 15. Если n точек неколлинеарны, то существует по крайней мере одна прямая, проходящая в точности через две из этих точек.

Далее рассматривается аксиоматика геометрии порядка.

Определение 7. Если A, B, C — три неколлинеарные точки, то плоскостью ABC называется множество точек, коллинеарных парам точек, принадлежащих одной или двум сторонам треугольника ABC .

Определение 8. Говорят, что отрезок, интервал, луч или прямая лежат в плоскости, если все их точки принадлежат плоскости.

Аксиомы 1-7 позволят нам вывести известные свойства инцидентности в плоскости, включая следующие два предложения, которые Гильберт ⁴ принимал за аксиомы:

Любые три неколлинеарные точки плоскости α полностью определяют эту плоскость.

Если две различные точки прямой a принадлежат плоскости α , то все остальные точки этой прямой также принадлежат плоскости α .

Определение 9. Углом называется фигура, состоящая из точки O и двух неколлинеарных лучей, выходящих из нее. Точка O называется *вершиной*, а лучи — *сторонами* угла (Веблен ⁵, стр. 21; Фордер ⁶, стр. 69). Если стороны угла — лучи OA и OB или a_1 и b_1 , угол обозначается $\angle AOB$ или a_1b_1 (или $\angle BOA$ или b_1a_1).

Определение 10. Произвольная пара точек A и B на соответствующих сторонах определяет один и тот же угол a_1b_1 . Если точка C лежит между A и B , говорят, что луч OC лежит *внутри* угла (или между лучами OA и OB).

Вплоть до введения первых аксиом для плоскостей мы будем полагать, что все рассматриваемые точки и прямые принадлежат *одной плоскости*.

Определение 11. Выпуклой областью называется множество точек, любые две из которых можно соединить отрезком, состоящим целиком из точек множества с тем дополнительным условием, что каждая точка принадлежит по крайней мере двум неколлинеарным отрезкам, состоящим целиком из точек множества.

Утверждение 1. Если ABC и $A'B'C'$ — две тройки коллинеарных точек, такие, что три прямые AA' , BB' , CC' не пересекаются, то из $[ACB]$ следует $[A'C'B']$.

Аналогичное рассмотрение угловых областей дает следующую теорему:

Теорема 16. Если ABC и $A'B'C'$ — две тройки коллинеарных точек, такие, что три прямые AA' , BB' , CC' имеют общую точку O , которая не лежит

⁴Гильберт Д., Основания геометрии. Перевод с немецкого И. С. Градштейна под ред. П. К. Рашевского/ Гильберт Д. М.—Л., Гостехиздат, 1948.

⁵Веблен, О. The Foundations of Geometry. Глава 1 книги: J. W. Young, Monographs on Topics of Modern Mathematics/ О.Веблен. N. Y., 1911.

⁶Фордер, Г. Г. The Foundations of Euclidean Geometry / Г. Г. Фордер. Cambridge — London, 1927, N. Y, 1958.

между A и A' , или между B и B' , или между C и C' , то из $[ACB]$ следует $[A'C'B']$.

Для того чтобы определить *размерность* рассматриваемого пространства, необходимо дополнительно ввести одну или несколько аксиом. Если нас удовлетворяют два измерения, мы полагаем:

Аксиома 8. Все точки лежат в одной плоскости.

В противном случае (Фордер ⁷, стр. 60) мы заменяем эту аксиому такой:
Аксиома 9. Если ABC — плоскость, то существует точка D , не принадлежащая этой плоскости.

Аксиома 10. Все точки принадлежат одному пространству.

Тогда:

Теорема 17. Две плоскости, имеющие общую точку, обязательно имеют другую общую точку, а следовательно, общую прямую.

Доказательство. Пусть P — общая точка и α одна из плоскостей. Выберем точки A, B, C на плоскости α так, чтобы точка P находилась внутри треугольника ABC . Пусть DPQ — треугольник на другой плоскости β (рис. 12).

Если D или Q принадлежат плоскости α , то α и β имеют две общие точки. Если же это не так, то прямая PQ пересекает тетраэдр $ABCD$ в точке R , отличной от P , и прямая DR , принадлежащая плоскости β , пересекает треугольник ABC в точке, которая принадлежит одновременно плоскостям α и β . □

Аксиома 11. Если $A_0A_1A_2A_3$ — трехмерное пространство, то существует точка A_4 , не принадлежащая ему.

Аксиома 12. При любом разбиении всех точек прямой на два непустых множества, обладающих тем свойством, что точка одного множества не может лежать между двумя точками другого, в одном из множеств существует точка, лежащая между всеми остальными точками этого множества и всеми точками другого множества.

⁷Фордер, Г. Г. The Foundations of Euclidean Geometry / Г. Г. Фордер. Cambridge — London, 1927, N. Y, 1958.

Теорема 18. При любом разбиении множества всех лежащих внутри угла лучей на два непересекающихся множества, таком, что ни один луч одного из множеств не лежит между двумя лучами другого множества, в одном из множеств существует луч, который лежит между всеми остальными лучами этого множества и всеми лучами другого множества.

Чтобы доказать это предложение для угла AOB , достаточно рассмотреть пересечение всех лучей с отрезком AB и воспользоваться относящейся к случаю отрезка аксиомой 12.

Теперь рассмотрим проблему параллельности.

Теорема 20. Для любой точки A и любой прямой r , не проходящей через A , существуют ровно два луча (на плоскости Ar), которые выходят из точки A , не пересекают прямую r и при этом отделяют лучи, которые выходят из A и пересекают r , от лучей, которые не пересекают r .

Доказательство. Выберем две произвольные точки B и C прямой r , проведем прямые AB и AC и применим теорему 4 к углу между лучами A/C и A/B (этот угол отмечен на рис. 2).

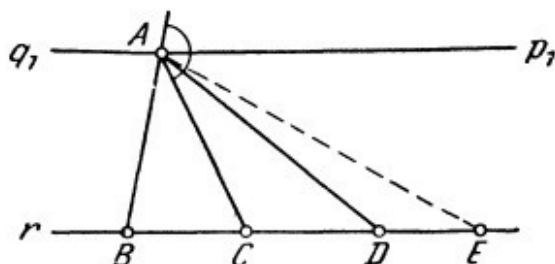


Рис. 2

Мы рассмотрим разбиение множества всех лучей, лежащих внутри этого угла, на два подмножества, определяемое тем, пересекают ли или не пересекают эти лучи луч C/B . Ясно, что эти множества лучей непусты и что никакой из лучей одного множества не может лежать между двумя лучами другого. Из этого мы заключаем, что в одном из множеств содержится луч p_1 , который лежит между остальными лучами этого множества и всеми лучами другого множества.

Этот луч p_1 принадлежит ко второму множеству. В самом деле, если бы он пересекал луч C/B , скажем в точке D , мы имели бы $[BCD]$. Но в этом

случае в силу аксиомы 2, существовала бы такая точка E , что $[CDE]$; тем самым мы приходим к абсурдному выводу о том, что луч A/E принадлежит обоим множествам сразу: к первому он относится потому, что пересекает луч C/B в точке E , а ко второму — потому что AD лежит между AC и AE .

Таким образом, мы нашли луч p_1 внутри выбранного угла, который представляет собой «первый» луч, не пересекающий луч C/B — это означает, что все лучи, лежащие в углу между AC и p_1 пересекают C/B . Поменяв ролями точки B и C , мы получим другой луч q_1 который можно охарактеризовать как «последний» луч (при вращении против часовой стрелки), который еще не пересекает луча B/C . Так как прямая r состоит из двух лучей B/C , C/B и отрезка BC , мы нашли теперь два луча p_1 , q_1 которые отделяют все лучи, выходящие из точки A и пересекающие r , от лучей, выходящих из A и не пересекающих прямой r . $\square$

Определение 12. Лучи p_1 и q_1 , выходящие из точки A , называют *параллельными* прямой r в двух направлениях: луч p_1 параллелен лучу C/B , а луч q_1 — лучу B/C .

Определение 13. Два луча имеют одинаковое *направление*, если они лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их начальные точки.

Следствие 3. Через произвольную точку A , не принадлежащую прямой r , проходит по крайней мере одна прямая, которая лежит в плоскости Ar и не пересекает прямую r .

Другим известным свойством параллельности является «независимость от выбора начала луча»:

Теорема 21. Прямая и луч остаются параллельными, если перенести начало луча в другую точку той же прямой (т. е. отнять от луча или прибавить к нему отрезок).

Доказательство. Доказательство (Гаусс ⁸ стр. 108—109). Пусть p_1 - луч, выходящий из точки A , который параллелен прямой r , проходящей через точку B , и пусть A' — произвольная точка этого луча, отличная от точки A (рис. 3) или противоположного луча p_2 (рис. 4). Измененный луч p'_1 с началом в

⁸Гаусс, К. Ф. Арифметические исследования. Перевод с латинского Б. А. Демьянова / К. Ф. Гаусс. ГИТТЛ, М., 1959.

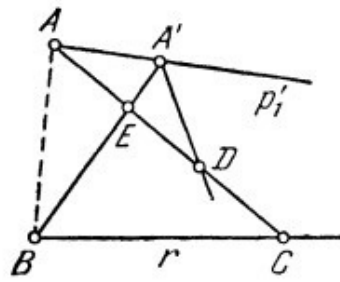


Рис. 3

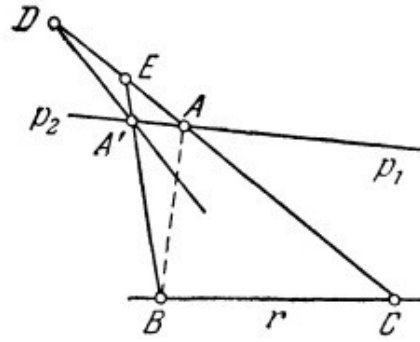


Рис. 4

точке A' есть луч $A'/$, соответственно луч A' ; он, очевидно, не пересекает прямую r . Остается доказать, что любой луч, выходящий из точки A и лежащий внутри угла, образованного лучами $A'B$ и p_1' , пересекает прямую r . Пусть D — произвольная точка такого луча (рис. 14) или противоположного ему (рис. 15). Так как луч p_1 (выходящий из точки A) параллелен прямой r , прямая AD (содержащая луч, который лежит внутри угла между AB и p_1 пересекает прямую r , скажем, в точке C . Прямая $A'B$, которая отделяет точку A от D , пересекает отрезок AD , скажем, в точке E . Применив аксиому 7 к треугольнику CBE для которого $[BEA']$ и $[EDC]$ (рис. 3), или к треугольнику BCE , для которого $[CED]$ и $[EA'B]$ (рис. 4), мы получим, что прямая $A'D$ пересекает BC . $\square$

Это свойство позволяет говорить, что прямая $p = AA'$ параллельна прямой $r = BC$; однако при этом надо помнить, что понятие «параллелизма» связано с выбором определенного «направления» на каждой из рассматриваемых прямых.

Теорема 22. Если две прямые p и r параллельны третьей прямой s в одном направлении, то существует прямая, пересекающая все три прямые.

В аффинной геометрии эта теорема очевидна, так что остается рассмотреть случай гиперболической геометрии.

Доказательство. Проведем через точку A прямой p вторую прямую, параллельную прямой r . Обозначим эту прямую q . Занумеруем лучи прямых p и q так, чтобы прямая r лежала в угловой области p_1q_1 . Таким образом, лучи p_1 и q_1 параллельны прямой r в разных направлениях, а прямая s параллельна

ей в том же направлении, что и луч p_1 . Пусть B и D - произвольные точки прямых r и s соответственно.

Если точка D лежит в области p_1q_1 то условию теоремы удовлетворяет прямая AD . Если D лежит в области p_1q_2 , то условию теоремы удовлетворяет прямая BD . Если D лежит в p_2q_2 , то обе прямые — как AD , так и BD — удовлетворяют условию теоремы. Наконец, если точка D лежит в области p_2q_1 , то условию теоремы удовлетворяет прямая AB . $\square$

Заключение. В данной работе была рассмотрена геометрия порядка после ее реконструкции другими учеными с помощью аксиом и преобразований. От построения точки, до постройки ее до отрезка, отрезок до луча, луч до прямой и т.д.

Изложены основные понятия, в частности тернарное отношение (отношение порядка), аксиоматика геометрии порядка связанная с прямыми, лучами, плоскостями и гиперплоскостями, а также пространством. Далее вводилось 3 варианта параллельности этих прямых и лучей.

Также была рассмотрена задача Сильвестра о коллинеарных точках принадлежащих к геометрии порядка.