

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического анализа

Кривизна Левнера

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы
направления 02.04.01 - **Математика и компьютерные науки**

механико-математического факультета

Перевозникова Михаила Михайловича

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н., доцент

должность, уч. степень, уч. звание

Е.В.Разумовская

подпись, дата

инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

и.о.зав.кафедрой, к.ф.-м.н., доцент

должность, уч. степень, уч. звание

Е.В.Разумовская

подпись, дата

инициалы, фамилия

Саратов 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ВВЕДЕНИЕ	3
1 Кривизна Левнера	5
1.1 Хордовое уравнение Левнера	5
1.2 Кривизна Левнера.....	9
1.3 Семейство самоподобных кривых	10
1.4 Вычисление кривизны Левнера.....	16
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	18
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	19

ВВЕДЕНИЕ

Выпускная квалификационная работа посвящена рассмотрению величины, называемой кривизной Левнера.

Известно, что кривые постоянной геодезической кривизны порождают интересное явление. А именно, если геодезическая кривизна (которая может быть просто определена в точке 0 в гиперболическом единичном круге как половина евклидовой кривизны, а затем в произвольных точках посредством изометрии) не превосходит 1 , то кривая автоматически становится простой кривой, которая стремится к границе D , тогда как кривые постоянной кривизны больше 1 представляют собой окружности в D , поэтому не стремятся к границе.

Аналогичный «фазовый переход» происходит в теории Лёвнера: в рамках хордового уравнения Лёвнера в верхней полуплоскости, если кривая γ имеет управляющую функцию λ , которая принадлежит $Lip \frac{1}{2}$ с нормой $\|\lambda\|_{\frac{1}{2}} < 4$, тогда γ - простая кривая, и если $\|\lambda\|_{1/2} \geq 4$, то кривая может иметь самопересечения, см. [6] и [15] .

Целью выпускной квалификационной работы является изучение кривизны Левнера и ее свойств и приложений.

Задачами выпускной квалификационной работы являются:

1) Учитывая, что процесс Левнера порождается кривой, определить условия, которые необходимо наложить на управляющую функцию λ , чтобы точно сказать, что эта кривая простая.

2) Определить свойства управляющей функции для данного процесса, чтобы происходила генерация кривой.

3) Определить величину, называемую кривизной Левнера, и установить некоторые из ее свойств, особенно в отношении "фазового перехода".

4) Привести программную реализацию на языке Python набора конкретных кривизн с заданными параметрами и свойствами.

В первой части работы рассматривается хордовое уравнение Левнера. В ней изложены новые условия для управляющей функции хордового уравнения Левнера, из которых следует, что алгоритм генерируется простой кривой.

Первая часть работы основана на статье [19]. Основным результатом исследования является тот факт, что если $\lambda \in Lip(\frac{1}{2})$ с нормой $C < 4$ на $[0, T]$, то

1) если

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \frac{\lambda(T) - \lambda(t)}{\sqrt{T - t}} = k < 4,$$

то процесс порождается простой кривой $\gamma : [0, T] \rightarrow \overline{H}$, где $\gamma(T) \in H$.

2) если

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \frac{\lambda(T) - \lambda(t)}{\sqrt{T - t}} = k > 4,$$

то процесс порождается кривой $\gamma : [0, T] \rightarrow \overline{H}$, где $\gamma(T) \in R$ или $\gamma(T) \in \gamma([0, T])$.

Этот результат позволил улучшить исследования, проведенные Линд, Маршалом и Родэ, продемонстрировавшие процессы Левнера, которые не порождаются кривой, и исследовали достаточные условия на функцию, которая подразумевает, что алгоритм формируется благодаря кривой. Кроме того, в главе приведено уравнение Левнера с управляющей функцией cW_b где c - положительная постоянная, а W_b - функция Вейерштрасса, определяющаяся по формуле

$$W_b(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(b^n t)}{\sqrt{b^n}}.$$

А так же доказаны основные свойства и утверждения.

Во второй части работы дано определение кривизны Левнера и ее связь с семейством самоподобных кривых. Были вычислены кривизны Левнера для конкретных случаев и приведены ее характеристики, в зависимости от начальных значений. Основным материалом являлась статья [21].

В главе так же был рассмотрен вопрос существования кривой с заданной кривизной, и благодаря приведенным теоремам, результат был расширен приведенным принципом сравнения.

Во второй главе так же приведены результаты компьютерного моделирования конкретного вычисления кривизны Левнера с определенным набором параметров.

В заключении приведены основные результаты и выводы по работе.

Результат данной выпускной квалификационной работы был изложен на семинаре кафедры математического анализа.

1 Кривизна Левнера

1.1 Хордовое уравнение Левнера

Пусть H - верхняя полуплоскость $H : z = x + iy \in C; y > 0$.

Предположим сначала, что отображение $\gamma : [0, T] \rightarrow H$ непрерывно и инъективно, причем $\gamma(t) \in H$ при $t \in (0, T]$, $\gamma(0) = 0$. Обозначим $K_t = \gamma[0, t]$ и $H_t = H \setminus K_t$. Растущее замкнутое множество K_t называется оболочкой Лёвнера или "халлом". По теореме Римана, существует единственное конформное отображение $g_t : H_t \rightarrow H$, удовлетворяющее следующему условию разложения в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$g_t(z) = z + \frac{c(t)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad (1.1)$$

где $c(t) \in R_+$, и g_t может быть голоморфно расширено по принципу симметрии Шварца на $C \setminus K_t \cup s(K_t)$, где $s(z) = \bar{z}$.

Поскольку функция $t \mapsto c(t)$, называемая емкостью верхней полуплоскости, (или полуплоскостной емкостью) непрерывна и возрастает от 0 до ∞ , мы можем изменить параметризацию $\gamma(t)$ так, чтобы $c(t) = 2t$. Можно доказать, что предел $\lambda(t) = \lim_{z \in H_t, z \rightarrow \gamma(t)} g_t(z)$ существует и является вещественным в R . Более того, отображение $t \mapsto \lambda(t)$ непрерывно, а отображение $t \mapsto g_t(z)$ удовлетворяет следующему, так называемому хордовому уравнению Лёвнера:

$$\dot{g}_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \lambda(t)}, g_0(z) = z, z \in H. \quad (1.2)$$

Доказательство этих фактов можно найти в [10].

Функция λ называется управляющей функцией. Заметим, что $\lambda(0) = 0$, поскольку $g_0(z) = z$ — тождественное отображение.

Рассмотрим обратную задачу. Для непрерывной функции $\lambda : R_+ \rightarrow R$ по теореме Коши-Липшица для обыкновенных дифференциальных уравнений для произвольного начального значения $z_0 \in \bar{H}$ существует единственное решение (1.2), определенное на $[0, T_{z_0})$ и $\lim_{t \rightarrow T_{z_0}^-} g_t(z_0) = \lambda(T_{z_0})$ в случае $T_{z_0} < +\infty$. Будем говорить, что T_z - время захвата z . Определим его при $t \geq 0$,

$$K_t = \{z | T_z \leq t\},$$

так, что данное равенство будет выполняться, когда g_t для всех t будет являться отображением Римана $H_t = H \setminus K_t \rightarrow H$, удовлетворяя «гидродинамической» нормировке (1.1).

Пусть $K_t = \gamma([0, t])$, и пусть процесс порожден простой кривой γ . В более общем плане, мы скажем, что процесс Левнера, управляемый функцией λ , порождается кривой γ , если существует непрерывная функция $\gamma : R_+ \rightarrow \overline{H}$ с $\gamma(0) = 0$, не обязательно инъективная, такая что для всех $t \geq 0$, H_t является неограниченной связной компонентой $H \setminus K_t$.

Это справедливо почти наверное для алгоритмов SLE_k , которые были введены Одедом Шраммом [11] и которые представляют собой хордовые алгоритмы Лёвнера, управляемые λ , которая определяется как

$$\lambda(t) = \sqrt{k}B_t$$

где B_t - стандартное броуновское движение. Это теорема, предложенная Роде и Шраммом [10] для $k \neq 8$ и Лоулером, Шраммом и Вернером [4] для $k = 8$. Роде и Шрамм уточнили эту теорему, доказав, что SLE_k удовлетворяет следующим случаям:

1. Если $0 \leq k \leq 4$, то γ почти наверное инъективно.
2. Если $4 < k < 8$, то γ почти наверное непростое, но нигде не имеет плотный путь.
3. Если $8 \leq k$, то $\gamma(t)$ почти наверное является кривой в пространстве.

Маршалл и Роде [7] были первыми авторами, продемонстрировавшими процессы Лёвнера, которые не порождаются кривой, и исследовали достаточные условия на функцию, которая подразумевает, что алгоритм формируется благодаря кривой. Вместе совместно с Дж. Линдт [6] они показали, что если $1/2$ -Липшицева норма управляющей функции

$$\|\lambda\|_{\frac{1}{2}} = \sup \frac{|\lambda(y) - \lambda(x)|}{|y - x|^{\frac{1}{2}}}, x < y \in R_+$$

меньше 4, то процесс порождается простой кривой, и дали пример процесса Лёвнера, не порожденного кривой, удовлетворяющего

$$\|\lambda\|_{\frac{1}{2}} = 4.$$

Определение 1.1

Функция $\lambda : [0, T] \rightarrow R$ будет называться принадлежащей классу $Lip(\frac{1}{2})$ с нормой, не превышающей C , если существует такое $\delta \in (0, 1)$, что

$$|\lambda(t) - \lambda(t')| < C\sqrt{t' - t}, \forall 0 \leq t \leq t' < T$$

$$|t - t'| < \delta(T - t).$$

Позднее эти три автора обобщили этот результат в [5] следующим образом:

Теорема(LMR).

Пусть $\lambda \in Lip(\frac{1}{2})$ с нормой $C < 4$ на $[0, T]$, тогда

1) если

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \frac{\lambda(T) - \lambda(t)}{\sqrt{T - t}} = k < 4,$$

то процесс порождается простой кривой $\gamma : [0, T] \rightarrow \overline{H}$, где $\gamma(T) \in H$ (рис. 1.1).

2) если

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \frac{\lambda(T) - \lambda(t)}{\sqrt{T - t}} = k > 4,$$

то процесс порождается кривой $\gamma : [0, T] \rightarrow \overline{H}$, где $\gamma(T) \in R$ (рис. 1.2.1) или $\gamma(T) \in \gamma([0, T])$ (рис. 1.2.2).

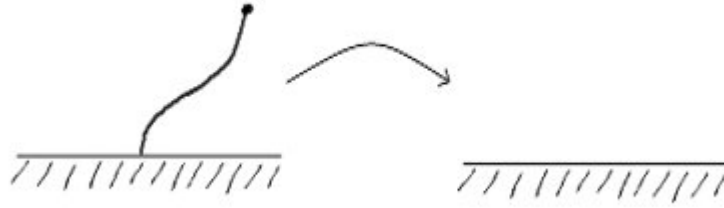


Рис. 1.1 Случай $\gamma(T) \in H$.

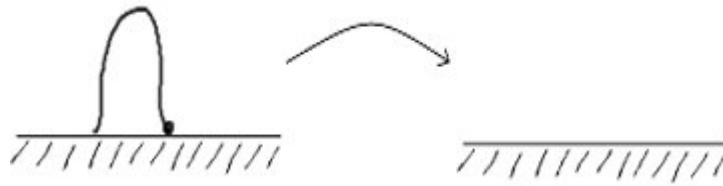


Рис. 1.2.1 Случай $\gamma(T) \in R$.

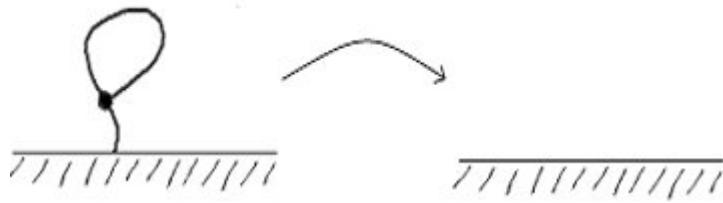


Рис. 1.2.2 Случай $\gamma(T) \in \gamma([0, T])$.

Актуальными являются две проблемы:

(P1): учитывая, что процесс Лёвнера порождается простой кривой, какое условие необходимо наложить на управляющую функцию λ , чтобы точно сказать, что эта кривая простая?

(P2): Какие свойства управляющей функции для данного процесса необходимы, чтобы происходила генерация простой кривой?

Ответ на первую проблему дает следующая теорема:

Теорема 1.1 Пусть $\lambda : [0, T] \rightarrow R$ - непрерывная функция, такая, что соответствующий процесс Левнера порождается кривой γ . Для $t > 0$ положим

$$a(t) = \lim_{s \rightarrow t^-} \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{\sqrt{t - s}}, b(t) = \overline{\lim}_{s \rightarrow t^-} \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{\sqrt{t - s}}.$$

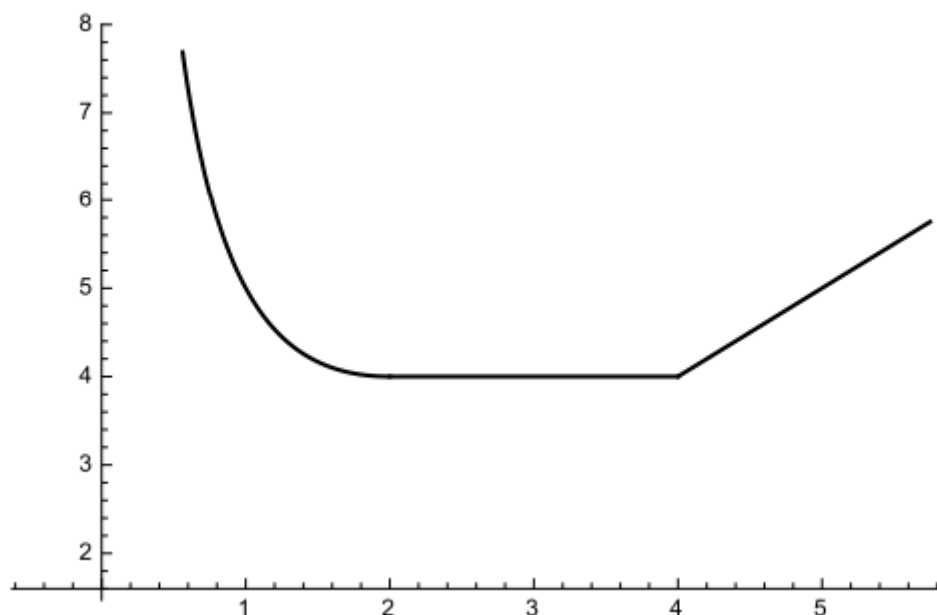


Рис. 1.3 График f

Если $b(t) < f(a(t)), \forall t \in (0, T]$, где

$$f(a) \begin{cases} 4, & 2 \leq a < 4 \\ a + 4/a, & 0 < a < 2 + \infty, \&a = 0 \end{cases}$$

тогда кривая γ простая, а график $f(a(t))$, представленный на Рис. 1.3 - оптимальная граница $b(t)$.

Эта теорема является обобщением [LMR], где рассматривается только случай $a(t) = b(t) < 4$

А так же, в первой части рассмотрено вещественное уравнение Левнера и уравнение Левнера с управляющей функцией Вейштрасса.

1.2 Кривизна Левнера.

Цель этого раздела - определить величину, которую назовем кривизной Левнера, и установить некоторые из ее свойств, особенно в отношении указанного выше явления. В этом разделе мы определим семейство кривых, которые мы называем самоподобными. Они основаны на принципе Шрамма и будут использоваться в качестве кривых сравнения. Это наши кривые постоянной кривизны. Затем мы идентифицируем эти кривые с помощью дифференциального уравнения Лёвнера и получим, что это двухпараметрическое семейство кривых. Одномерный набор этих кривых изображен на Рис. 1.4.

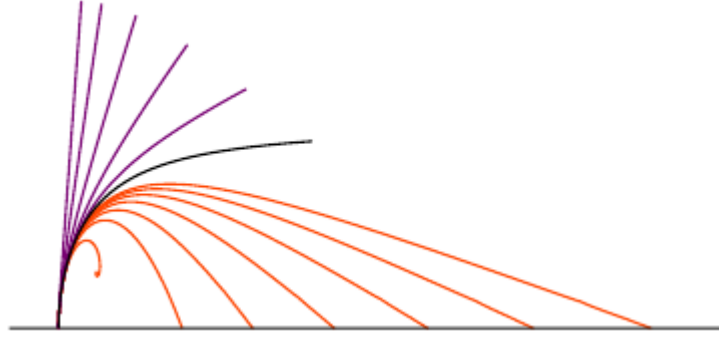


Рис. 1.4 Некоторые кривые постоянной кривизны Лёвнера.

В нашей нормализации фиолетовые кривые имеют отрицательную кривизну, черная кривая имеет бесконечную кривизну, а красные кривые имеют положительную кривизну.

Мы также вычислим первые члены разложения в ряд уравнения кривой γ в терминах первой и второй производных от управляющей функции Лёвнера, и покажем, что

$$\gamma(t) = 2i\sqrt{t} + at - i\frac{a^3}{8}t^{\frac{3}{2}} + bt^2 + o(t^2),$$

для t близких к 0, $a = \frac{2}{3}\lambda'(0)$ и $b = \frac{4}{15}\lambda''(0) + \frac{1}{135}\lambda'(0)^3$. Это позволит связать с каждой достаточной гладкой кривой наиболее подходящую кривую сравнения и приводит к формуле для кривизны Лёвнера

$$LC_\gamma(t) = \frac{\lambda'(t)^3}{\lambda''(t)}.$$

Отсюда получим, что γ - простая кривая, если $LC_\gamma(t) < 8$. Константа 8 является наилучшей из возможных и соответствует константе 4 в критерии $\|\lambda\|_{\frac{1}{2}} < 4$, для простых кривых Лёвнера. В конце устанавливается принцип сравнения, который показывает, что оценка кривизны Лёвнера означает, что кривая остается с одной стороны соответствующей кривой постоянной кривизны. В частности, кривизна Лёвнера может быть альтернативно определена путем геометрического сравнения с кривыми постоянной кривизны.

1.3 Семейство самоподобных кривых

В этом разделе представим семейство кривых, которые будем называть «самоподобными кривыми». В дальнейшем мы определим кривизну Лёвнера

для этих кривых как постоянную. Кривизна Лёвнера для произвольной кривой будет определяться формулой сравнения с этим семейством. Чтобы дать некоторую мотивацию для такого определения самоподобных кривых, сначала напомним принцип Шрамма, а затем сформулируем детерминистскую версию. Пусть Ω будет жордановой областью с двумя различными отмеченными граничными точками a и b . Для каждой тройки (Ω, a, b) , предположим, что существует семейство $\Gamma_{\Omega,a,b}$ простых кривых в $\bar{\Omega}$, начинающихся в a , с вероятностной мерой $\mu_{\Omega,a,b}$ на $\Gamma_{\Omega,a,b}$. (Примечание: это можно обобщить следующим образом : нам не нужны простые кривые, но мы должны потребовать, чтобы кривые не имели самопересечений.)

Говорят, что вероятностная мера μ_{Ω} удовлетворяет принципу Шрамма, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) Конформная инвариантность: если задано конформное отображение ϕ области Ω , то

$$\phi(\mu_{\Omega,a,b}) = \mu_{\phi(\Omega),\phi(a),\phi(b)}.$$

(Мера $\phi(\mu_{\Omega,a,b})$ на семействе кривых $\phi(\Gamma_{\Omega,a,b})$ является продолжением меры $(\mu_{\Omega,a,b})$).

2) Марковское свойство области: пусть $\gamma[0, t]$ - начальная часть кривой в $\Gamma_{\Omega,a,b}$. Пусть $\mu_{\Omega,a,b,\gamma|_{[0,t]}}$ - условная вероятностная мера для данного $\gamma[0, t]$. Тогда

$$\mu_{\Omega,a,b,\gamma|_{[0,t]}} = \mu_{\Omega \setminus \gamma[0,t], \gamma(t), b}$$

или, другими словами, для данной начальной части кривой $\gamma|_{[0,t]}$ условная мера такая же, как и мера на кривых, начинающихся в $\gamma(t)$ в области $\Omega \setminus \gamma[0, t]$.

Для $\gamma[0, t]$ определим G_t как множество всех конформных отображений $\phi_t : \Omega \setminus \gamma[0, t] \rightarrow \Omega$ с $\phi_t(\gamma(t)) = a$ и $\phi_t(b) = b$. Таким образом, если $\mu_{\Omega,a,b}$ удовлетворяют конформной инвариантности и марковскому свойству области, то

$$\phi_t(\mu_{\Omega,a,b,\gamma|_{[0,t]}}) = \mu_{\Omega,a,b}$$

или любой $\phi_t \in G_t$. Это означает, что мера инвариантна при «отображении вниз» начальной части кривой.

Это приводит нас к детерминированному принципу Шрамма, то есть детерминированной аксиоме, которая будет характеризовать важное семейство кривых. Нас будут интересовать кривые в области, которые начинаются в одной из двух отмеченных граничных точек. Введем обозначения:

Определение 1.2

Для жордановой области Ω с различными граничными точками и заданным $T \in (0, \infty]$ обозначение $\gamma : (0, T) \rightarrow (\Omega, a, b)$ означает, что $\gamma[0, T)$ - простая (детерминированная) кривая с $\gamma(0, T) \subset \Omega$ и $\gamma(0) = a$.

Для простоты обозначений мы часто будем писать просто γ вместо $\gamma(0, T)$, для образа открытого временного интервала. Заметим, что $\gamma(T)$ можно определить, и в этом случае возможно, что $\gamma(T) \in d\Omega$ или $\gamma(T) \in \gamma(0, T)$.

Мы хотим ввести кривые, которые удовлетворяют следующему свойству самоподобия:

Определение 1.3

Кривая $\gamma : (0, T) \rightarrow (\Omega, a, b)$ самоподобна, если $\gamma \in C^3$ и если для каждого $t \in (0, T)$ существует конформное отображение $\phi \in G_t S$, так что

$$\phi_t(\gamma(t, T)) = \gamma.$$

Через $S(\Omega, a, b)$ обозначим семейство самоподобных кривых в отмеченной области (Ω, a, b) .

Другими словами, самоподобные кривые инвариантны при «отображении вниз» любой начальной части кривой, по модулю конформной перенормировки. Семейство самоподобных кривых мы определим позже.

Если мы знаем $S(\Omega_0, a_0, b_0)$ для одной фиксированной тройки (Ω_0, a_0, b_0) , то мы можем получить $S(\Omega, a, b)$ через конформное отображение $\psi : \Omega_0 \rightarrow \Omega$ с $\psi(a_0) = a$ и $\psi(b_0) = b$. То есть

$$S(\Omega, a, b) = \{\psi \circ \gamma : \gamma \in S(\Omega_0, a_0, b_0)\}.$$

Следующая теорема дает описание всех самоподобных кривых.

Теорема 1.2

Предположим, что $\gamma : (0, T) \rightarrow (H, 0, \infty)$ имеет управляющую функцию $\lambda(t)$. Тогда $\gamma \in S(H, 0, \infty)$ тогда и только тогда, когда $\lambda(t)$ является одной из следующих управляющих функций:

$$0, ct, c\sqrt{\tau} - c\sqrt{\tau - t}, c\sqrt{\tau + t} - c\sqrt{\tau} \quad (1.1)$$

где $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\tau > 0$. Далее λ полностью определяется двумя действительными параметрами $\lambda'(0)$ и $\lambda''(0)$.

Опишем подробно одну из кривых, порождаемых управляющими функциями, перечисленными в (1.1). Все эти кривые являются частными случаями интегрирования уравнения Левнера для частного вида управляющих функций.

Если $\lambda(t) = ct$, то γ будет масштабированной версией левой кривой (и отраженной вокруг мнимой оси, если $c < 0$). Эта кривая уходит в бесконечность, но остается в пределах ограниченного расстояния от вещественной оси:

$$\dot{g}_t = \frac{2}{g_t - ct}$$

Пусть $g_t - ct = h_t$. Тогда

$$\frac{dh_t}{dt} = \dot{g}_t - c = \frac{2}{h_t} - c = \frac{2 - ch_t}{h_t}.$$

Имеем

$$\frac{h_t}{2 - ch_t} dh_t = dt.$$

Так как

$$\begin{aligned} \int \frac{h_t}{2 - ch_t} dh_t &= \frac{1}{c} \int \left(\frac{2}{2 - ch_t} - 1 \right) dh_t = \\ &= -\frac{2}{c^2} \log(2 - ch_t) - \frac{1}{c} h_t, \end{aligned}$$

тогда интегрирование дает:

$$\begin{aligned} -\frac{g_t - ct}{c} - \frac{2}{c^2} \log(2 - cg_t + c^2 t) + \frac{z}{c} + \frac{2}{c^2} \log(2 - cz) &= t; \\ \frac{cz}{2} + \log(2 - cz) &= \frac{cg_t}{2} + \log(2 - cg_t + c^2 t). \end{aligned}$$

Для точек "халла" $z \in K_t$ выполняется

$$g_s(z) = \lambda(s) = cs \quad \forall s \in (0; t];$$

$$\frac{cz}{2} + \log(2 - cz) = \frac{c^2 t}{2} + \log 2$$

уравнение задает простую кривую

$$cz + 2\log(2 - cz) = c^2 t + 2 \log 2.$$

Пусть

$$2 - cz = r \cdot \exp(-i\varphi)$$

$$2 - r \cdot \cos(\varphi) + ir \cdot \sin(\varphi) + 2 \log r - 2i\varphi = c^2 t + 2 \log 2$$

Приравниваем действительную и мнимую части:

$$2 \log r - r \cos \varphi = c^2 t + 2 \log 2$$

$$r = \frac{2\varphi}{\sin \varphi}$$

Подставляем второе уравнение в первое, видим, что φ монотонно возрастает по t от $\varphi(0) = 0$ до $\varphi(\infty) = \pi$.

В терминах φ , "халл" задается уравнением

$$z = \frac{2}{c} - \frac{2\varphi}{c} \operatorname{ctg} \varphi + i \frac{2}{c} \varphi.$$

На Рис.1.5 представлен график "халла" для $c = -2, -1, 1, 2$ для $\varphi \in (0, \pi)$.

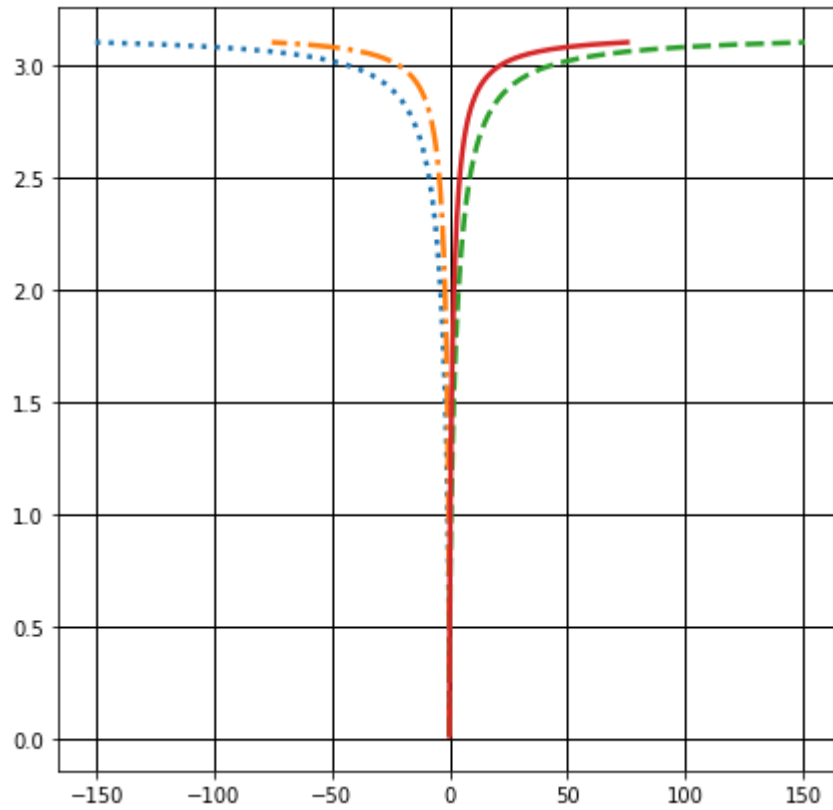


Рис.1.5 График "халла" для $c = -2, -1, 1, 2$.

1.4 Вычисление кривизны Левнера

Теперь мы готовы дать определение кривизны Лёвнера, обозначенное $LC_\gamma(t)$. Начнем с задания постоянной кривизны Левнера для $\gamma \in S(H, 0, \infty)$ следующим образом:

Определение 1.3 Пусть $\gamma \in S(H, 0, \infty)$. Тогда LC_γ , кривизна Лёвнера кривой γ , определяется как следующая постоянная:

1. Если γ порождается 0, то $LC_\gamma \equiv 0$.
2. Если γ порождается с помощью ct , то $LC_\gamma \equiv \infty$.
3. Если γ порождается $c\sqrt{\tau} - c\sqrt{\tau - t}$, то $LC_\gamma \equiv \frac{c^2}{2}$.
4. Если γ порождается $c\sqrt{\tau + t} - c\sqrt{\tau}$, то $LC_\gamma \equiv -\frac{c^2}{2}$.

Отметим, что для $\gamma \in S(H, 0, \infty)$ кривизна Лёвнера масштабно инвариантна по определению. Для автомодельных кривых $\gamma \in S(\Omega, a, b)$ определено, что $LC_\gamma(t)$ удовлетворяет конформному инвариантнтту. Для кривой $\gamma : (0, T) \rightarrow (\Omega, a, b)$, такой, что $\gamma \in C^3$, мы определяем $LC_{\gamma(t)}$ путем сравнения с кривыми постоянной кривизны следующим образом:

Определение 1.4

Пусть $\gamma : (0, T) \rightarrow (\Omega, a, b)$ принадлежит C^3 . Кривизна Лёвнера γ в точке $\gamma(t)$, обозначенная $LC_\gamma(t)$, определяется как LC_{γ_*} , где $\gamma_* \in S(\Omega \setminus \gamma(0, t], \gamma(t), b)$ - единственная кривая, наилучшим образом подходящая для $\gamma(t, T)$ при $\gamma(t)$.

Предложение 1.1. Пусть $\gamma : (0, T) \rightarrow (H, 0, \infty)$ - кривая класса C^3 , параметризованная емкостью полуплоскости, а λ - соответствующая управляющая функция. Тогда $\forall t \in (0, T)$,

$$LC_\gamma(t) = \frac{\lambda'(t)^3}{\lambda''(t)}. \quad (1.6)$$

Поскольку $LC_\gamma(t) = 0$ именно тогда, когда $\lambda'(t) = 0$, если правая часть (1.6) имеет неопределенную форму $\frac{0}{0}$, мы объявляем его равным 0.

Следующая теорема говорит, что если кривизна мала, то γ не может "кривить" так, чтобы самопересечь себя или границу (кроме отмеченной точки b).

Теорема 1.6

Пусть $\gamma : (0, T) \rightarrow (\Omega, a, b) \in C^3$. Если $LC_\gamma(t) < 8$ для всех $t \in (0, T)$, то $\gamma(0, T]$ - простая кривая в $\Omega \cup \{b\}$.

Константа 8 является наилучшей из возможных, как показывает кривая в случае 3 из Определения 1.3 с $c = 4$.

В главе так же рассмотрено существование кривой с заданной кривизной Левнера и принцип сравнения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения работы были изучены плоские случаи применения уравнения Левнера, приведены его основные определения, рассмотрены примеры. Детально изучена одна из главных характеристик уравнения Левнера - кривизна Левнера.

Основное внимание было сосредоточено на кривизне Левнера. Была рассмотрена оригинальная теория кривизны уравнения Левнера - одна из теорий, основанная на принципе Шрамма. Было идентифицировано семейство самоподобных кривых, с помощью дифференциального уравнения Левнера и получено, что это двухпараметрическое семейство кривых.

Была рассмотрена главная функция хордового уравнения Левнера $\lambda : [0, +\infty) \rightarrow R$.

Рассмотрен вопрос существования кривой с заданной кривизной, и благодаря приведенным теоремам, результат был расширен приведенным принципом сравнения.

Был реализован код на языке Python, реализующий вычисления конкретных кривизн Левнера с определенным набором параметров.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Gavin, A. G. The Loewner equation and Weierstrass function / A. G. Gavin. -2017.
- 2 Godefroy, H.H. Weierstrass's non-differentiable function / H.H.Godefroy.- Transactions of the American Mathematical Society, 1916. - P. 301–325.
- 3 Lawler, F G. Conformally invariant processes in the plane / F G. Lawler. - American Mathematical Soc., Number 114, 2008.
- 4 Lawler, F.G., Schramm, O., Werner W. Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees /F.G.Lawler , O. Schramm, W. Werner. - Selected Works of Oded Schramm, 2011. -P. 931–987.
- 5 Lind, R J., Marshall, E D., Rohde, S. Collisions and spirals of Loewner traces / R J. Lind, E D. Marshall, S. Rohde. - Duke Mathematical Journal, 2010. -P. 527–573.
- 6 Lind, R J. A sharp condition for the Loewner equation to generate slits / R J. Lind. - Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A1: Mathematica, volume 30, 2005. -P.143–158.
- 7 Marshall, E D., Rohde S. The Loewner differential equation and slit mappings/E D. Marshall, S. Rohde. - Journal of the American Mathematical Society, 2005. - P. 763–778.
- 8 Pommerenke, Ch. On the Loewner differential equation / Ch. Pommerenke. - The Michigan Mathematical Journal, 1966. - P. 435–443.
- 9 Pommerenke, Ch. Boundary behaviour of conformal maps / Ch. Pommerenke. - Springer Science & Business Media, 2013.
- 10 Rohde, S., Schramm, O. Basic properties of SLE / S. Rohde,O. Schramm. - In Selected Works of Oded Schramm, 2011. -P. 989–1030.

- 11 Schramm, O. Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees / O. Schramm. - Israel Journal of Mathematics, 2000. - P. 221–288.
- 12 Lawler, G. Conformally invariant processes in the plane / G. Lawler. - Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- 13 Schur, A. Über die Schwarz'sche Extremaleigenschaft des Kreises unter den Kurven konstanter Krümmung / A. Schur. - Math. 1921. - P. 143–148.
- 14 Fernandez, J.L., Granados A. On geodesic curvature and conformal mapping / J.L. Fernandez, A. Granados. - St. Petersburg Math. J. 9, 1998. - P. 615–637.
- 15 Rohde, S., Tran, H., Zinsmeister, H. The Loewner equation and Lipschitz graphs / S. Rohde, H. Tran, H. Zinsmeister. - preprint.
- 16 Kager, W., Nienhuis B., Kadanoff, L. Exact solutions for Loewner Evolutions / W. Kager, B. Nienhuis, L. Kadanoff. - J. Statist. Phys, 2004. - P. 805–822.
- 17 Earle, C., Epstein, A. Quasiconformal variation of slit domains / C. Earle, A. Epstein. - Proc. Amer. Math. Soc, 2001. - P. 3363–3372.
- 18 Marshall, E D. Derivation of Chordal Loewner from Radial Loewner / E D. Marshall, - preprint.
- 19 Zhang, H., Zinsmeister M. Local Analysis of Loewner Equation / H. Zhang, M. Zinsmeister. - School of Mathematical Sciences, Fudan University, 2018. - P. 3 - 29.
- 20 Lind, J. A sharp condition for the Loewner equation to generate slits / J. Lind. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Math, 2005. - P. 143–158.
- 21 Прохоров, Д. В., Захаров, А. М. Интегрируемость частного вида уравнения Лёвнера // Д. В. Прохоров, А. М. Захаров. - Известия Саратовского университета, Серия : Математика. Механика. Информатика, Т. 10, вып. 2, УДК: 517.54, 2010. - С. 19-23.