

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического обеспечения вычислительных
комплексов и информационных систем

**УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДВЕСА И
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ЕЕ РЕАЛИЗАЦИИ
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 4 курса 441 группы

направления 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование
информационных систем

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Роках Глеба Евгеньевича

Научный руководитель:

зав. кафедрой МОВКиИС,

д.ф.-м.н., профессор

Д.К. Андрейченко

Зав. кафедрой:

д.ф.-м.н., профессор

Д.К. Андрейченко

Саратов 2022

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Цилиндрический гидродинамический подвес является широко распространённым конструктивным элементом гидродинамических гироскопов и акселерометров, в частности нуля-индикатора скорости бокового сноса баллистических ракет. Гироскопы с цилиндрическим гидродинамическим подвесом используются в системах инерциальной навигации в датчиках угловых смещений и скоростей подвижных объектов управления. В математических моделях гидродинамических подвесов традиционно выполняется ряд упрощений уравнений гидродинамики, связанных с малостью относительной толщины поддерживающего слоя, однако обоснованность подобных упрощений требует дополнительного исследования.

С точки зрения теории управления гидродинамические подвесы и ряд других технических систем (большие космические конструкции, быстродействующие манипуляторы с упругими звеньями и т.д.) содержат объекты управления с сосредоточенными по пространству параметрами и динамически связанные с ними объекты управления с распределенными по пространству параметрами. Математическими моделями подобных систем служат комбинированные динамические системы (КДС), представляют собой связанные посредством граничных условий и условий связи системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях. Компьютерное моделирование динамики и устойчивости КДС характеризуется значительной трудоемкостью и требует привлечения параллельных вычислений, технологий параллельного программирования и разработки соответствующих параллельных алгоритмов.

Цель бакалаврской работы – моделирование выходных функций гидродинамического подвеса на основе уточненной нелинейной модели с помощью параллельных алгоритмов.

Поставленная цель определила **следующие задачи:**

- уточнение математической модели цилиндрического гидродинамического подвеса;
- моделирование устойчивости подвеса
- разработка последовательного и параллельного алгоритмов его компьютерного моделирования на основе проекционного метода Галеркина и «жестко устойчивых» методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений;
- численное моделирование выходных функций подвеса;
- исследование эффективности распараллеливания вычислений.

Теоретическая значимость бакалаврской работы состоит в оценке эффективности параллельной реализации алгоритмов моделирования гидродинамического подвеса.

Практическая значимость бакалаврской работы заключается в реализации уточненной нелинейной модели подвеса с использованием параллельных алгоритмов.

Структура и объём работы. Бакалаврская работа состоит из введения, трех разделов, заключения и списка использованных источников. Общий объем работы – 92 страниц, из них 62 страницы – основное содержание, включая 11 рисунков, цифровой носитель в качестве приложения, список использованных источников информации – 21 наименование.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел «Модель и методы математического моделирования цилиндрического гидродинамического подвеса» посвящен моделям гидродинамических подвесов [1, 2], которые применяются при проектировании космических конструкций, робототехнических систем и других типов управляемых деформируемых конструкций. Комбинированные динамические системы рассматриваются

как входо-выходные модели математической кибернетики. В [3] сформулированы и доказаны основные теоремы об устойчивости КДС. Поскольку динамика входящих в состав КДС объектов управления с распределенными по пространству параметрами моделируется на основе аппарата уравнений в частных производных при соответствующих начальных и граничных условиях, задачи компьютерного моделирования динамики и устойчивости КДС характеризуются значительной трудоемкостью и требуют привлечения технологий параллельных вычислений [4-7].

«Быстрый» алгоритм моделирования устойчивости использует оптимизацию шага изменения частоты, и его непосредственное распараллеливание проблематично, однако можно распараллелить вычисление границ области устойчивости, соответствующих различным значениям управляющих параметров. Численное моделирование переходных процессов в нелинейных КДС после дискретизации уравнений в частных производных по независимым пространственным переменным на основе проекционного метода Галёркина сводится в численному моделированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно большой размерности, которая является «жесткой» в терминологии [8, 9]. Вычисление правых частей данной системы обыкновенных дифференциальных уравнений эффективно распараллеливается. К ней применяется «жестко устойчивые» методы численного моделирования, при реализации которых наиболее трудоемкой операцией является вычисление матрицы Якоби правых частей обыкновенных дифференциальных уравнений. Как следует из [10] отдельные столбцы матрицы Якоби эффективно вычисляются на основе применения проекционного метода Галёркина к линеаризованным уравнениям возмущенного движения, и при этом независимо, т.е. параллельно.

Прямое численное моделирование переходных процессов в цилиндрическом гидродинамическом подвесе выполняется на основе

дискретизации по независимым пространственным переменным на основе проекционного метода Галёркина [8, 11].

Моделирование равновесного состояния выполняется на основе численного решения системы нелинейных уравнений.

Относительно набора величин

$$\mathbf{Y}^r = (y_1, y_2, \omega, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_{n0}, \text{Re}v_{\varphi_{ok}}, \text{Im}v_{\varphi_{ok}})^T, n = \overline{0, N_x}, \nu = \overline{1, N_x}, k = \overline{1, N_\varphi} \quad (1)$$

функция $\dot{F}: \check{Y} \times \check{Y}^{N_y} \rightarrow \check{Y}^{N_y}$ соответствует правым частям обыкновенных дифференциальных уравнений. Система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\dot{\mathbf{Y}}^r = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}^r) \quad (2)$$

Относительно набора величин $\dot{Y} \in \check{Y}^{N_y}, N_y = 6 + N_x(2N_\varphi + 1)$,
 $\dot{\mathbf{Y}} = (y_1, y_2, \omega, \varphi_1, \varphi_2, \nu_{\varphi_{n0}}, \text{Re}v_{\varphi_{ok}}, \text{Im}v_{\varphi_{ok}})^T, n = \overline{0, N_x}, \nu = \overline{1, N_x}, k = \overline{1, N_\varphi}$ данная система решается численно на основе метода Ньютона в варианте “метода доверительных областей”:

$$\mathbf{Y}_{k+1}^r = \mathbf{Y}_k^r + \Delta \mathbf{Y}_k^r, \Delta \mathbf{Y}_k^r = - \left[\frac{\partial \mathbf{F}^r(0, \mathbf{Y}_k^r)}{\partial \mathbf{Y}_k^r} \right]^{-1} \mathbf{F}^r(0, \mathbf{Y}_k^r), k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Поправки, связанные с методом доверительных областей, состоят в том, что при необходимости абсолютная величина шага метода Ньютона $\Delta \dot{\mathbf{Y}}_k$ уменьшается так, чтобы поверхности внешнего и внутреннего цилиндров не пересекались.

Реализация метода Ньютона (3) для численного моделирования равновесного состояния требует вычисления матрицы Якоби $\partial \dot{\mathbf{F}}(0, \dot{\mathbf{Y}}_k) / \partial \dot{\mathbf{Y}}_k$ правых частей ОДУ (2).

При этом необходимые затраты времени компьютерного моделирования связаны с вычислением матрицы Якоби. Вместе с тем, матрица Якоби $\partial \dot{\mathbf{F}}(0, \dot{\mathbf{Y}}_k) / \partial \dot{\mathbf{Y}}_k$ может быть вычислена с меньшей точностью, чем правые части $\dot{\mathbf{F}}(t, \dot{\mathbf{Y}}_k)$ обыкновенных дифференциальных уравнений (2).

Моделирование переходных процессов в подвесе занимает значительно большее время, чем моделирование его устойчивости, и в связи с этим был разработан соответствующий параллельный алгоритм. При численном моделировании переходных процессов наибольшее время занимает вычисление матрицы Якоби при реализации «жестко устойчивого» ФДН-метода применительно к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (2). Как следует из п. 1.4, столбцы матрицы Якоби могут быть вычислены независимо, т.е. параллельно. Далее, при вычислении правых частей обыкновенных дифференциальных уравнений (2) выполняется перемножение двумерных рядов Фурье-Чебышева, что также распараллеливается. Также при реализации ФДН-метода применяются параллельные методы решения системы линейных алгебраических уравнений из состава LAPACK.

Второй раздел «Моделирование устойчивости подвеса» посвящен подходам к оценке устойчивости в окрестности равновесного состояния. В уточненном алгоритме подстановка для представления реакции слоя вязкой жидкости на возмущенное движение приводит к системе линейных уравнений. Представлен критерий, позволяющий на основе характеристического квазимногочлена определить устойчивость подвеса.

Описан дискретный аналог линейной краевой задачи в задаче оценки устойчивости подвеса. При асимптотическом интегрировании аналогичных краевых задач в малых слагаемых второго и третьего порядка малости априорно отбрасывались малые поправки относительной величины β^2 , где β определяет относительный зазор в подвесе.

Безразмерное колебательное число Рейнольдса σ пропорционально угловой скорости вращения внешнего цилиндра, характеризующий нагруженность подвеса безразмерный параметр γ обратно пропорционален квадрату угловой скорости вращения внешнего цилиндра, следовательно, безразмерный параметр.

В результате при $\sigma \gg 1$ результаты асимптотического интегрирования уравнений равновесного состояния отличаются от аналогичных результатов,

лишь в малых слагаемых второго и третьего порядка малости, причем относительная величина разницы в данных слагаемых будет иметь достаточно малый порядок β^2 . Увеличение числа Рейнольдса σ приводит к убыванию относительного эксцентриситета \dot{y} и относительного скольжения внутреннего цилиндра ω .

При моделировании устойчивости наибольшее время занимает вычисление передаточных функций поддерживающего слоя в области низких и средних частот на основе численного решения системы линейных алгебраических уравнений, что реализуется параллельными версиями LAPACK. Вместе с тем, базисные функции проекционного метода были выбраны так, чтобы по возможности сократить размерность соответствующей системы линейных алгебраических уравнений. В силу этого, параллельный алгоритм моделирования устойчивости может быть менее эффективен, чем параллельный алгоритм моделирования переходных процессов.

Третий раздел «Программная реализация и тестирование параллельного алгоритма» посвящен средствам технологии OpenMP, необходимые для реализации параллельного алгоритма. Технология параллельного программирования OpenMP, основанная на многопоточности современных операционных систем, наиболее эффективна для симметричных мультипроцессорных систем с общей памятью (SMP-систем) [12]. Рассмотренные директивы применены при реализации параллельного алгоритма моделирования подвеса.

В проекте созданы следующие классы: класс гидродинамического подвеса, реализующий операции над математическими рядами, расчет матрицы Якоби, реализующий часть расчетов для низкочастотной области колебаний подвеса.

Для удобного дальнейшего использования и разработки проект реализован как библиотека. Для демонстрации работы в решении используется консольное приложение. Для сохранения расчетов было создано приложение Windows Forms на языке C# и класс оболочка над классом CylHanger для вывода результатов расчетов в таблицы Microsoft Excel.

Компьютерное моделирование выполнялось на компьютере с процессором i7-1065G7 x4, с объемом оперативной памяти 64 Гб. Рассмотрены результаты вычислительного эксперимента, осуществленного для предложенной модели. Для представленных экспериментов выбраны различные значения колебательного числа Рейнольдса σ . Целью эксперимента было определить границы области устойчивости подвеса.

Как видно из представленных результатов, подвес переходит из одного равновесного состояния в другое.

Гироскопические приборы с цилиндрическим гидродинамическим подвесом используются на подвижных объектах, которые испытывают значительные перегрузки порядка нескольких десятков ускорений свободного падения, что приводит к необходимости увеличивать колебательное число Рейнольдса σ . Как видно из представленных результатов, смещения подвеса из центрального положения значительные (порядка 0.4), однако подвес переходит из одного равновесного состояния в другое.

Как видно из представленных результатов, выходные функции уточненной нелинейной модели подвеса достаточно быстро стабилизируются в окрестности нового равновесного состояния. Т.е. даже при полном учете нелинейных эффектов, подвес обладает значительным запасом устойчивости. Следовательно, данный элемент может эффективно применяться в высокоперегрузочных гироскопах и акселерометрах.

Рассмотрены вычислительные эксперименты, реализующие моделирование подвеса при распараллеливании алгоритмов. Моделирование переходных процессов в нелинейной КДС занимает существенно большее время, чем моделирование устойчивости КДС по линеаризованной модели. Более эффективное распараллеливание вычислений с ускорением вычислительного процесса примерно в 3 объясняется тем, что даже после оптимизации алгоритма отдельные столбцы матрицы Якоби правых частей обыкновенных дифференциальных уравнений (2) вычисляются независимо, т.е. параллельно. Также распараллеливается (но менее эффективно) относительно трудоемкая

операция перемножения двойных рядов Фурье-Чебышева при вычислении правых частей обыкновенных дифференциальных уравнений (2).

Увеличение колебательного числа Рейнольдса уменьшает скорость затухания малоамплитудных высокочастотных компонент искомого решения, что увеличивает время работы «жестко устойчивого» ФДН-метода. Однако это не препятствует распараллеливанию вычислений.

Отметим, что при изменении основных параметров модели эффективность распараллеливания существенно не меняется.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе рассмотрена задача устойчивости цилиндрического тела в цилиндрическом гидродинамическом подвесе, актуальная для ряда технических систем. Для численного исследования подобных систем предложены специальные модели.

Численное моделирование начально-краевых задач с подвижной границей для уравнений в частных производных эффективно реализуется при помощи дискретизации проекционным методом Галеркина по «деформированным» пространственным переменным. Матрица Якоби правых частей полученных в результате «жестких» обыкновенных дифференциальных уравнений эффективно вычисляется применением проекционного метода Галеркина к линеаризованным уравнениям возмущенного движения.

Уточнение математической модели приводит к несколько более широким областям устойчивости и к ощутимо меньшим характерным смещениям подвеса из центрального положения.

Трудоемкие задачи компьютерного моделирования для систем с двумерными и трехмерными объектами управления с распределенными по пространству параметрами эффективно реализуются на основе данного параллельного алгоритма. Наиболее трудоемкая операция вычисления столбцов матрицы Якоби выполняется параллельно.

Для нелинейных моделей время моделирования резко увеличивается, и подход на основе модифицированного расчета якобиана позволяет значительно повысить эффективность алгоритма с точки зрения временных затрат. Рассмотренный подход к построению модели гидродинамического подвеса продемонстрировал также значительное уменьшение времени моделирования при распараллеливании процессов.

Компьютерное моделирование на основе уточненной модели подтверждает значительный запас устойчивости гидродинамического подвеса и эффективность его применения в высокоперегрузочных гироскопах и акселерометрах.

Дальнейшее направление работы может быть связано с расширением функциональных возможностей разработанного приложения путем как добавления модифицированных методов моделирования, так и методов сравнения результатов вычислительных экспериментов.

Отдельные части бакалаврской работы были представлены на студенческой научной конференции факультета компьютерных наук и информационных технологий (г. Саратов, СГУ имени Н.Г.Чернышевского, 29 апреля 2022 г.).

Основные источники информации

1. Андрейченко, К.П. Динамика поплавокных гироскопов и акселерометров. – М.: Машиностроение, 1987. – 128 с.
2. Ротач, В. Я. Теория автоматического управления. / В. Я. Ротач. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательский дом МЭИ, 2008. – 396 с.
3. Андрейченко, Д.К., Андрейченко К.П. К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2000. –№ 3. –С. 54-69.
4. Гергель, В.П. Высокопроизводительные вычисления дл многоядерных многопроцессорных систем. Учебное пособие. – Нижний Новгород: ННГУ им. Н.И.Лобачевского, 2010.

5. Теория и практика параллельных вычислений: учебное пособие / В.П. Гергель. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2016. – 423 с.
6. Эндрюс, Г.Р. Основы многопоточного, параллельного и распределённого программирования. / Г.Р. Эндрюс; под ред. А. Б. Ставровского. – М.: Вильямс, 2003. –505 с.
7. Батраева, И.А., Андрейченко, Д.К., Наркайтис, Г.Г., Ерофтиев, А.А., Портенко, М.С., Шахрай, Д.А., Мельничук, Д.В., Афанасьев, Г.М. Энергоэффективные кластерные и облачные вычисления и технологии //Харьков: Национальный аэрокосмический университет имени Н.Е. Жуковского «ХАИ». – 2016. – 199 с.
8. Флетчер, К. Численные методы на основе метода Галеркина. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
9. Хайрер, Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. – 685 с.
10. Андрейченко, Д.К. Моделирование, анализ и синтез комбинированных динамических систем. Учебное пособие / Д.К. Андрейченко, К.П. Андрейченко. – Саратов: ООО «Издательский Дом «Райт-Экспо», 2013. – 144 с.
11. Андрейченко, Д.К., Андрейченко, К.П., Мельничук, Д.В. Быстрый алгоритм моделирования переходных процессов в комбинированных динамических системах // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 19-й междунар. Сарат. Зимней школы. – Саратов: ООО Издательство «Научная книга», 2018. – С. 31-34.
12. OpenMP Application Program Interface. Version 5.2 – November 2021. [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.openmp.org/wp-content/uploads/OpenMP-API-Specification-5-2.pdf> (дата обращения 07.03.2022).