МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Матричные и биматричные игры

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Иванченко Галины Викторовны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент ____________________ В.Б. Поплавский
подпись, дата

Зав. кафедрой
к.ф.-м.н., доцент ____________________ С.В. Галаев
подпись, дата

Саратов 2022

Введение. В экономике и управлении часто встречаются ситуации, в которых участвуют две или более стороны, преследующие различные цели, причем результат, полученный каждой из сторон при реализации определенной стратегии, зависит от действий других сторон. Такие ситуации называются конфликтными или игровыми. Математические методы анализа конфликтных ситуаций объединяются под названием “Теория игр”, сама конфликтная ситуация называется *игрой*, а стороны, участвующие в конфликте, называются *игроками*.

Математическая теория игр — это теория математических моделей принятия решений несколькими сторонами, имеющими собственные интересы и возможности влияния на возникновение тех или иных исходов игры. Центральным понятием этой теории игр является понятие решения игры, включающее в себя понятие оптимальных стратегий игроков.

Игра с нулевой суммой означает, что сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю. Игры двух игроков с нулевой суммой относятся к классу антагонистических игр, в которых выигрыш одной стороны конфликта (игрока 1) в точности совпадает с проигрышем другой стороны (игрока 2). В случае, когда число стратегий игроков конечно, игра двух игроков становится матричной или биматричной игрой.

Биматричная игра характеризуется тем, что в ней участвует два игрока, каждый из которых имеет конечное число стратегий. При этом интересы игроков, связанные с реализацией тех или иных исходов игры, не совпадают, но и не являются, вообще говоря, противоположными.

Целью данной работы является подробное изложение вопросов, относящихся к играм двух игроков. Такие игры могут быть либо антагонистические (когда цели игроков прямо противоположны), либо неантагонистические (в противном случае). Для антагонистических игр введено понятие решения игры в форме седловой точки и рассмотрены основные методы нахождения решения: графоаналитический метод и сведение решения игры к паре двойственных задач линейного программирования. Для неантагонистических игр рассматривается два типа решений игры: равновесие по Нэшу и арбитражное решение Нэша. Согласно математической традиции, в дипломной работе рассматриваются в качестве действий игроков стратегии двух типов: чистые и смешанные.

Основное содержание работы. Матричная игра задается платежной матрицей (другое название: “матрица выигрышей”) вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} \end{pmatrix}$$

При этом номера строк называются стратегиями игрока 1, а номера столбцов – стратегиями игрока 2. Игра состоит в том, что игроки независимо друг от друга выбирают свои стратегии. Если 1-й игрок выбрал свою стратегию $i = 1, \dots, n$, а игрок 2 выбрал стратегию $j = 1, \dots, m$, то складывается ситуация с параметрами (i, j), в которой игрок 1 получает выигрыш a_{ij} в ситуации, когда выбирает свою i-ю стратегию, а игрок 2 свою j-ю стратегию, и одновременно, значение проигрыша 2-го игрока.

Первая задача теории матричных игр – сокращение формата платежной матрицы. Эта задача решается с помощью введения понятия доминирования стратегий игроков и т.д

Для игрока 1 его стратегия k доминируется его стратегией s, если в платежной матрице каждый элемент строки k не больше соответствующего элемента строки s

Для игрока 2 его стратегия k доминируется его стратегией s, если в платежной матрице каждый элемент столбца k не меньше соответствующего элемента столбца s. Откуда следует

Строки и столбцы с доминируемыми стратегиями можно исключить из платежной матрицы, т.к. при разумном подходе они не должны использоваться. Это приводит к сокращению формата платежной матрицы. В работе приведены примеры такого сокращения за счет отбрасывания доминируемых стратегий игроков.

В работе приведены примеры такого сокращения за счет отбрасывания доминируемых стратегий

Принцип максимина. Максиминные и минимаксные стратегии. Для определения оптимальных стратегий игреков в матричной игре применяется так называемый «Принцип максимина», т.е. принцип получения наилучшего результата при наихудших условиях. Для игрока 1 это означает получение максимального гарантированного выигрыша. Гарантированный выигрыш игрока 1 при выборе им своей чистой i-й стратегии получается тогда, когда он ориентируется на наименьшее возможное значение своего выигрыша α_i, то есть выполняется равенство $\alpha_i = \min_j a_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$

Для того, чтобы этот гарантированный выигрыш был максимальным, нужно из всех α_i выбрать наибольшее значение. Обозначим его v_1 и назовем *чистой нижней ценой игры («максимином») равенство:* $v_1 = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}$

Стратегия игрока 1, которой соответствует элемент v_1, называется *максиминной стратегии 1-го игрока.*

Если нижняя и верхняя цена матричной игры совпадают, т.е. $v = v_1 = v_2$, то число v называется *ценой игры*. В этом случае говорят, что игра имеет цену.

Теорема о седловой точке

Определение 1. Пусть Γ_A — матричная игра с платежной матрицей A = (a_{ij}), $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$,. Ситуация (i^o, j^o) называется седловой точкой в игре Γ_A, если при всех i = 1,n, j = l,m выполняется двойное неравенство $a_{ijo} \le a_{io\,jo} \le a_{ioj}$

Седловая точка является оптимальным совместным решением игроков 1 и 2. А именно, седловые точки – это устойчивые ситуации в матричной игре: одностороннее отклонение от седловой точки не выгодно отклонившемуся игроку.

Центральной теоремой теории матричных игр в чистых стратегиях является следующая теорема.

Теорема 1. (о связи седловой точки с ценой игры)

1. Пусть (i_0, j_0) — седловая точка матричной игры $Г_A$, тогда:

а) ее 1-я компонента является максиминной стратегией игрока 1;

б) ее 2-я компонента является является минимаксной стратегией игрока 2;

в) игра $Г_A$, имеет цену, причем исход в седловой точке совпадает с ценой игры, т.е. $a_{iojo} = v$.

2. Пусть игра $Г_A$ имеет цену v. Тогда любая ситуация, 1-я компонента которой есть максиминная стратегия игрока 1, и т.д.

3. Обратно, пусть игра $Г_A$ имеет цену v. Тогда любая ситуация, 1-я компонента которой есть максиминная стратегия игрока 1, а 2-я компонента которой есть минимаксная стратегия игрока 2, , — является седловой точкой игры $Г_{A.}$ Таким образом, необходимое и достаточное условие существования в матричной игре седловой точки – наличие цены игры.

Решить игру означает – найти цену игры и оптимальные стратегии игроков. При наличии седловой точки матричная игра имеет решение в чистых стратегиях, при этом оптимальной чистой стратегией игрока 1 является его максиминная стратегия, а оптимальной чистой стратегией игрока 2 является его минимаксная стратегия.

Игры без седловой точки. Смешанные стратегии

1) Хотя в любой матричной игре максиминная стратегия игрока 1 и минимаксная стратегия игрока 2 всегда существуют, их можно считать оптимальными только при наличии цены игры. Но не всякая матричная игра имеет цену.

Существует общий метод, который позволяет для всякой матричной игры обеспечить наличие в ней цены в некотором обобщенном смысле. Этот метод, состоящий в переходе к смешанным стратегиям, заключается в построении смешанного расширения матричной игры.

Нахождение решения матричной игры в смешанных стратегиях состоит в нахождении оптимальных смешанных стратегий игроков и цены игры. При этом согласно теореме 1 существование решения матричной игры в смешанных стратегиях эквивалентно совпадению нижней и верхней цены, т.е. существованию цены игры в смешанных стратегиях. Для матричной игры Γ_A это условие принимает вид равенства: $\min_y F_A(x^0, y) = \max_x F_A(x, y^0)$

2) Существование решения матричной игры обеспечивает основная теорема теории матричных игр в смешанных стратегиях – теорема фон Неймана.

Определение 2. *Смешанная стратегия x = $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для игрока 1 – это вероятностный вектор применения чистых стратегий 1, 2, …, n с соответствующими вероятностями $x_1, x_2, \dots, x_n$, где $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, $x_i \geq 0$.*

Смешанная стратегия y = $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ для игрока 2 – вероятностный вектор применения чистых стратегий 1, 2, …, m с вероятностями $y_1, y_2, \dots, y_m$, где $\sum_{j=1}^{m} y_j = 1$, $y_j \geq 0$.

Теорема 2.

1) Для матричной игры с платёжной матрицей A величины

$$\max_x \min_y F_A(x, y) \text{ и } \min_y \max_x F_A(x, y)$$

существуют и равны между собой.

2)Более того, существует, по крайней мере, одна ситуация в смешанных стратегиях (x^0, y^0), для которой выполняется соотношение:

$$\min_y F_A(x^0, y) = \max_x F_A(x, y^0) = F_A(x^o, y^o) = v_A$$

Число v_A называется ценой игры в смешанных стратегиях.

Из теоремы фон Неймана следует, что всякая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях

Графоаналитический метод решения матричной игр. С помощью графоаналитического метода можно находить решение матричной игры, где один из игроков имеет две чистые стратегии.

Пример 1.5. Рассмотрим матричную игру с платежной матрицей 2x3.

i/j	**1**	**2**	**3**
1	1	3	10
2	9	4	2

Игра не имеет седловой точки и не имеет решения в чистых стратегиях.

Будем искать решение игры в смешанных стратегиях. В данной игре игрок 1 имеем две чистых стратегии, игрок 2 – три чистых стратегии, поэтому

$x = (x_1, x_2)$ – оптимальная смешанная стратегия 1-го игрока

$y = (y_1, y_2, y_3)$ – оптимальная смешанная стратегия 2-го игрока

Так как платежная матрица имеет размерность 2x3, будем решать игру графоаналитическим методом. Для игрока 1: $x_2 = 1 – x_1$

В декартовой системе координат на отрезке [0, 1] построим графики прямых (рис. 1):

$F_1 = x + 9(1 – x) = x + 9 – 9x = –8x + 9$

$F_2 = 3x + 4(1 – x) = 3x + 4 – 4x = –x + 4$

$F_3 = 10x + 2(1 – x) = 10x + 2 – 2x = 8x + 2$

Определим нижнюю огибающую прямых и ее верхнюю точку M. Находим по графику примерно $x_1 = x_M \approx 0,2$, $v = x_M \approx 3,8$. Точка M лежит на пересечении прямых F_3 и F_2.

Для нахождения точного решения переходим к игре (2x2), в платежной матрице оставляем столбцы 2 и 3. Получим платежную матрицу:

3	10
4	2

Воспользуемся аналитическими формулами. Для игры 2×2 оптимальная смешанная стратегия 1-го игрока находится по формулам:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}$$

$x_2 = 1 - x_1$

Оптимальная смешанная стратегия 2-го игрока ищется по формулам (1.9):

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}$$

$y_2 = 1 - y_1$

Цена игры определяется по формуле (1.8):

$$v_A = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}$$

Таким образом, получаем

оптимальная смешанная стратегия игрока 1 x^o = , т.е. для получения выигрыша, не меньшего цены игры, игрок 1 должен использовать свою 1-ю стратегию с вероятностью 2/9, а 2-ю с вероятностью 7/9;

оптимальная смешанная стратегия игрока 2 y^o = , т.е. для получения проигрыша, не большего цены игры, игрок 2 должен не использовать свои 1-ю стратегию, и использовать свою 2-ю с вероятностью 8/9, и 3-ю с вероятностью 1/9.

Графоаналитический способ применим также к играм, в которых второй игрок имеет ровно две чистые стратегии (т.е. к играм формата nх2). В этом случае игра задается платежной матрицей А размерности nх2

Биматричные игры

Определение 2.2. Пусть задана биматричная игра $\Gamma_{(A,B)}$ Смешанной стратегией игрока 1 называется вероятностный вектор $p = (p_1, \dots, p_n)$, где $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Определение 2.3. В биматричной игре смешанной стратегией игрока 2 называется вероятностный вектор $q = (q_1, \dots, q_m)$, где $q_i \geq 0$, $\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$.

Определим средние выигрыши игроков 1 и 2 в ситуации (p,q) в смешанных стратегиях в виде математического ожидания соответствующих случайных величин:

$$H_1(p,q) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j, \; H_2(p,q) = \sum_{i,j} b_{ij} p_i q_j. \qquad (2.2)$$

Будем говорить, что пара смешанных стратегий игроков 1 и 2 $p = (p_1^0, \ldots, p_m^0)$ и $q = (q_1^0, \ldots, q_m^0)$. определяют равновесную ситуацию, если при любых $p \in S_m$ и $q \in S_n$ справедливы неравенства:

$$H_1(p,q^0) \le H_1(p^0,q^0), \; H_2(p^0,q) \le H_2(p^0,q^0). \qquad (2.3)$$

Неравенства (2.3) означают, что если игрок отклонится от равновесной ситуации (p^0, q^0), то его выигрыш может только уменьшиться.

В работе приведено доказательство основной теоремы для биматричных игр – теоремы Нэша.

Теорема 4. *(Дж. Нэш)***.** *Всякая биматричная игра имеет хотя бы одну равновесную ситуацию (точку равновесия) в смешанных стратегиях.*

Арбитражное решение Нэша для биматричной игры**.** Арбитражное решение биматричной игры строится в предположении, что игроки 1 и 2 объединяются в одну коалицию. Арбитражное решение Нэша представляет собой некоторую систему требований (аксиом), с помощью которых для любой игры выделяется ее единственное решение - оптимальный исход этой игры.

Математически арбитражное решение Нэша определяется как отображение Φ, которое каждой паре вида $(D_0\ (v_A;\ v_B))$ ставит в соответствие точку $(v_A;\ v_B) \in D$, причем отображение Φ удовлетворяет следующим аксиомам.

1. *Коллективная рациональность.* Если для $(u_A;\ u_B) \in D$ имеет место , то

Требование коллективной рациональности есть не что иное, как оптимальность исхода (u1; u2) по Парето.

2. *Индивидуальная рациональность.* $u_1^* \geq u_A, u_2^* \geq u_B$

Требование индивидуальной рациональности означает, что при оптимальном исходе каждый игрок должен получить не меньше, чем его максимальный гарантированный выигрыш (не меньше «своего» максимина, совпадающего с ценой соответствующей игры)

3. *Линейность.* Пусть область D' получается из D с помощью линейного преобразования вида $u_1' = \alpha_1 u_1 + \beta, u_2' = \alpha_2 u_2 + \beta$, где $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ Положим

$$v_A' = \alpha_1 v_A + \beta_1, \quad v_B' = \alpha_2 v_B + \beta_2.$$

Тогда

$$\Phi(D', (v_A'; v_B')) = (\alpha_1 u_1^* + \beta_1, \alpha_2 u_2^* + \beta_2).$$

Смысл аксиомы линейности состоит в том, что оптимальное решение не должно зависеть от выбора начала отсчета и масштаба измерения выигрышей игроков.

4. *Симметрия.* Если множество исходов D симметрично относительно биссектрисы I координатного угла $u_A = u_B$, то $u_1^* = u_2^*$.

Эта аксиома постулирует равноправие игроков.

5. *Независимость от посторонних альтернатив.* Пусть $D_1 \subseteq D$ и . Тогда $(D_1, (v_A;\ v_B)) = (D, (v_A;\ v_B))$

Эта аксиома требует, чтобы арбитражное решение для данного множества исходов являлось также арбитражным решением для любого своего подмножества, в которое оно попадает. Другими словами, добавление новых исходов не должно менять предпочтения старых.

Результат, доказанный Нэшем, состоит в следующем: отображение, удовлетворяющее аксиомам (1)-(5), существует и единственно.

В явном виде арбитражное решение Нэша для пары $(D, (v_A;\ v_B))$ это точка $(u_1^* = u_2^*) \in D$, для которой произведение

$(u_1^* - v_A)(u_2^* - v_B)$

достигает наибольшего значения в той части области D, которая выделяется

условием: $u_1 \geq v_A, u_2 \geq v_B$

Заключение. Математическая теория игр изучает математические модели принятия решений в условиях конфликта интересов.Такая математическая модель называется игрой. Простейший случай – когда в игре участвует два игрока – моделируется матричной или биматричной игрой. При этом матричная игра получается тогда, когда интересы игроков прямо противоположны, а биматричная игра это игра с непротивоположными интересами.

Основные типы решений игры – ситуации равновесия, которые в случае матричной игры превращаются в седловые точки. В работе показано, что эти решения в общем случае реализуются в смешанных стратегиях. Практически это означает, что для реализации принципа равновесия необходимо повторять игру много раз и использовать компоненты оптимальных смешанных стратегий как частоты.

Другой тип решения биматричной игры - арбитражное решение Нэша – возникает в биматричной игре, когда игроки объединяются в одну коалицию.

Список использованных источников

1. Воробьев Н. Н., Теория игр для экономистов - М.: «Наука», 1985. - 24 С

2. Розен В.В., Математические модели принятия решений в экономике - М.: Книжный дом «Университет», 2002. - 214 С.

3. Воробьев Н. Н., Основы теории игр - М.: «Высшая школа», 1984. - 45 С

4. Кремлев А.Г., Основные понятия теории игр - М.: Ленанд , 2002. - 17 С.

5. Авинаш Диксит, Сьюзан Скит, Дэвид Рейли-младший, Стратегические игры; пер. с англ. Н. Яцюк; [науч.ред. А. Минько]. — М.: Манн, Иванов и Фербер, 2017.С.

6. Мулен Э., Теория игр с примерами из математической экономики: Пер с франц.— М. Мир, 1985.— 200 С.

7. Данилов, В.И. Лекции по теории игр / В.И. Данилов. - 2014. - 277 с.

8. Хемди А. Таха Глава 14. Теория игр и принятия решений— 7-е изд. — М.: «Вильямс», 2007. — 549-594 с.