МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Компьютерной алгебры и теории чисел

Аналог теоремы Пуанкаре для толерантных пространств

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы

направление 02.04.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Дубяги Максима Павловича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. ________ Е. В. Коробченко

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент ________ А. М. Водолазов

Саратов 2022

Введение. Выпускная квалификационная работа посвящена рассмотрению аналога теоремы Пуанкаре для толерантных пространств.

Актуальность темы исследования. Методы гомологической алгебры уже давно и успешно применяются при изучении самых разнообразных математических объектов алгебраической, геометрической и аналитической природы. В последние десятилетия были разработаны несколько направлений, использующих категорную и алгебро-топологическую технику для изучения дискретных по своей природе объектов. В настоящее время наиболее развитым является направление, связанное с теорией толерантных пространств и гомологий отношений. Оно представлено в работах Доукера, Зимана, Мюира, Небалуева и других авторов.

Цели и задачи работы. Целью работы считается изучение узко специализированных направлений в области толерантных пространств.

Задачами работы является:

- Рассмотрение содержания ключевых понятий таких как толерантное пространство, толерантное отображение, толерантные гомотопии;

- На основании рассмотренных определений, свойств и примеров более подробно изучить аналог теоремы Пуанкаре для толерантных пространств.

Содержание работы. Работа состоит из введения, трех разделов, заключения и списка источников, содержащего 20 наименований. Объем работы составляет 60 страниц.

В первом разделе развивается теория категорий толерантных пространств, включая толерантный аналог категории гомотопических типов и построение фундаментальной группы толерантного пространства.

Второй раздел посвящен построению гомологического функтора толерантных пространств, используя стандартные методы комбинаторной топологии. Для определенных гомологий доказывается аксиома гомотопии для толерантных гомологий, позволяющая сводить вычисление гомологий сложных пространств к вычислению гомологий более простых пространств.

Третий раздел содержит основной результат магистерской работы - аналог теоремы Пуанкаре для толерантных пространств, группа одномерных гомологий линейно связного топологического пространства изоморфна фактор-группе фундаментальной группы по ее коммутанту.

Основное содержание работы

Определение 1. Толерантным пространством называется пара (X, τ), где X - некоторое множество, а $\tau \subset \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ - отношение толерантности на этом множестве, то есть рефлективное и симметричное бинарное отношение:

$$(\forall x \in \mathrm{X}) \ \ (x, x) \in \tau; \tag{1}$$

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathrm{X}) \ \ (x_1, x_2) \in \tau \ \Rightarrow \ (x_2, x_1) \in \tau. \tag{2}$$

В дальнейшем для краткости будем писать $x_1 \tau x_2$ вместо $(x_1, x_2) \in \tau$ [1].

Определение 2. Классом толерантности в толерантном пространстве (X, τ) называется максимальное по включению подмножество $\mathrm{L} \subset \mathrm{X}$, все элементы которого попарно толерантны, то есть

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathrm{L}) \ \ x_1 \tau x_2; \tag{3}$$

$$(\forall x \notin \mathrm{L})(\exists x' \in \mathrm{L}) \ \ (x, x') \notin \tau[2]. \tag{4}$$

Определение 3. Пусть (X, τ) - толерантное пространство. Толерантной звездой $\overline{x}$ с центром в точке $x \in \mathrm{X}$ назовем срез отношения τ через элемент x, то есть $\overline{x} = \tau < x >= \{y \in \mathrm{X} \mid y \tau x\}$ [3].

Определение 4. Ядром в толерантном пространстве (X, τ) называется любое подмножество $\mathrm{K} \subset \mathrm{X}$, состоящее из всех центров некоторой толерантной звезды: $(\exists x \in \mathrm{X}) \ \ \mathrm{K} = \{y \in \mathrm{X} \mid \overline{y} = \tau < y >= \tau < x >= \overline{x}\}$ [4].

Определение 5. Отношение эквивалентности ε_τ такое, что

$$x_1 \varepsilon_\tau x_2 \Longleftrightarrow \tau < x_1 >= \tau < x_2 >, \text{ где } \tau < x >= \{x' \in X | x' \tau x\},$$

называется ядерным и его классы $\varepsilon_\tau < x >$ называются ядрами толерантности и обозначаются $\check{x}$. Если классы толерантности интерпретируются как признаки, по которым устанавливается сходство (толерантность), то ядра — это все элементы, имеющие одинаковый набор признаков [5].

Определение 6. Толерантным отображением $f : \ (\mathrm{X}, \tau) \to (\mathrm{Y}, \theta)$ из толерантного пространства (X, τ) в пространство (Y, θ) называется отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) f согласовано с отношениями толерантности, то есть

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathrm{X}) \ \ x_1 \tau x_2 \Rightarrow f(x_1) \theta f(x_2); \tag{5}$$

б) f согласовано с ядерными отношениями эквивалентности, то есть

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathrm{X}) \ \ x_1 \varepsilon_\tau x_2 \Rightarrow f(x_1) \varepsilon_\theta f(x_2)[6]. \tag{6}$$

Определение 7. Толерантное пространство (X, τ) называется безъядерным, если все его ядра одноэлементные, то есть $\varepsilon_\tau < x >= \check{x} = \{x\}$ для всех $x \in \mathrm{X}$ [7].

Определение 8. Отображение $f : \ (\mathrm{X}, \tau) \to (\mathrm{Y}, \theta)$ назовем толерантным гомеоморфизмом одного толерантного пространства на другое, если f – биекция, и оба отображения f и f^{-1} – толерантные. В этом случае пространства (X, τ) и (Y, θ) будем называть толерантно гомеоморфными, и в знак этого записывать $(\mathrm{X}, \tau) \cong (\mathrm{Y}, \theta)$[8].

Определение 9. Два толерантных отображения $f_0, f_1 : (\mathrm{X}, \tau) \to (\mathrm{Y}, \theta)$ будем называть толерантно гомотопными относительно подмножества $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ и писать в знак этого $f_0 \sim f_1 \, (rel \, \mathrm{A})$, если существует такое натуральное число n и такое толерантное отображение $F : \ \mathrm{X} \times \mathrm{I}_n \to \mathrm{Y}$, что удовлетворяются следующие аксиомы:

а) $F(x, 0) = f_0(x), \ (\forall x \in \mathrm{X})$;

б) $F(x, 1) = f_1(x), \ (\forall x \in \mathrm{X})$;

в) $(\forall x \in \mathrm{A})(\forall k = \overline{0, n}) \ F(x, \frac{k}{n}) = f_0(x)$[9].

Предложение 1. Если для натурального n имеется толерантная гомотопия $F : \ \mathrm{X} \times \mathrm{I}_n \to \mathrm{Y}$ между толерантными отображениями $f_0, f_1 : \ \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ относительно $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$, то для любого натурального числа $m \geqslant n$ имеется также толерантная гомотопия $\overline{F} : \ \mathrm{X} \times \mathrm{I}_m \to \mathrm{Y}$ между f_0 и f_1 относительно A.

Теорема 1. Отношение толерантной гомотопии является абстрактным отношением эквивалентности.

Теорема 2. Композиция толерантно гомотопных отображений толерантно гомотопны. Более точно, пусть $f_0 \sim f_1(rel\,\mathrm{A})$– толерантно гомотопные отображения из (X, τ) в (Y, θ), и $g_0 \sim g_1(rel\ \mathrm{B}) :\ (\mathrm{Y}, \theta) \to (\mathrm{Z}, \varkappa)$, причем $f_1(\mathrm{A}) \subset \mathrm{B}$. Тогда $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1(rel\ \mathrm{A})$.

Определение 10. Толерантное отображение $f :\ (\mathrm{X}, \tau) \to (\mathrm{Y}, \theta)$ назовем толерантной гомотопической эквивалентностью, а сами пространства (X, τ) и (Y, θ) - толерантно гомотопически эквивалентными, или же пространствами одного гомотопического типа, если класс $[f]$ является эквивалентностью в категории $[\mathbf{T}]$ толерантных гомотопических типов. Это означает, что существует толерантное отображение $g :\ (\mathrm{Y}, \theta) \to (\mathrm{X}, \tau)$ гомотопически обратное к f, то есть $[g] = [f]^{-1}$ в $[\mathbf{T}]$, или подробнее $[g] \circ [f] = [\mathbf{1}_\mathrm{X}]$ и $[f] \circ [g] = [\mathbf{1}_\mathrm{Y}]$, что в свою очередь эквивалентно $g \circ f \sim \mathbf{1}_\mathrm{X}$ и $f \circ g \sim \mathbf{1}_\mathrm{Y}$ [10].

Следующее предложение содержит простой но важный пример введенного понятия.

Предложение 2. Пространства (X, τ) и $(\check{\mathrm{X}}, \check{\tau})$ толерантно гомотопно эквивалентны.

Определение 11. Толерантное пространство (X, τ) называется толерантно стягиваемым, если тождественное отображение толерантно гомотопно постоянному[11].

Определение 12. Толерантная гомотопия отображения $\mathbf{1}_\mathrm{X}$ в постоянное отображение $c :\ \mathrm{X} \to \{x_0\}$ назовем толерантным стягиванием пространства X в точку $x_0 \in \mathrm{X}$[12].

Определение 13. Подмножество $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ назовем толерантно стягиваемым в пространстве (X, τ), если множество A с индуцированной толерантностью $\tau|_\mathrm{A} = \tau \cap (\mathrm{A} \times \mathrm{A})$ является толерантно стягиваемым пространством [13].

Предложение 3.

а) В произвольном толерантном пространстве (X, τ) всякий класс толерантности стягиваем к любой своей точке, относительно этой точки.
б) В произвольном толерантном пространстве все толерантные звезды стягиваемы к своим центрам, относительно этих центров.
в) Для любого натурального n все пространства $(\mathrm{I}_n, \imath_n)$ стягиваемы к любой своей точке, относительно этой точки.

Предложение 4. Прямое произведение стягиваемых толерантных пространств является стягиваемым.

Предложение 5.
а) Любые два толерантных отображения произвольного толерантного пространства в стягиваемое пространство будут толерантно гомотопны друг другу.
б) Если (X, τ) – стягиваемое пространство, то любые два постоянные отображения X в себя толерантно гомотопны и $\mathbf{1}_{\mathrm{X}}$ толерантно гомотопно любому из них.
в) Толерантное пространство стягиваемо тогда и только тогда, когда оно имеет гомотопический тип одноточечного пространства.
г) Любые стягиваемые толерантные пространства имеют один и тот же толерантный гомотопический тип, и всякое отображение одного из них в другое является эквивалентностью в категории $[\mathbf{T}]$.

Определение 14. Толерантным путем (или, просто, путем) в толерантном пространстве (X, τ) назовем любое толерантное отображение ω_n из толерантного отрезка $(\mathrm{I}_n, \imath_n)$ в (X, τ), где $n \in \mathbb{N}$. Точку $\omega_n(0) \in \mathrm{X}$ назовем началом пути ω_n и обозначим символом $orig\, \omega_n$, а точку $\omega_n(1)$ в X назовем концом пути ω_n и обозначим $end\, \omega_n$. Про сам же путь ω_n будем говорить, что ω_n является путем из $\omega_n(0)$ в $\omega_n(1)$. Замкнутым путем, или петлей в точке $x_0 \in \mathrm{X}$, будем называть любой путь $\omega_n : (\mathrm{I}_n, \imath_n) \to (\mathrm{X}, \tau)$ с началом и концом в точке $x_0 = orig\, \omega_n = end\, \omega_n$ [14].

Определение 15. Пусть $\omega_n : (\mathrm{I}_n, \imath_n) \to (\mathrm{X}, \tau)$ и $\omega'_m : (\mathrm{I}_m, \imath_m) \to (\mathrm{X}, \tau)$ – два пути в толерантном пространстве (X, τ), такие что конец первого пути совпадает с началом второго $end\, \omega_n = orig\, \omega'_m$, тогда произведением путей

ω_n и ω'_m назовем новый путь $\omega_n * \omega'_m : (\mathrm{I}_{n+m}, \imath_{n+m}) \to (\mathrm{X}, \tau)$, задаваемый формулой

$$\omega_n * \omega'_m \left(\frac{k}{n+m}\right) = \begin{cases} \omega_n(\frac{k}{n}) & 0 \leqslant k \leqslant n; \\ \omega'_m(\frac{k-n}{m}) & n \leqslant k \leqslant n+m[15]. \end{cases}$$

Определение 16. Пусть $\omega_n : (\mathrm{I}_n, \imath_n) \to (\mathrm{X}, \tau)$ и $\omega'_m : (\mathrm{I}_m, \imath_m) \to (\mathrm{X}, \tau)$ - два пути в толерантном пространстве (X, τ), причем их начала и концы соответственно совпадают $\omega_n(0) = \omega'_m(0)$, $\omega_n(1) = \omega'_m(1)$. Пусть для определенности $m \geqslant n$. Тогда пути ω_n и ω'_m будем называть толерантно гомотопными и в обозначение этого записывать $\omega_n \simeq \omega'_m$, если продленный путь $\omega_{m,n}$ и путь ω'_m представляют собой отображения, толерантно гомотопные относительно концов толерантного отрезка $(\mathrm{I}_m, \imath_m)$. Это означает, что существует толерантное отображение $F : \mathrm{I}_m \times \mathrm{I}_p \to \mathrm{X}$, осуществляющее толерантную гомотопию $F : \omega_{m,n} \sim \omega'_m(rel\,\{0,1\})$ [16].

Теорема 3. Для каждого толерантного пространства (X, τ) имеется категория $\mathcal{P}(\mathrm{X})$, объектами которой являются точки пространства (X, τ), а морфизмами из объекта x_0 в объект x_1 являются классы толерантно гомотопных путей в (X, τ) с началом в x_0 и концом в x_1. В качестве композиции морфизмов в этой категории берется произведение классов путей, определяемое формулой

$$[\omega_n] * [\omega'_m] = [\omega_n * \omega'_m], \tag{7}$$

где $end\,[\omega_n] = orig\,[\omega'_m]$

Более того, категория $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ является группоидом.

Лемма 1. Для любого пути $\omega_n : (\mathrm{I}_n, \imath_n) \to (\mathrm{X}, \tau)$ и любого натурального числа $m \geqslant n$ имеем $\omega_n \simeq \omega_{m,n}$

В дальнейших рассмотрениях неоднократно придется пользоваться конструкцией, описанной в следующем определении:

Определение 17. Пусть $\omega_n : (\mathrm{I}_n, \imath_n) \to (\mathrm{X}, \tau)$ толерантный путь в пространстве (X, τ). Двойным замедлением пути ω_n назовем новый толерантный путь $\widetilde{\omega_n}: (\mathrm{I}_{2n}, \imath_{2n}) \to (\mathrm{X}, \tau)$, определяемый формулой:

$$(\forall k = \overline{0, 2n}) \;\; \widetilde{\omega_n}\left(\frac{k}{2n}\right) = \omega_n\left(\frac{[\frac{k}{2}]}{n}\right)$$

где $[\frac{k}{2}]$ - целая часть числа $\frac{k}{2}$ [17].

Лемма 2. Толерантные пути ω_n и $\widetilde{\omega_n}$ в пространстве (X, τ) гомотопны: $\widetilde{\omega_n} \simeq \omega_n$

Лемма 3. Пусть имеются две пары толерантно гомотопных путей $\omega_n \simeq \omega'_m$ и $\gamma_p \simeq \gamma'_q$ в пространстве (X, τ), причем общий конец первой пары совпадает с общим началом второй. Тогда имеет место следующая толерантная гомотопия путей в (X, τ): $\omega_n * \gamma_p \simeq \omega'_m * \gamma'_q$

Теперь подведем итог.

Теорема 4. Имеется ковариатный функтор из категории гомотопических типов толерантных пространств с отмеченной точкой в категорию групп, сопоставляющий каждому пространству (X, τ) с отмеченной точкой x_0 его фундаментальную группу $\pi(\mathrm{X}, x_0)$, а каждому толерантному отображению $f-$ индуцированный гомоморфизм f_π.

Определение 18. Толерантное пространство (X, τ) назовем линейно связным, если группоид $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ связный. Это означает, что любую пару точек из (X, τ) можно соединить толерантным путем в (X, τ) [18].

Опять воспользуемся общими свойствами группоидов и получим предложение, описывающее зависимость фундаментальной группы от начальной точки.

Предложение 6. Фундаментальные группы линейно связного толерантного пространства в различных точках изоморфны, причем изоморфизмы между ними можно задать однозначно с точностью до сопряжения.

Из теоремы 4 и предложения 6 следует утверждение

Предложение 7. Фундаментальная группа стягиваемого толерантного пространства тривиальна.

Постараемся теперь освободиться от ограничений, связанных с отмеченной точкой.

Теорема 5. Пусть толерантные отображения $f:\ (\mathrm{X},\tau)\to(\mathrm{Y},\theta)$, такое что $f(x_0)=y_0$, и $g:\ (\mathrm{X},\tau)\to(\mathrm{Y},\theta)$, такое что $g(x_0)=y_1$, толерантно гомотопны. Тогда в (Y,θ) существует путь ω_n из y_0 в y_1, такой что

$$f_\pi = h_{[\omega_n]}\circ g_\pi:\ \pi(\mathrm{X},x_0)\to\pi(\mathrm{Y},y_0) \tag{8}$$

Теорема 6. Два линейно связных толерантных пространства одного и того же гомотопического типа имеют изоморфные фундаментальные группы.

Предложение 8. Имеется ковариантный функтор S из категории толерантных пространств в категорию симплициальных комплексов, сопоставляющий каждому толерантному пространству (X,τ) симплициальный комплекс $\mathrm{S}(\mathrm{X})$, а каждому толерантному отображению $f:\ (\mathrm{X},\tau)\to(\mathrm{Y},\theta)$ – симплициальное отображение $\mathrm{S}(f):\ \mathrm{S}(\mathrm{X})\to\mathrm{S}(\mathrm{Y})$.

Теорема 7. Имеется ковариантный функтор из категории толерантных пространств в категорию градуированных абелевых групп и градуированных гомоморфизмов степени 0. Этот функтор каждому толерантному пространству (X,τ) сопоставляет группу ориентированных гомологий $H(\mathrm{X})=\bigoplus_{q\geqslant 0}H_q(\mathrm{X})$ этого пространства, а каждому толерантному отображению $f:\ (\mathrm{X},\tau)\to(\mathrm{Y},\theta)$ – индуцированный гомоморфизм $f_*:\ H(\mathrm{X})\to H(\mathrm{Y})$

Аналогичный результат имеет место и для определенных выше гомологий толерантных пространств.

Теорема 8. Пусть $f_0\sim f_1:\ (\mathrm{X},\tau)\to(\mathrm{Y},\theta)$ – толерантно гомотопные отображения, тогда они индуцируют одинаковые гомоморфизмы групп гомологий $f_{0*}=f_{1*}:\ H(\mathrm{X})\to H(\mathrm{Y})$

Стандартным следствием теоремы 8 является следующее предложение.

Предложение 9. Гомологический функтор, определенный теоремой 7 на категории толерантных пространств $\mathbf{T}$, является ковариантным функтором на категории толерантных гомотопических типов $[\mathbf{T}]$. Отсюда, в частности, следует, что толерантно гомотопически эквивалентные пространства имеют изоморфные группы гомологий.

Предложение 10. Толерантное пространство (X, τ) и присоединенное безъядерное толерантное пространство $(\check{\mathrm{X}}, \check{\tau})$ имеют изоморфные группы гомологий $H(\mathrm{X}) \cong H(\check{\mathrm{X}})$.

Предложение 11. Если (X, τ) – стягиваемое толерантное пространство, то

$$H_q(\mathrm{X}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0; \\ 0, & q > 0. \end{cases}$$

Если $f_0, f_1 : (\mathrm{X}, \tau) \to (\mathrm{Y}, \theta)$ – произвольные толерантные отображения в стягиваемое пространство (Y, θ), то они индуцируют одни и те же гомоморфизмы групп гомологии $f_{0*} = f_{1*} : H(\mathrm{X}) \to H(\mathrm{Y})$.

В алгебраической топологии имеется классическая теорема Пуанкаре. В современной формулировке она утверждает, что существует гомоморфизм из фундаментальной группы топологического пространства в группу его одномерных гомологий, в случае линейной связности этого пространства гомоморфизм сюрьективен и его ядро совпадает с коммутантом фундаментальной группы. Другими словами, группа одномерных гомологий линейно связного топологического пространства изоморфна фактор-группе фундаментальной группы по ее коммутанту.

Определение 19. Пусть K – непустой симплициальный комплекс. Комплексу K может быть поставлено в соответствие топологическое пространство $|\mathrm{K}|$ с так называемой когерентной топологией. Образно говоря, пространство $|\mathrm{K}|$ "склеено"из евклидовых симплексов, которые находятся в биективном соответствии, сохраняющем размерность с симплексами из K. При этом симплициальные отображения $\varphi : \mathrm{K}_1 \longrightarrow \mathrm{K}_2$ индуцируют непрерывные отображения $|\varphi| : |\mathrm{K}_1| \longrightarrow |\mathrm{K}_2|$. Все это задает ковариантный функтор из категории симплициальных комплексов в категорию топологических пространств [19].

Определение 20. Пусть теперь X – топологическое пространство. Триангуляцией пространства X называется пара (K, f), состоящая из симплициального комплекса K и гомеоморфизма $f : |\mathrm{K}| \longrightarrow \mathrm{X}$. Пространство X, допускающее триангуляцию, называется полиэдром. В частности, $|\text{K}|$ – полиэдр [20].

Определение 21. Для полиэдра X с триангуляцией (K, f) по комплексу K можно стандартным образом построить группы гомологий $\bigoplus\limits_{q\geqslant 0} H_q(\text{K})$. Эти группы не зависят от выбора триангуляции и совпадают с топологически инвариантными группами сингулярных гомологий . Группы $H_q(\text{K})$ называются группами гомологий полиэдра X. Будем обозначать их $H_q^{top}(\text{X})$. Договоримся также обозначать через $\pi^{top}(\text{X}, x_0)$ фундаментальную группу топологического пространства X с отмеченной точкой $x_0 \in \text{X}$.

Определение 22. Ребром e симплициального комплекса K называется упорядоченная пара вершин (v, v'), принадлежащих одному из симплексов $s \in \text{K}$. Эти вершины называются началом и концом ребра e и обозначаются $v = orig\, e, v' = end\, e$. Ломаной ζ в K называется непустая последовательность $\zeta = e_1 e_2 \dots e_r$ ребер из K, такая что $ende_i = orig\ e_{i+1}$ $(\forall i = \overline{1, r-1})$. По определению полагаем $orig\, \zeta = orig\, e_1,\ end\, \zeta = end\, e_r$. Ломаная ζ называется замкнутой или петлей в вершине $v_0 \in \text{K}$, если $orig\ \zeta = v_0 = end\ \zeta$.

Определение 23. Пусть ζ_1 и ζ_2 – ломаные в K, такие что $end\, \zeta_1 = orig\, \zeta_2$, тогда произведением $\zeta_1\zeta_2$ называется последовательность ребер, состоящая из ребер ζ_1, за которыми следуют ребра ζ_2. Тогда $orig\ \zeta_1\zeta_2 = orig\ \zeta_1$, $end\ \zeta_1\zeta_2 = end\ \zeta_2$ и эта частичная операция является ассоциативной. Для построения группоида необходимо ввести на множестве ломаных комплекса K отношение эквивалентности.

Определение 24. Две ломаные ζ и ζ' в K называются просто эквивалентными, если существуют вершины $v, v', v'' \in \text{K}$, принадлежащие одному симплексу из K, такие что неупорядоченная пара $\{\zeta; \zeta'\}$ может быть представлена в одном из следующих видов:

а) $\{(v, v'');\ (v, v')(v', v'')\}$,

б) $\{\zeta_1(v, v'');\ \zeta_1(v, v')(v', v'')\}$,

в) $\{(v, v'')\zeta_2;\ (v, v')(v', v'')\zeta_2\}$,

г) $\{\zeta_1(v, v'')\zeta_2;\ \zeta_1(v, v')(v, v'')\zeta_2\}$,

где $\zeta_1,\ \zeta_2$ – ломаные в K с $end\ \zeta_1 = v,\ orig\ \zeta_2 = v''$.

Определение 25. Ломаные ζ и ζ' в K называются эквивалентными и обозначаются $\zeta \sim \zeta'$, если существует конечная последовательность ломаных $\zeta_0, \ldots \zeta_k$, такая что $\zeta = \zeta_0$, $\zeta' = \zeta_k$, и при всех $i = \overline{1, k}$ ломаные ζ_{i-1} и ζ_i просто эквивалентны. Класс эквивалентности ломаной ζ обозначается $[\zeta]$ и на множестве классов даются следующие корректные определения:

$$orig\ [\zeta] \stackrel{df}{=} orig\ \zeta,\ end\ [\zeta] \stackrel{df}{=} end\ \zeta; \tag{9}$$

$$[\zeta_1] \circ [\zeta_2] \stackrel{df}{=} [\zeta_1 \zeta_2], \text{при } end\ \zeta_1 = orig\ \zeta_2. \tag{10}$$

Определение 26. Группоид $\mathcal{E}(\mathrm{K})$ называется группоидом ломаных симплициального коплекса K. Если зафиксировать вершину $v_0 \in \mathrm{K}$, то классы замкнутых ломаных в вершине v_0 образуют в группоиде $\mathcal{E}(\mathrm{K})$ группу, которая обозначается $E(\mathrm{K}, v_0)$ и называется группой ломаных симплициального комплекса K с отмеченной вершиной v_0.

Предложение 12. Группы $H_q(\mathrm{X})$ и $H_q^{top}(|\mathrm{X}|)$ естественно изоморфны как функторы на категории толерантных пространств **T**.

Определение 27. Толерантное пространство (X, τ) назовем линейно связным, если любую пару его точек можно соединить толерантным путем, то есть существует толерантный путь в (X, τ), начало и конец которого совпадают с выбранной парой точек.

Предложение 13. Если (X, τ) – линейно связное толерантное пространство, тогда симплициальный комплекс $S(\mathrm{X})$ будет связным, т.е. все его вершины могут быть соединены ломаными, а сопутствующий полиэдр $|\mathrm{X}|$будет линейно связным топологическим пространством.

Теорема 9. Существует естественный по X в категории **T** изоморфизм групп

$$E(S(\mathrm{X}), \check{x_0}) \cong \pi(\mathrm{X}, x_0). \tag{11}$$

Непосредственным следствием изоморфизмов является теорема.

Теорема 10. Имеется естественный на категории толерантных пространств **T** изоморфизм групп $\pi(\mathrm{X}, x_0) \cong \pi^{top}(|\mathrm{X}|, \check{x_0})$.

Если теперь собрать вместе результаты теоремы 10, предложения 12, предложения 13 и применить классическую теорему Пуанкаре, то получим полный аналог теоремы Пуанкаре для толерантных пространств. А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 11. Пусть (X, τ) – толерантное пространство, $\pi(\mathrm{X}, x_0)$ – фундаментальная группа толерантного пространства (X, τ) с отмеченной точкой $x_0 \in \mathrm{X}$, $H_1(\mathrm{X})$ – группа ядерных одномерных гомологий пространства (X, τ). Тогда существует гомоморфизм групп $\psi : \pi(\mathrm{X}, x_0) \longrightarrow H_1(\mathrm{X})$, являющийся естественным по (X, τ) преобразованием функторов π и H_1. Если (X, τ) – линейно связное толерантное пространство, то гомоморфизм ψ сюрьективен и его ядро совпадает с коммутантом группы $\pi(\mathrm{X}, x_0)$, то есть имеет место изоморфизм групп: $H_1(\mathrm{X}) \cong \pi(\mathrm{X}, x_0)/[\pi(\mathrm{X}, x_0), \pi(\mathrm{X}, x_0)]$, представляющий группу одномерных гомологий толерантного пространства как фактор-группу его фундаментальной группы по коммутанту.

Последняя теорема является главным результатом магистерской работы. Если группы $\pi(\mathrm{X})$ и $H(\mathrm{X})$ являются алгебраическими характеристиками толерантного пространства (X, τ), то сопутствующий полиэдр $|\mathrm{X}|$ можно считать его топологической характеристикой. Результаты последних рассуждений демонстрируют полезность такой топологической характеристики. Пользуясь сопутствующим полиэдром можно определить, например, ориентируемые и неориентируемые толерантные пространства, при этом это определение будет инвариантным относительно толерантных гомеоморфизмов.

Заключение. Исследование толерантных пространств показало, что в них переносятся практически все алгебро-топологические конструкции. При этом толерантная теория в сравнение с топологической имеет свою специфику. Практика работы с толерантной гомотопией показала, что, при сохранении всех формальных теорем известных в топологии, толерантная гомотопия оказывается менее гибким инструментом и требует большего внимания.

Используя инструменты топологии и учитывая специфику толерантных пространств, в магистерской работе был построен ковариантный функтор из категории толерантных пространств в категорию топологических пространств.