

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического обеспечения вычислительных комплексов и
информационных систем

**ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ КОМПЬЮТЕРНОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ГИДРОУПРУГОСТИ**

МАГИСТЕРСКАЯ РАБОТА

Студента 2 курса 273 группы
направления 02.04.03 Математическое обеспечение и администрирование
информационных систем
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Кондратова Дмитрия Вячеславовича

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор, зав. каф. МОВКИС _____ Д.К. Андрейченко

Зав.кафедрой МОВКИС,
д.ф.-м.н., профессор, _____ Д.К. Андрейченко

Саратов 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 Исследование предметной области	6
1.1 Проблемы гидроупругости.....	6
1.2 Системы символьной математики	12
1.3 Выводы к разделу 1.....	16
2 Задачи гидроупругости	17
2.1 Задача гидроупругости для двух соосных оболочек	17
2.2 Задача гидроупругости для трех соосных оболочек	31
2.3 Выводы к разделу 2.....	38
3 Реализация метода исследования с использованием параллельных вычислений	39
3.1 Реализация, программного способа аналитического вычисления без использования параллельных вычислений	39
3.2 Реализация, программного способа аналитически-численного вычисления с использованием параллельных вычислений	45
3.3 Выводы к разделу 3.....	52
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	53
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	56
ПРИЛОЖЕНИЯ	62
Приложение А. Модуль аналитических вычислений	62
Приложение В Расчетный модуль	81
Приложение С. Проблемно-ориентированный комплекс с использованием параллельных вычислений.....	101

ВВЕДЕНИЕ

Исследование задач гидроупругости представляет собой большой научный и практический интерес. Обусловлено это тем, что сфера применения упругих конструкций, взаимодействующих с жидкостью, имеет тенденцию к постоянному расширению за счет использования новых материалов. Применяются данные конструкций в таких отраслях как гидромашиностроение, авиастроение, ракетостроение, кораблестроение, энергомашиностроение (включая атомную энергетику), химическая промышленность, экология, медицина [1-3]. Проведение натуральных экспериментов для изучения влияния жидкости на конструкции и ее поведения в различных условиях является затратным. В настоящее время для решения таких задач используются методы математического моделирования.

Применение численных вычислений для решения задач гидроупругости было положено и нашло продолжение в большом количестве конкретных задач. Сейчас для проведения численных вычислений особый интерес представляют задачи гидроупругости, связанные с исследованиями взаимодействия тонкостенных конструкций с жидкостью. Решения в указанных работах проводились на базе математических моделей, которые представляют собой системы дифференциальных уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости и уравнения динамики упругих конструкций. Считаем необходимым отметить, что число работ, посвященных численным вычислениям взаимодействия конструкций, имеющих три оболочки контактирующих с вязкой жидкостью, незначительно. Этот факт служит показателем значимости проведения таких исследований в ближайшем будущем. Имеется ряд весьма эффективных программных продуктов для моделирования динамических процессов в различных физических средах (колебания сред, акустика теплопередача электродинамика). Данные программные продукты оптимизированы для современных параллельных высокопроизводительных вычислительных систем, однако ориентированный на моделирование в отдельных классах физических задач. Динамические задачи гидроупругости

предполагают взаимодействие по меньшей мере двух сред (упругие тела и жидкости), и традиционно реализуются в пакете ANSYS, однако «мультифизическое» моделирование реализуется не столь эффективно, чем моделирование отдельных классов физических задач. Вместе с тем, все указанные пакеты, основанные на методе конечных элементов, фактически заменяют динамическое моделирование квазистатическим, что недопустимо для определенного класса задач гидроупругости. По указанной причине, на первом этапе математического моделирования процессов гидроупругости требуется детальное исследование передаточных функций и частотных характеристик соответствующих объектов.

Подобный подход позволяет значительно оптимизировать алгоритм компьютерного моделирования для параллельных вычислительных систем. Во-первых, частотные характеристики наблюдаемых объектов различных частотных диапазонов могут вычисляться независимо, то есть параллельно. Далее решение задач гидроупругости в изображениях Лапласа и Фурье сводятся к интегрированию краевых задач для аналогов уравнений Гельмгольца в трехмерных областях, численные решения которых в области низших и средних частот реализуются численно проекционным методом Галеркина или методом конечных элементов, характеризуется большой трудоемкостью и успешно распараллеливается. Дополнительная оптимизация алгоритмов компьютерного моделирования данного класса задача состоит в том, что высоко частотные области методов асимптотического интегрирования позволяет значительно упростить краевые задачи математической физики и повысить их размерность, что позволяет радикально сократить трудоемкость алгоритмов.

Необходимо отметить, что расчет гидроупругости оболочек относится к классу сложных задач, поэтому для такого моделирования потребуется использовать численные методы и параллельные вычисления. Вся эта совокупность проблем определила **актуальность** выбора темы данного исследования.

Целью выпускной квалификационной работы является разработка эффективной схемы компьютерного моделирования в задачах гидроупругости с использованием параллельных вычислений.

Поставленная цель определила следующие задачи:

1. Подобрать и проанализировать литературу по компьютерному моделированию в задачах гидроупругости.
2. Провести исследование возможностей программных решений в области компьютерного моделирования в задачах гидроупругости.
3. Выбор методов решения и применение их к конкретной задаче
4. Выбор методов решения задачи с применением параллельного программирования.
5. Написание соответствующего программного кода для решения задачи

Настоящая работа состоит из введения, трёх разделов, заключения, списка использованных источников и трёх приложений. Объём выпускной квалификационной работы без учёта приложений – 61 страница. Общий объём работы – 110 страниц.

1 Исследование предметной области

1.1 Проблемы гидроупругости

Условия функционирования таких механизмов таковы, что они подвергаются вибрациям от различных источников. Использование данного вида механических систем позволяет минимизировать вибрационные нагрузки, возникающие в процессе эксплуатации от внутренних и внешних источников вибрации, обеспечить прочность и надёжность конструкции, а также находящаяся между оболочками жидкость или газ постоянного давления способствует уменьшению трения и динамических нагрузок на систему и может использоваться для охлаждения цилиндрических оболочек и т. д. Чтобы уменьшить вес машин и механизмов используются ребристые оболочки с дополнительными элементами жесткости в виде шпангоутов, что дает возможность повысить характеристики прочности, уменьшить металлоемкость, а также обеспечить дополнительное крепление системы.

Поэтому, целесообразно провести построение, расчет и оценку функционирования модели механической системы с геометрически регулярными и/или ребристыми цилиндрическими оболочками, взаимодействующих со слоем вязкой несжимаемой жидкости при вибрации системы. Реализация расчётных значений связано с применением и решением задач гидроупругости.

Таким образом, задача исследования динамики взаимодействия геометрически регулярных и/или ребристых цилиндрических оболочек с вязкой несжимаемой жидкостью при различных вибрационных нагрузках с помощью адекватных математических моделях является актуальной и представляет научный и практический интерес.

Решение задач гидроупругости элементов систем, взаимодействующих с жидкостью является сложной и трудоемкой задачей, требующей введение дополнительных условий и упрощений даже в простейших постановках, разработки сложных и объемных математических моделей элементов механических систем и жидкости, для учета динамики взаимодействия между

элементами системы. Поэтому особую актуальность приобретает вопрос построения и исследования моделей таких механических систем, выбора методов и форм их изложения, поиска наиболее подходящих методов решения, а также использование возможностей пакетов обработки данных и приложений для реализации вычислений. Целесообразность разработки и исследования данных моделей продиктована практическими потребностями.

Задачи гидроупругости последние несколько десятилетий составляли объект многочисленных исследований.

Среди российских ученых, занимающихся исследованиями динамики взаимодействия тонкостенных конструкций с вязкой несжимаемой жидкостью с учетом вибрации, особо можно выделить труды К.П. Андрейченко, Андрейченко Д.К., Ю. А. Блинкова, Н.Н. Иванченко, А.М. Ильгамова, Д.А. Индейцева, Л.И. Могилевича, Д.В. Кондратова, В.С. Попова, А.А. Симдянкина, М.М. Чурсина.

Задачи исследования динамики взаимодействия оболочек с вязкой несжимаемой жидкостью при пульсации давления жидкости лежат в основе трудов Л.Г. Лойцянского, Н.А. Слезкина, М.А. Ильгамова, Л.И. Могилевича, И.С. Громека, Д.В. Кондратова, В.С. Попова, И. В. Плаксиной, J.R. Womersley и других.

В трудах [4, 5, 6] рассмотрены задачи «распространения нелинейных продольных волн деформаций в цилиндрической оболочке, окруженной упругой средой и содержащей вязкую несжимаемую жидкость внутри», в работе [6] «проведено исследование модели волновых явлений двух физически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочек типа Кирхгофа – Лява, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, как между ними, так и внутри», получены разностные схемы типа Кранка – Николсона.

Задача математического моделирования динамических процессов в гидродинамической виброопоре была рассмотрена в работах [7, 8, 9], в [8, 9] найдены «амплитудные и фазовые частотные характеристики вибратора и статора», в [7] найдено «решение динамической задачи гидроупругости

гидродинамического демпфера, определены фазовые и амплитудные частотные характеристики упругого статора демпфера».

В работе [10] разработана «модельная экспериментальная установка «Гидроупругость» для исследования быстропротекающих гидродинамических процессов с учетом взаимовлияния жидкости, газа и деформируемой конструкции, описана методика проведения физических экспериментов на разработанной установке», исследованы кавитационные эффекты при вибрациях.

М. Amabili в своей работе [11] исследовал реакцию оболочки, передающей жидкость на гармоническое возбуждение в спектральной окрестности одной из самых низких собственных частот, в работе [12] исследована устойчивость круговых цилиндрических оболочек с опорными концами в сжимаемом, невязком осевом потоке, система дискретизирована методом Галеркина. В работе [12] точный анализ реакции оболочки выполнен с помощью представления фазового пространства, в работе [13] изучается влияние геометрических несовершенств на нелинейную устойчивость круговых цилиндрических оболочек, передающих жидкость, в работе [14] исследовались оболочки и изогнутые панели различной геометрии.

Задача исследования динамических процессов в плоской постановке была исследована в работах [15,16, 17, 18]. В работе [15] была рассмотрена плоская нестационарная задача с учетом влияния движения упругих стенок канала при наличии переносного гармонически изменяющегося по времени виброускорения и заданного гармонически пульсирующего перепада давления, в работе [16] представлено «аналитическое решение задачи гидроупругости пластины, образующей стенку щелевого канала с пульсирующим слоем вязкой несжимаемой жидкости при заданном гармоническом законе пульсации давления на его торце в плоской постановке». В работе [17] рассмотрены результаты численного исследования динамического поведения деформируемой пластины, которая взаимодействует одновременно с внешним сверхзвуковым потоком газа и внутренним потоком жидкости, деформации

пластины определяются с помощью теории, основанной на гипотезах Тимошенко. Также «динамика взаимодействия упругих пластин, образующих стенки плоского канала, с пульсирующим слоем вязкой несжимаемой жидкости, находящимся между ними» рассматривалась в работе [19], исследованы характеристики коэффициента динамичности и амплитудные частотные характеристики перемещения пластины и давления в жидкости на резонансных частотах. Динамика взаимодействия механической системы «оболочка-жидкость-оболочка» рассматривалась «в плоской постановке о колебаниях ребристой пластины и абсолютно жесткого штампа, образующих стенки щелевого канала, заполненного слоем вязкой несжимаемой жидкости при заданном гармоническом законе вибрации основания канала» в работе [17].

Исследования динамических процессов в цилиндрических оболочках, взаимодействующими с вязкой несжимаемой жидкостью проводились различными методами и подходами, в том числе при разных граничных условиях.

Решение задачи о нелинейных колебаниях вязкоупругого трубопровода с протекающей через неё жидкостью численным методом исключения слабосингулярных особенностей в интегральных и интегродифференциальных уравнениях нашло в работе [20], применение метода конечных элементов для исследования собственных колебаний и устойчивости цилиндрических труб, взаимодействующих с вязкой несжимаемой жидкостью в рамках теории упругости в работах [21, 22]. С.А. Бочкарев, В.П. Матвеев в работах [23- 25] методом конечных элементов исследовали влияние на предел устойчивости зазора между двумя оболочками при разных значениях параметров жесткости внешней оболочки и потока жидкости, в работе [26] динамическое поведение упругих коаксиальных цилиндрических оболочек, взаимодействующих с двумя потоками идеальной сжимаемой жидкости, в работе [24] провели анализ гидроупругой устойчивости стационарных или вращающихся упругих

одиноким и коаксиальным цилиндрическим оболочкам, подверженным потокам сжимаемой жидкости.

V.B. Nguyen в работе [27] провел экспериментальное исследование устойчивости консольно-коаксиальных цилиндрических оболочек, транспортирующих жидкость, представил численную модель на основе CFD для изучения устойчивости консольных коаксиальных цилиндрических оболочек, транспортирующих вязкую жидкость, модифицированные уравнения Флюгге использовал для описания движений оболочки, решение представлено методом конечных разностей.

B.Uğurlu, A.Ergin в работе [28] исследовали эффекты различных конечных условий на поведение реакции тонких круговых цилиндрических корпусных конструкций, полностью контактирующих с текучей средой. Метод, используемый в этом исследовании, представляет собой гибридный метод - метод граничного интегрального уравнения для расчета эффектов взаимодействия флюидной структуры и метод конечных элементов для структурного анализа.

В работе [29] была рассмотрена «аэроупругая устойчивость круговых цилиндрических оболочек, содержащих текущую жидкость».

M. Amabili, M.P. Paidoussis и A.K. Misra в работах [30, 31, 32] анализировали нелинейную динамику и устойчивость тонких круговых цилиндрических оболочек, зажатых на обоих концах и подвергнутых осевому потоку жидкости.

Исследование «механической модели, представленной в виде трубы кольцевого сечения, образованной двумя поверхностями соосных цилиндрических оболочек, взаимодействующими с вязкой несжимаемой жидкостью» было проведено в работе [33], в работе [34] проанализировано влияние «типа закрепления и свойств жидкости на резонансные частоты и амплитудные частотные характеристики оболочек».

Вопросами вибрации тонких цилиндрических оболочек, транспортирующих жидкость занимались отечественные и зарубежные

исследователи: Л. И. Могилевич, С. В. Попов, Д. В. Кондратов, Ю. Н. Кондратова, А. В. Христофорова, Ю. А. Блинков, А. З. Камалов, А.В. Крысько, M. Amabili, M.P. Paidoussis, A.K. Misra, Y. L. Zhang, J.M. Reese, D. Krajcinovic, K.H. Jeong, K.P. Soldatos, V.P. Hadjigeorgiou, M.K. Au-Yang, T.T. Yeh, S.S. Chen, H. Chung, P. Turula, T.M. Mulcahy, J. Horacek, J. Trnka, J. Veselý, D.G. Gorman, X.Q. Liu.

В работе [35] представлен общий подход к моделированию вибрации преднапряженной тонкой цилиндрической оболочки, передающей жидкость, движение оболочки представлено теорией тонких оболочек Сандерса. В работе [36] рассмотрены общие уравнения движения для свободной и вынужденно-демпфированной вибрации.

В работе [37] рассмотрена задача о свободной вибрации однородной изотропной толстой цилиндрической оболочки или панели, подвергнутой определенному типу упрощенных граничных условий. В исследовании [38] разработан состав конечных элементов для прогнозирования вибрации цилиндрических оболочек, транспортирующих жидкость, метод основан на трехмерной теории упругости и линеаризованных уравнениях Эйлера.

M.P. Paidoussis и A.K. Misra в работах [39, 40] исследовали вопросы динамических и стабильных характеристик коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих несжимаемый поток вязкой жидкости, где движения оболочки описываются уравнениями тонкой оболочки Флюгге, флуктуирующие текучие силы, связанные с вибрацией оболочки сформулированы с помощью обобщенных методов Фурье-преобразования.

H.Chung, P.Turula, T.M.Mulcahy представили аналитические и экспериментальные методы для оценки вибрационных характеристик цилиндрических оболочек, таких как тепловой лайнер реакционного сосуда реактора быстрого потока [41].

J. Horacek, J. Trnka, J. Veselý, D.G. Gorman провели экспериментальное и численное исследование вибрационных модальных характеристик вертикальной тонкостенной цилиндрической оболочки, содержащей воду или

масло, в соседней коаксиальной области, проанализировали эффекты толщины слоя жидкости в кольцевой области между вибрирующей внешней оболочкой и другим коаксиальным жестким цилиндром[42].

Вопросы динамики взаимодействия вязкой несжимаемой жидкости и упругих цилиндрических оболочек конечной длины при наличии вибрации рассматривались в работах [43, 44], в работе [44] «проведено исследование амплитудных частотных характеристик (АЧХ) двух вложенных упругих замкнутых цилиндрических оболочек, содержащих между собой слой вязкой несжимаемой жидкости, при свободном ее истечении в условиях вибрации механической системы», в работе [45] «произведено численное моделирование поведения амплитудных частотных характеристик внутренней и внешней оболочек в зависимости от времени работы (пробега) при известном законе износа оболочек в условиях вибрации». В работе [46] были рассмотрены вопросы динамики взаимодействия «многослойных соосных упругих цилиндрических оболочек, свободно опертых по концам, взаимодействующих с вязкой несжимаемой жидкостью между ними, в условиях вибрации».

Однако, при большом количестве публикаций, касающихся моделировании задач гидроупругости осталась мало изученной область параллельного вычисления имеющих задач. Традиционно такие задачи решаются в рамках квазистатики, когда для каждого момента времени решается задача гидроупругости, а уже затем подставляется в задачу упругости.

1.2 Системы символьной математики

Maple

Maple — это среда символьных и числовых вычислений, а также мультипарадигмальный язык программирования. Он охватывает несколько областей технических вычислений, таких как символьная математика, численный анализ, обработка данных, визуализация и другие. Набор инструментов MapleSim добавляет функциональные возможности для многодоменного физического моделирования и генерации кода.

Возможности Maple для символьных вычислений включают возможности

системы компьютерной алгебры общего назначения. Например, он может манипулировать математическими выражениями и находить символические решения определенных задач, например, возникающих из обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Пользователи могут вводить математику в традиционной математической нотации. Пользовательские интерфейсы также могут быть созданы. Существует поддержка числовых вычислений с произвольной точностью, а также символьных вычислений и визуализации. Примеры символьных вычислений приведены ниже.

Maple включает динамически типизированный язык программирования в императивном стиле (напоминающий Pascal), который позволяет использовать переменные лексической области видимости. Существуют также интерфейсы для других языков (C, C#, Fortran, Java, MATLAB и Visual Basic), а также для Microsoft Excel.

Maple поддерживает MathML 2.0, формат W3C для представления и интерпретации математических выражений, включая их отображение на веб-страницах. Также имеется функция преобразования выражений из традиционной математической записи в разметку, подходящую для системы набора текста LaTeX.

Maple основан на небольшом ядре, написанном на C, которое обеспечивает язык Maple. Большинство функциональных возможностей обеспечивается библиотеками, которые поступают из различных источников. Большинство библиотек написано на языке Maple; у них есть видимый исходный код. Многие численные вычисления выполняются числовыми библиотеками NAG, библиотеками ATLAS или библиотеками GMP.

Различные функции в Maple требуют числовых данных в разных форматах. Символьные выражения хранятся в памяти в виде ориентированных ациклических графов. Стандартный интерфейс и интерфейс калькулятора написаны на Java.

Giac/Xcas

Giас/Xcas — бесплатная система компьютерной алгебры для Windows, Mac OS X и Linux/Unix (лицензия GPL3).

Xcas — это интерфейс для выполнения компьютерной алгебры, графиков функций, интерактивной геометрии (двумерной и трехмерной), электронных таблиц и статистики, программирования. Его можно использовать в качестве замены графическим калькуляторам высокого класса, например, на нетбуках (примерно по той же цене, что и калькулятор, но с гораздо большей производительностью).

Xcas основан на графическом наборе инструментов FLTK, существует альтернативный, менее зрелый интерфейс, основанный на QT, с именем qcas.

Xcas offline в вашем браузере — это интерфейс для Giас с меньшими функциональными возможностями, но работающий в совместимом браузере без установки, рекомендуется Firefox.

Giас — это библиотека C++, это вычислительное ядро CAS, его можно использовать внутри других программ C++, а также программ Python, Java и Javascript.

Примеры программного обеспечения, использующего Giас в качестве ядра CAS: Geogebra (интерфейс Java и javascript), HP Prime Calculator (C++), Pocket CAS (C++), CAS Calc P11 (C++).

Giас/Xcas имеет режим совместимости для людей, привыкших к Maple или Murad CAS, а также для пользователей калькуляторов TI (TI89, Voyage 200, TI Nspire CAS).

Краткая история: Проект Giас/Xcas начался в 2000 году после разработки CAS для калькуляторов HP. В настоящее время он содержит около 150 000 строк кода на C++ (большая часть написана Б. Париссом) и около 300 страниц англоязычной документации (большая часть написана Р. Де Грейвом). Он имеет интерфейсы с php, латексом, texmacs, java, javascript, python, играющими роль вычислительного ядра. Он также взаимодействует со следующими библиотеками C/C++ PARI, CoCoA, NTL, GSL, GMP, MPFR. Имеет быструю реализацию алгоритмов полиномиальных операций: умножения, деления, НОД

многочленов многих переменных, вычисления базиса Гребнера.

Giac/Xcas получил 3-е место на Trophées du Libre 2007 в категории научного программного обеспечения (презентация).

В 2013 году Giac был выбран для представления CAS известного программного обеспечения Geogebra, а HP также выбрала его в качестве CAS для своего калькулятора HP Prime.

Maxima

Maxima — система для работы с символьными и численными выражениями, включающая дифференцирование, интегрирование, разложение в ряд, преобразование Лапласа, обыкновенные дифференциальные уравнения, системы линейных уравнений, многочлены, множества, списки, векторы, матрицы и тензоры. Maxima производит численные расчеты высокой точности, используя точные дроби, целые числа и числа с плавающей точкой произвольной точности. Система позволяет строить графики функций и статистических данных в двух и трех измерениях.

Mathematica

Mathematica — проприетарная система компьютерной алгебры, широко используемая для научных, инженерных, математических расчётов. Разработана в 1988 году Стивеном Вольфрамом, дальнейшим развитием системы занята основанная им совместно с Теодором Греем компания Wolfram Research.

Оснащена как аналитическими возможностями, так и обеспечивает численные расчёты; результаты выводятся как в алфавитно-цифровом виде, так и в форме графиков. Вычислительные и аналитические функции обеспечиваются бэкендом, к которому могут подключаться различные пользовательские интерфейсы. Традиционный интерфейс, поставляющийся с системой — вычислительная записная книжка (англ. notebook interface), но имеется возможность работать с бэкендом из интегрированных сред разработки, таких как Eclipse и IntelliJ IDEA; с 2002 года существует свободный инструмент JMath, обеспечивающий интерфейс командной строки к

Mathematica посредством интерфейса MathLink.

Анализ программных средств показал, что Maple наибольшим образом подходит для автоматизации имеющейся задачи. Кроме того у автора имеются определенные наработки, именно в системе Maple

1.3 Выводы к разделу 1

В разделе 1 был сделан обзор литературы по задачам гидроупругости и проведен анализ средств разработки. По результатам раздела 1 средством разработки была выбрана система Maple, а также определены задачи, которые будут решаться в дальнейшем

2 Задачи гидроупругости

2.1 Задача гидроупругости для двух соосных оболочек

В качестве первой задачи рассмотрим следующую задачу гидроупругости
Рассмотрим далее следующую общую модель (Рис 1)

Предполагается, что оболочки 1 и 2 – упругие цилиндрические оболочки, жестко заземленные на концах, с внутренним радиусом R_1 и с внешним радиусом R_2 соответственно. Зазор между стенками оболочек 2 и 1 полностью заполнен жидкостью 3. Наружная поверхность внешней оболочки и поверхность внутренней оболочки образуют цилиндр в цилиндре длиной l_2 . Радиальный зазор цилиндрической щели $\delta = R_1 - R_2 \ll R_2$. Торцевые зазоры рабочей камеры, с абсолютно жесткими стенками, имеют протяженность a , значительно большую радиального зазора ($a \gg \delta$). На всю систему переносная сила инерции. Перемещение внутренней оболочки относительно внешней на заземленных торцах отсутствует. Механическая система считается термостабилизированной.

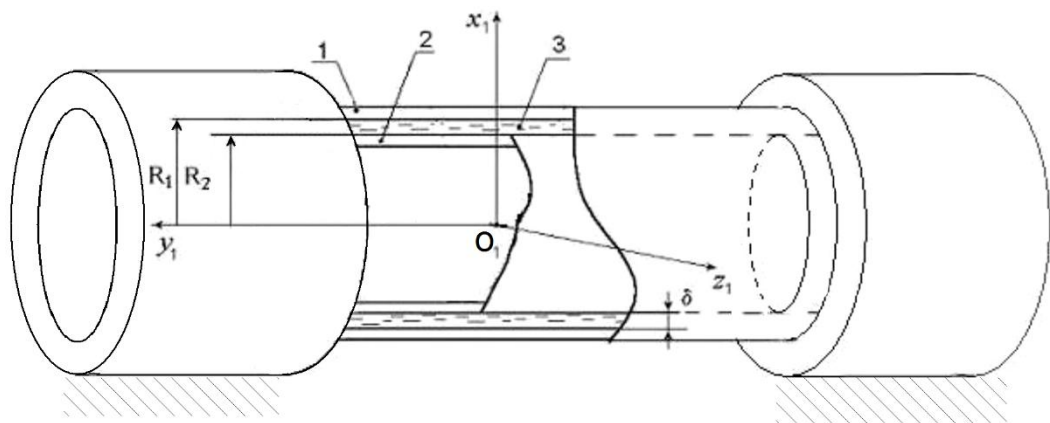


Рис 1 Физическая модель

Рассмотрим математическую модель механической системы, состоящей из двух соосных упругих цилиндрических оболочек, взаимодействующих через слой вязкой несжимаемой жидкости при наличии внешней вибрации.

Движение жидкости между оболочками описывается уравнениями динамики жидкости (1.6), которое в этом случае запишется в виде:

$$\begin{aligned}
& W_{1z1} \cos \theta + W_{1x1} \sin \theta + \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta \partial V_r}{r \partial \theta} + V_y \frac{\partial V_r}{\partial y} - \frac{V_\theta^2}{r} = \\
& = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial y^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\
& -W_{1z1} \sin \theta + W_{1x1} \cos \theta + \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta \partial V_r}{r \partial \theta} + V_y \frac{\partial V_\theta}{\partial y} + \frac{V_r V_\theta}{r} = \\
& = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v \left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial y^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2} \right), \\
& \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_y}{\partial r} + \frac{V_\theta \partial V_y}{r \partial \theta} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = \\
& = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_y}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_y}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right), \tag{1.1} \\
& \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0.
\end{aligned}$$

Граничные условия для системы уравнений (1.1) представляют собой условия непроницаемости внутренней и внешней оболочек, которые в цилиндрической щели запишутся так

$$V_r = \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t}, \quad V_\theta = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial t}, \quad V_y = -\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t} \quad \text{при } r = r^{(i)}, i = 1, 2 \tag{1.2}$$

где $r^{(1)} = R_2 + \delta + u_3^{(1)}$, $r^{(2)} = R_2 + u_3^{(2)}$.

Уравнения динамики внутренней и внешней оболочки, основанные на гипотезах Кирхгофа–Лява будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial y^2} + \frac{1 - \mu_0^{(i)}}{2} \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial \theta^2} - \frac{1 + \mu_0^{(i)}}{2} \frac{1}{R^{(i)}} \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial y \partial \theta} - \frac{\mu_0^{(i)}}{R^{(i)}} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} = \\
& = \frac{1 - (\mu_0^{(i)})^2}{E^{(i)} h_0^{(i)}} \left[\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial t^2} - q_s^{(i)} \right]; \\
& -\frac{1 + \mu_0^{(i)}}{2} \frac{1}{R^{(i)}} \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial y \partial \theta} + \frac{1 - \mu_0^{(i)}}{2} \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial y^2} + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial \theta^2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (a_0^{(i)})^2 \left[2(1 - \mu_0^{(i)}) \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial y^2} + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial \theta^2} \right] + \\
& + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial \theta} - (a_0^{(i)})^2 \left[(2 - \mu_0^{(i)}) \frac{\partial^3 u_3^{(i)}}{\partial y^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 u_3^{(i)}}{\partial \theta^3} \right] = \\
& = \frac{1 - (\mu_0^{(i)})^2}{E^{(i)} h_0^{(i)}} \left[\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \left(W_{1x1} \cos \theta - W_{1z1} \sin \theta + \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial t^2} \right) - q_0^{(i)} \right], \\
& - \frac{\mu_0^{(i)}}{R^{(i)}} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial y} + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial \theta} - (a_0^{(i)})^2 \left[(2 - \mu_0^{(i)}) \frac{\partial^3 u_2^{(i)}}{\partial y^2 \partial \theta} + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^3 u_2^{(i)}}{\partial \theta^3} \right] + \\
& + \frac{u_3^{(i)}}{R^{(i)}} + (a_0^{(i)})^2 \left[(R^{(i)})^2 \frac{\partial^4 u_3^{(i)}}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 u_3^{(i)}}{\partial y^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^4 u_3^{(i)}}{\partial \theta^4} \right] = \\
& = \frac{1 - (\mu_0^{(i)})^2}{E^{(i)} h_0^{(i)}} \left[-\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \left(W_{1x1} \sin \theta + W_{1z1} \cos \theta + \frac{\partial^2 u_3^{(i)}}{\partial t^2} \right) + (-1)^i q_n^{(i)} \right], \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Как и ранее верхний индекс 1 относится к внешней оболочке, а индекс 2 – к внутренней оболочке, а

$$\begin{aligned}
q_s^{(i)} &= - \left[P_{ry} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{\theta y} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) + P_{yy} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{j}) \right]_{r=r^{(i)}}; \\
q_\theta^{(i)} &= \left[P_{r\theta} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{\theta\theta} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) + P_{\theta y} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{j}) \right]_{r=r^{(i)}}; \\
q_n^{(i)} &= \left[P_{rr} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{r\theta} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) + P_{ry} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{j}) \right]_{r=r^{(i)}}; \quad i = 1, 2, \\
r^{(1)} &= R_2 + \delta + u_3^{(1)}; \quad r^{(2)} = R_2 + u_3^{(2)}, \\
P_{rr} &= -p + 2\rho v \frac{\partial V_r}{\partial r}; \quad P_{r\theta} = \rho v \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right); \\
P_{\theta\theta} &= -p + 2\rho v \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right); \quad P_{ry} = \rho v \left(\frac{\partial V_y}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial y} \right); \\
P_{yy} &= -p + 2\rho v \frac{\partial V_y}{\partial y}; \quad P_{\theta y} = \rho v \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_y}{\partial \theta} \right); \quad \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_r) = \frac{r^{(i)}}{|\bar{N}|^{(i)}}; \\
\cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) &= -\frac{1}{|\bar{N}|^{(i)}} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial \theta}; \quad \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) = -\frac{r^{(i)}}{|\bar{N}|^{(i)}} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y};
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$|\bar{N}|^{(i)} = \left\{ \left(r^{(i)} \right)^2 \left[1 + \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} \right]^2 + \left(\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial \theta} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} ; \left(a_0^{(i)} \right)^2 = \frac{\left(h_0^{(i)} \right)^2}{12 \left(R^{(i)} \right)^2}.$$

В последнем уравнении (1.3) перед q_n для внешней оболочки ($i=1$) взят знак минус потому, что жидкость действует на оболочку снизу, для внутренней оболочки ($i=2$) – берется знак плюс (жидкость действует сверху).

Граничные условия для перемещений оболочки состоят в условиях жесткой заделки на торцах (1.11), (1.12), которые будут иметь вид

$$u_1^{(i)} = u_2^{(i)} = u_3^{(i)} = \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \pm \frac{l_2}{2}. \quad (1.5)$$

Таким образом, математическая модель для двух соосных цилиндрических оболочек.

При этом условия согласования давления и расхода жидкости при переходе от цилиндрической щели в торцевые запишутся:

$$p = p_0 \text{ при } y = \pm l/2 \quad (1.6)$$

где p_0 –уровень отсчета давления.

Кроме того, также необходимы условия периодичности параметров течения по θ с периодом 2π (условия замкнутости потока жидкости).

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \xi &= (r - R_2)/\delta, \quad \theta = \theta, \quad \tau = \omega t, \quad \zeta = 2y/l_2, \\ V_r &= w_m^{(i)} \omega u_\xi, \quad V_\theta = (w_m^{(i)} \omega / \psi) u_\theta, \quad V_y = (w_m^{(i)} \omega / \psi) (l_2 / 2R_2) u_\zeta; \\ u_1^{(i)} &= u_m^{(i)} U_1^{(i)}, \quad u_2^{(i)} = v_m^{(i)} U_2^{(i)}, \quad u_3^{(i)} = w_m^{(i)} U_3^{(i)}, \\ \psi &= \delta / R_2 \ll 1, \quad \lambda^{(i)} = w_m^{(i)} / \delta; \quad \left(c^{(i)} \right)^2 = E^{(i)} / \left[\rho_0^{(i)} \left(1 - \left(\mu_0^{(i)} \right)^2 \right) \right], \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$p = p_0 + \rho R_2 \frac{w_m^{(1)} \omega^2}{\psi \operatorname{Re}} \left\langle P - \operatorname{Re} \left[\frac{\psi E_z}{w_m^{(1)}} f_{z0}''(\tau) \cos \theta + \frac{\psi E_x}{w_m^{(1)}} f_{x0}''(\tau) \sin \theta \right] \right\rangle.$$

Учитывая условие $\psi \ll 1$, представим решение в виде разложения по степеням ψ . Уравнения (1.1) динамики поддерживающего и демпфирующего слоя жидкости с учетом (1.7) в нулевом приближении по ψ примут вид:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = 0, \operatorname{Re} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial \tau} + \lambda^{(1)} \left(u_\xi \frac{\partial u_\theta}{\partial \xi} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\zeta \frac{\partial u_\theta}{\partial \zeta} \right) \right] = -\frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \xi^2}, \quad (1.8)$$

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\partial u_\zeta}{\partial \tau} + \lambda^{(1)} \left(u_\xi \frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi} + u_\theta \frac{\partial u_\zeta}{\partial \theta} + u_\zeta \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} \right) \right] = -\left(\frac{2R_2}{l_2} \right)^2 \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 u_\zeta}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} = 0.$$

Граничные условия на непроницаемых поверхностях в нулевом приближении по ψ запишутся в виде:

$$u_\xi = \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial \tau}; u_\theta = 0; u_\zeta = 0 \text{ при } \xi = \xi_*^{(1)} = 1 + \lambda^{(1)} U_3^{(1)}; \quad (1.9)$$

$$u_\xi = \frac{w_m^{(2)}}{w_m^{(1)}} \frac{\partial U_3^{(2)}}{\partial t}; u_\theta = 0; u_\zeta = 0 \text{ при } \xi = \xi_*^{(2)} = \lambda^{(2)} U_3^{(2)},$$

$$\text{где } \lambda^{(2)} = \frac{w_m^{(2)}}{w_m^{(1)}} \lambda^{(1)}$$

В нулевом приближении по ψ , напряжения оболочек запишутся в виде:

$$q_s^{(i)} = -\frac{\rho R_2 w_m^{(i)} \omega^2}{\operatorname{Re}} \left(\frac{l_2}{2R_2} \frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi} + \lambda^{(i)} \frac{2R_2}{l_2} \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \zeta} Q^{(i)} \right), \quad (1.10)$$

$$q_\theta^{(i)} = \frac{\rho R_2 w_m^{(i)} \omega^2}{\operatorname{Re}} \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \xi} + \lambda^{(i)} \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \theta} Q^{(i)} \right), \quad q_n^{(i)} = -\frac{\rho R_2 w_m^{(i)} \omega^2}{\operatorname{Re} \psi} Q^{(i)};$$

$$Q^{(i)} = \frac{\operatorname{Re} \psi p_0}{\rho R_2 w_m^{(i)} \omega^2} + P - \operatorname{Re} \left[\frac{\psi E_x}{w_m^{(i)}} f_{x0}''(\tau) \sin \theta + \frac{\psi E_z}{w_m^{(i)}} f_{z0}''(\tau) \cos \theta \right].$$

Из формул (1.10) следует, что

$$\frac{q_s^{(i)}}{q_n^{(i)}} = O(\psi), \quad \frac{q_\theta^{(i)}}{q_n^{(i)}} = O(\psi). \quad (1.11)$$

Уравнения динамики оболочек (1.3) в безразмерных переменных (1.7) с учетом условия $\psi \ll 1$ запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{(c^{(i)})^2 \rho_0^{(i)} h_0^{(i)}}{(R^{(i)})^2} \left\{ \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right) u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \zeta^2} + \frac{1-\mu_0^{(i)}}{2} u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \theta^2} - \right. \\
& - \frac{1+\mu_0^{(i)}}{2} \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right) v_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \zeta \partial \theta} - \mu_0^{(i)} \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right) w_m^{(i)} \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \zeta} \left. \right\} - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \omega^2 u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \tau^2} = 0; \\
& \frac{(c^{(i)})^2 \rho_0^{(i)} h_0^{(i)}}{(R^{(i)})^2} \left\{ - \frac{1+\mu_0^{(i)}}{2} \frac{2R^{(i)}}{l_2} u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \zeta \partial \theta} + \frac{1-\mu_0^{(i)}}{2} \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 v_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \zeta^2} + \right. \\
& + v_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \theta^2} + w_m^{(i)} \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \theta} + (a_0^{(i)})^2 v_m^{(i)} \left[2(1-\mu_0^{(i)}) \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \theta^2} \right] - \\
& - (a_0^{(i)})^2 w_m^{(i)} \left[(2-\mu_0^{(i)}) \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 \frac{\partial^3 U_3^{(i)}}{\partial \zeta^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 U_3^{(i)}}{\partial \theta^3} \right] \left. \right\} - \\
& - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \omega^2 \left(\frac{W_{1x1}}{\omega^2} \cos \theta - \frac{W_{1z1}}{\omega^2} \sin \theta + v_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \tau^2} \right) = 0, \quad (1.12) \\
& \frac{(c^{(i)})^2 \rho_0^{(i)} h_0^{(i)}}{(R^{(i)})^2} \left\{ - \mu_0^{(i)} \frac{2R^{(i)}}{l_2} u_m^{(i)} \frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial \zeta} + v_m^{(i)} \frac{\partial U_2^{(i)}}{\partial \theta} - \right. \\
& - (a_0^{(i)})^2 v_m^{(i)} \left[(2-\mu_0^{(i)}) \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 \frac{\partial^3 U_2^{(i)}}{\partial \zeta^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 U_2^{(i)}}{\partial \theta^3} \right] + w_m^{(i)} U_3^{(i)} + \\
& + (a_0^{(i)})^2 w_m^{(i)} \left[\left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^4 \frac{\partial^4 U_3^{(i)}}{\partial \zeta^4} + 2 \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 \frac{\partial^4 U_3^{(i)}}{\partial \zeta^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 U_3^{(i)}}{\partial \theta^4} \right] \left. \right\} - \\
& - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \omega^2 \left(\frac{W_{1x1}}{\omega^2} \sin \theta + \frac{W_{1z1}}{\omega^2} \cos \theta + w_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_3^{(i)}}{\partial \tau^2} \right) = (-1)^i q_n^{(i)} \Big|_{\xi=\xi_*^{(i)}}.
\end{aligned}$$

Условия жесткого заземления на торцах внешней и внутренней оболочек запишутся в виде

$$U_1^{(i)} = U_2^{(i)} = U_3^{(i)} = \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \zeta} = 0 \text{ при } \zeta = \pm 1. \quad (1.13)$$

Для решения задачи упругогидродинамики в этом разделе применяется метод возмущений, совместно с методом заданных форм.

В задачу гидродинамики входит малый параметр $\lambda^{(1)} \ll 1$, характеризующий относительный прогиб внешней оболочки. Решение представляется в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра $\lambda^{(1)}$:

$$P = P_0 + \lambda^{(1)} P_1 + \dots, \quad (1.14)$$

$$u_\theta = u_{\theta 0} + \lambda^{(1)} u_{\theta 1} + \dots, \quad u_\xi = u_{\xi 0} + \lambda^{(1)} u_{\xi 1} + \dots, \quad u_\zeta = u_{\zeta 0} + \lambda^{(1)} u_{\zeta 1} + \dots,$$

$$U_1^{(i)} = U_{10}^{(i)} + \lambda^{(i)} U_{11}^{(i)} + \dots, \quad U_2^{(i)} = U_{20}^{(i)} + \lambda^{(i)} U_{21}^{(i)} + \dots, \quad U_3^{(i)} = U_{30}^{(i)} + \lambda^{(i)} U_{31}^{(i)} + \dots.$$

Математическая модель после описанных преобразований будет иметь вид:

уравнения динамики жидкости:

$$\frac{\partial P_0}{\partial \xi} = 0, \quad \text{Re} \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \tau} + \frac{\partial P_0}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_{\theta 0}}{\partial \xi^2} = 0, \quad (1.15)$$

$$\text{Re} \frac{\partial u_{\zeta 0}}{\partial \tau} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial P_0}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 u_{\zeta 0}}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial u_{\xi 0}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\zeta 0}}{\partial \zeta} = 0;$$

уравнения динамики оболочки:

$$\begin{aligned} & \frac{(c^{(i)})^2 \rho_0^{(i)} h_0^{(i)}}{(R^{(i)})^2} \left\{ \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right) u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \zeta^2} + \frac{1 - \mu_0^{(i)}}{2} u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \theta^2} - \right. \\ & - \frac{1 + \mu_0^{(i)}}{2} \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right) v_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \zeta \partial \theta} - \mu_0^{(i)} \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right) w_m^{(i)} \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \zeta} \left. \right\} - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \omega^2 u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \tau^2} = 0; \\ & \frac{(c^{(i)})^2 \rho_0^{(i)} h_0^{(i)}}{(R^{(i)})^2} \left\{ - \frac{1 + \mu_0^{(i)}}{2} \frac{2R^{(i)}}{l_2} u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \zeta \partial \theta} + \frac{1 - \mu_0^{(i)}}{2} \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 v_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \zeta^2} + \right. \\ & + v_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \theta^2} + w_m^{(i)} \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \theta} + (a_0^{(i)})^2 v_m^{(i)} \left[2(1 - \mu_0^{(i)}) \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \theta^2} \right] - \\ & - (a_0^{(i)})^2 w_m^{(i)} \left[(2 - \mu_0^{(i)}) \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 \frac{\partial^3 U_3^{(i)}}{\partial \zeta^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 U_3^{(i)}}{\partial \theta^3} \right] \left. \right\} - \\ & - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \omega^2 \left(\frac{W_{1x1}}{\omega^2} \cos \theta - \frac{W_{1z1}}{\omega^2} \sin \theta + v_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \tau^2} \right) = 0, \quad (1.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(c^{(i)})^2 \rho_0^{(i)} h_0^{(i)}}{(R^{(i)})^2} \left\{ -\mu_0^{(i)} \frac{2R^{(i)}}{l_2} u_m^{(i)} \frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial \zeta} + v_m^{(i)} \frac{\partial U_2^{(i)}}{\partial \theta} - \right. \\
& - (a_0^{(i)})^2 v_m^{(i)} \left[\left(2 - \mu_0^{(i)} \right) \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 \frac{\partial^3 U_2^{(i)}}{\partial \zeta^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 U_2^{(i)}}{\partial \theta^3} \right] + w_m^{(i)} U_3^{(i)} + \\
& + (a_0^{(i)})^2 w_m^{(i)} \left[\left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^4 \frac{\partial^4 U_3^{(i)}}{\partial \zeta^4} + 2 \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 \frac{\partial^4 U_3^{(i)}}{\partial \zeta^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 U_3^{(i)}}{\partial \theta^4} \right] \left. \right\} - \\
& - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \omega^2 \left(\frac{W_{1x1}}{\omega^2} \sin \theta + \frac{W_{1z1}}{\omega^2} \cos \theta + w_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_3^{(i)}}{\partial \tau^2} \right) = (-1)^{i-1} \frac{\rho R_2 w_m^{(i)} \omega^2}{\operatorname{Re} \psi} \times \\
& \times \left\{ \frac{\operatorname{Re} \psi p_0}{\rho R_2 w_m^{(i)} \omega^2} + P - \operatorname{Re} \left[\frac{\psi E_x}{w_m^{(i)}} f_{x0}''(\tau) \sin \theta + \frac{\psi E_z}{w_m^{(i)}} f_{z0}''(\tau) \cos \theta \right] \right\} \Big|_{\xi=\xi_*^{(i)}},
\end{aligned}$$

где $\xi_*^{(1)} = 1 + \lambda^{(1)} U_3^{(1)}$, $\xi_*^{(2)} = \lambda^{(2)} U_3^{(2)}$,

граничные условия на непроницаемых поверхностях:

$$\begin{aligned}
u_{\xi 0} &= \frac{\partial U_{30}^{(1)}}{\partial \tau}; \quad u_{\theta 0} = 0; \quad u_{\zeta 0} = 0 \quad \text{при } \xi = 1, \\
u_{\xi 0} &= \frac{w_m^{(2)}}{w_m^{(1)}} \frac{\partial U_{30}^{(2)}}{\partial t}; \quad u_{\theta 0} = 0; \quad u_{\zeta 0} = 0 \quad \text{при } \xi = 0.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

граничные условия жесткого заземления по торцам:

$$U_1^{(i)} = U_2^{(i)} = U_3^{(i)} = \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = \pm 1. \tag{1.18}$$

Будем рассматривать задачу, при которой выполняются следующие условия

$$\frac{a}{\delta} = O(\psi^{-1}), \quad a = R_2 b_3 = \frac{\delta}{\psi} b_3, \quad b_3 = O(1). \tag{1.19}$$

Тогда условия согласования давления и расхода жидкости (1.6) в безразмерных переменных (1.7) запишутся в виде

$$P = 0 \quad \text{при } \zeta = \pm 1. \tag{1.20}$$

Решая задачу гидродинамики (1.15) с условиями (1.17), получим следующее выражение для давления и скоростей жидкости:

$$\begin{aligned}
u_{\xi 0} &= \frac{1}{w_m^{(1)}} \left\{ \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \tau} \right) \int_{\xi}^0 \left[\frac{12\nu}{\varepsilon^2} L_2(\xi) - 2wL_1(\xi) \right] d\xi + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 u_{30}^{(1)}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_{30}^{(2)}}{\partial \tau^2} \right) \int_{\xi}^0 \left[2wL_2(\xi) + \frac{12\nu}{\varepsilon^2} L_1(\xi) \right] d\xi, \right. \\
u_{\theta 0} &= \frac{\sigma}{w_m^{(1)}} \int_{-1}^{\zeta} sh\sigma(\zeta - q) \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \tau} \right) \left[\frac{12\nu}{\varepsilon^2} L_2(\xi) - 2wL_1(\xi) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 u_{30}^{(1)}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_{30}^{(2)}}{\partial \tau^2} \right) \left[2wL_2(\xi) + \frac{12\nu}{\varepsilon^2} L_1(\xi) \right] \right\} dq - \\
&\quad - \frac{\sigma}{2w_m^{(1)}} \left(\frac{ch\sigma\zeta}{ch\sigma} + \frac{sh\sigma\zeta}{sh\sigma} \right) \int_{-1}^1 sh\sigma(1 - q) \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \tau} \right) \left[\frac{12\nu}{\varepsilon^2} L_2(\xi) - 2wL_1(\xi) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 u_{30}^{(1)}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_{30}^{(2)}}{\partial \tau^2} \right) \left[2wL_2(\xi) + \frac{12\nu}{\varepsilon^2} L_1(\xi) \right] \right\} dq, \quad) \\
u_{\zeta 0} &= \frac{1}{w_m^{(1)}} \int_{-1}^{\zeta} ch\sigma(\zeta - q) \left\{ \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \tau} \right) \left[\frac{12\nu}{\varepsilon^2} L_2(\xi) - 2wL_1(\xi) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 u_{30}^{(1)}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_{30}^{(2)}}{\partial \tau^2} \right) \left[2wL_2(\xi) + \frac{12\nu}{\varepsilon^2} L_1(\xi) \right] \right\} dq - \\
&\quad - \frac{1}{2w_m^{(1)}} \left(\frac{sh\sigma\zeta}{ch\sigma} + \frac{ch\sigma\zeta}{sh\sigma} \right) \int_{-1}^1 sh\sigma(1 - q) \left\{ \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \tau} \right) \left[\frac{12\nu}{\varepsilon^2} L_2(\xi) - 2wL_1(\xi) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 u_{30}^{(1)}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_{30}^{(2)}}{\partial \tau^2} \right) \left[2wL_2(\xi) + \frac{12\nu}{\varepsilon^2} L_1(\xi) \right] \right\} dq, \\
P_0 &= \frac{\sigma}{w_m^{(1)}} \int_{-1}^{\zeta} sh\sigma(\zeta - q) \left[12\nu \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}(q, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}(q, \theta, \tau)}{\partial \tau} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2\varepsilon^2 w \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}(q, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}(q, \theta, \tau)}{\partial \tau} \right) \right] dq - \frac{\sigma}{2w_m^{(1)}} \left(\frac{ch\sigma\zeta}{ch\sigma} + \frac{sh\sigma\zeta}{sh\sigma} \right) \int_{-1}^1 sh\sigma(1 - q) \times \\
&\quad \left[12\nu \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}(q, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}(q, \theta, \tau)}{\partial \tau} \right) + 2\varepsilon^2 w \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}(q, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}(q, \theta, \tau)}{\partial \tau} \right) \right] dq,
\end{aligned}
\tag{1.21}$$

где

$$L_1(\xi) = \frac{1}{2A} \{ [1 - F_1(\varepsilon\xi)]A + F_2(\varepsilon\xi)B - 4F_4(\varepsilon\xi)C \}; \quad (1.22)$$

$$L_2(\xi) = \frac{1}{A} \{ F_3(\varepsilon\xi)A - F_4(\varepsilon\xi)B - 4F_2(\varepsilon\xi)C \};$$

$$L_3(\xi) = \frac{1}{2A} \{ -F_1(\varepsilon\xi)A + F_2(\varepsilon\xi)[B + F_2(\varepsilon)] - 4F_4(\varepsilon\xi)[C - F_4(\varepsilon)] \};$$

$$L_4(\xi) = \frac{1}{A} \{ F_3(\varepsilon\xi)A - F_4(\varepsilon\xi)[B + F_2(\varepsilon)] - F_2(\varepsilon\xi)[C - F_4(\varepsilon)] \};$$

$$F_k(\varepsilon) = F_k(\varepsilon\xi)_{\xi=1}, \quad k = \overline{1,4},$$

$$A = F_2^2(\varepsilon) + 4F_4^2(\varepsilon), \quad B = 4F_3(\varepsilon)F_4(\varepsilon) + F_1(\varepsilon)F_2(\varepsilon) - F_2(\varepsilon),$$

$$C = F_2(\varepsilon)F_3(\varepsilon) - F_1(\varepsilon)F_4(\varepsilon) + F_4(\varepsilon),$$

$$F_1(\varepsilon\xi) = ch\varepsilon\xi \cdot \cos\varepsilon\xi, \quad F_2(\varepsilon\xi) = \frac{1}{2}(ch\varepsilon\xi \cdot \sin\varepsilon\xi + sh\varepsilon\xi \cdot \cos\varepsilon\xi),$$

$$F_3(\varepsilon\xi) = \frac{1}{2}sh\varepsilon\xi \cdot \sin\varepsilon\xi, \quad F_4(\varepsilon\xi) = \frac{1}{4}(ch\varepsilon\xi \cdot \sin\varepsilon\xi - sh\varepsilon\xi \cdot \cos\varepsilon\xi), \quad \varepsilon = \delta\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

Для решения задачи динамики цилиндрической оболочки рассматривается гармоническая зависимость по окружной координате и применяется метод Бубнова-Галеркина по продольной координате для упругих перемещений в первом приближении. Форма упругих перемещений оболочки в методе Бубнова-Галеркина выбиралась такой же, как в точном решении для балки при равномерно распределенной нагрузке.

По виду правых частей уравнений (1.16) и граничных условий (1.18) упругие перемещения внутренней и внешней оболочек представляются в виде

$$\begin{aligned} u_{10}^{(i)} &= u_m^{(i)} U_{10}^{(i)} = u_m^{(i)} \zeta (1 - \zeta^2) \{ (a_{10C}^{(i)} \cos \theta + a_{10S}^{(i)} \sin \theta) \sin(\tau + \varphi_{u1}^{(i)}) + a_{10O}^{(i)} \}, \\ u_{20}^{(i)} &= v_m^{(i)} U_{20}^{(i)} = v_m^{(i)} (1 - \zeta^2) \{ a_{20S}^{(i)} \cos \theta + a_{20C}^{(i)} \sin \theta + a_{20O}^{(i)} \} \sin(\tau + \varphi_{u2}^{(i)}), \\ u_{30}^{(i)} &= w_m^{(i)} U_{30}^{(i)} = w_m^{(i)} (1 - \zeta^2)^2 \{ (a_{30C}^{(i)} \cos \theta + a_{30S}^{(i)} \sin \theta) \sin(\tau + \varphi_{u3}^{(i)}) + a_{30O}^{(i)} \}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Учтем, что в системе присутствует демпфирование, возникающее за счет жидкости, что приводит к быстрому затуханию собственных колебаний

системы и возникновению установившихся вынужденных колебаний одной формы. Будем предполагать, что колебания механической системы носят гармонический характер

$$f_{x0}(\tau) = \sin(\tau + \varphi_{x0}), \quad f_{z0}(\tau) = \sin(\tau + \varphi_{z0}).$$

Приравнивая коэффициенты в уравнениях динамики оболочек при одинаковых тригонометрических функциях от τ и от θ в левой и правой частях этих уравнений и применяя по ζ процедуру метода Бубнова–Галеркина в первом приближении, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов, входящих в формулы (1.23). Из полученной системы уравнений определяются необходимые в дальнейшем коэффициенты:

$$\begin{aligned} w_m^{(i)} a_{30C}^{(i)} \cos \varphi_{u3}^{(i)} = & \{ a_{11}^{(i)} T_1^{(i)} (A_{c3}^{(i)} de_1^{(i)} - A_{c2}^{(i)} de_2^{(i)}) + (a_{11}^{(i)})^2 de_1^{(i)} Y^{(j)} Y_1^{(j)} (A_{u3}^{(i)} de_1^{(i)} - A_{u2}^{(i)} de_2^{(i)}) + \\ & + a_{11}^{(i)} a_{11}^{(j)} de_1^{(i)} T_2^{(j)} (A_{c3}^{(j)} de_1^{(j)} - A_{c2}^{(j)} de_2^{(j)}) - a_{11}^{(i)} a_{11}^{(j)} de_1^{(i)} Y^{(j)} Y_1^{(j)} (A_{u3}^{(j)} de_1^{(j)} - A_{u2}^{(j)} de_2^{(j)}) \} / de_{10}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} w_m^{(i)} a_{30C}^{(i)} \sin \varphi_{u3}^{(i)} = & \{ a_{11}^{(i)} T_1^{(i)} (A_{u3}^{(i)} de_1^{(i)} - A_{u2}^{(i)} de_2^{(i)}) - (a_{11}^{(i)})^2 de_1^{(i)} Y^{(j)} Y_1^{(j)} (A_{c3}^{(i)} de_1^{(i)} - A_{c2}^{(i)} de_2^{(i)}) + \\ & + a_{11}^{(i)} a_{11}^{(j)} de_1^{(i)} T_2^{(j)} (A_{u3}^{(j)} de_1^{(j)} - A_{u2}^{(j)} de_2^{(j)}) + a_{11}^{(i)} a_{11}^{(j)} de_1^{(i)} Y^{(j)} Y_1^{(j)} (A_{c3}^{(j)} de_1^{(j)} - A_{c2}^{(j)} de_2^{(j)}) \} / de_{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_m^{(i)} a_{30S}^{(i)} \sin \varphi_{u3}^{(i)} = & \{ a_{11}^{(i)} T_1^{(i)} (A_{b3}^{(i)} de_1^{(i)} - A_{b2}^{(i)} de_2^{(i)}) - (a_{11}^{(i)})^2 de_1^{(i)} Y^{(j)} Y_1^{(j)} (A_{d3}^{(i)} de_1^{(i)} - A_{d2}^{(i)} de_2^{(i)}) + \\ & + a_{11}^{(i)} a_{11}^{(j)} de_1^{(i)} T_2^{(j)} (A_{b3}^{(j)} de_1^{(j)} - A_{b2}^{(j)} de_2^{(j)}) + a_{11}^{(i)} a_{11}^{(j)} de_1^{(i)} Y^{(j)} Y_1^{(j)} (A_{d3}^{(j)} de_1^{(j)} - A_{d2}^{(j)} de_2^{(j)}) \} / de_{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_m^{(i)} a_{30S}^{(i)} \cos \varphi_{u3}^{(i)} = & \{ a_{11}^{(i)} T_1^{(i)} (A_{d3}^{(i)} de_1^{(i)} - A_{d2}^{(i)} de_2^{(i)}) + (a_{11}^{(i)})^2 de_1^{(i)} Y^{(j)} Y_1^{(j)} (A_{b3}^{(i)} de_1^{(i)} - A_{b2}^{(i)} de_2^{(i)}) + \\ & + a_{11}^{(i)} a_{11}^{(j)} de_1^{(i)} T_2^{(j)} (A_{d3}^{(j)} de_1^{(j)} - A_{d2}^{(j)} de_2^{(j)}) - a_{11}^{(i)} a_{11}^{(j)} de_1^{(i)} Y^{(j)} Y_1^{(j)} (A_{b3}^{(j)} de_1^{(j)} - A_{b2}^{(j)} de_2^{(j)}) \} / de_{10}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} de_{10} = & de_1^{(2)2} a_{11}^{(2)2} Y^{(1)2} b_{33}^{(2)2} + 2a_{11}^{(1)} de_1^{(2)} a_{11}^{(2)} de_1^{(1)} Y^{(1)} Y^{(2)} b_{33}^{(1)} b_{33}^{(2)} + \\ & + a_{11}^{(1)2} de_1^{(1)2} Y^{(2)2} b_{33}^{(1)2} + 16a_{11}^{(1)2} B_0^{(2)2} \varepsilon^8 w^4 de_1^{(1)2} de_1^{(2)2} a_{11}^{(2)2} B_0^{(1)2} - \\ & - 8a_{11}^{(1)} a_{11}^{(2)} de_1^{(1)} de_1^{(2)} g_2^{(1)} g_2^{(2)} B_0^{(1)} B_0^{(2)} \varepsilon^4 w^2 + 4de_9^{(1)} de_9^{(2)} de_1^{(1)} de_2^{(1)2} de_1^{(2)} de_2^{(2)2} + \\ & + de_1^{(2)2} de_2^{(1)4} de_9^{(2)2} - 4a_{11}^{(2)} a_{23}^{(2)} de_9^{(1)} de_1^{(1)} de_2^{(1)2} de_2^{(2)3} - 2a_{11}^{(2)} a_{23}^{(2)} de_9^{(1)2} de_2^{(2)3} de_1^{(1)2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + de_2^{(2)3} de_4^{(2)} de_9^{(1)2} de_1^{(1)2} + de_9^{(1)2} de_9^{(2)2} de_1^{(1)2} de_1^{(2)2} + 2de_9^{(2)} de_1^{(1)2} de_1^{(2)} de_2^{(2)2} de_9^{(1)2} - \\
& - 2a_{11}^{(2)} a_{23}^{(2)} de_2^{(1)4} de_2^{(2)3} + 2de_9^{(2)2} de_9^{(1)} de_1^{(2)2} de_2^{(1)2} de_1^{(1)} + 2de_2^{(1)4} de_9^{(2)} de_1^{(2)} de_2^{(2)2} + \\
& + 2de_9^{(1)} de_1^{(1)} de_2^{(1)2} de_4^{(2)} de_2^{(2)3} + de_2^{(1)4} de_4^{(2)} de_2^{(2)3},
\end{aligned}$$

$$Y^{(i)} = -2a_{11}^{(i)} de_1^{(i)} B_0^{(i)} w \varepsilon^2 + g_2^{(i)},$$

$$Y_1^{(i)} = -2a_{11}^{(i)} de_1^{(i)} b_{33}^{(i)} w \varepsilon^2 B_0^{(j)} + b_{33}^{(j)} g_2^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad i \neq j$$

$$\begin{aligned}
T_1^{(i)} = & -2a_{11}^{(i)} a_{11}^{(j)2} de_1^{(i)} de_1^{(j)2} b_{33}^{(j)2} w \varepsilon^2 B_0^{(i)} + de_1^{(j)2} a_{11}^{(j)2} g_2^{(i)} b_{33}^{(j)2} - \\
& - 2a_{11}^{(i)} a_{11}^{(j)2} de_1^{(i)} de_1^{(j)2} b_{33}^{(i)} w \varepsilon^2 B_0^{(j)} b_{33}^{(j)} + a_{11}^{(i)} a_{11}^{(j)} de_1^{(i)} de_1^{(j)} g_2^{(i)} b_{33}^{(i)} b_{33}^{(j)} - \\
& - 4a_{11}^{(i)} a_{11}^{(j)} de_1^{(i)} de_1^{(j)} g_2^{(j)} B_0^{(j)} w^2 \varepsilon^4 B_0^{(i)} + g_2^{(j)2} g_2^{(i)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2^{(i)} = & -2a_{11}^{(j)} a_{11}^{(i)} de_1^{(j)} de_1^{(i)} b_{33}^{(i)} B_0^{(j)} w \varepsilon^2 b_{33}^{(j)} + a_{11}^{(i)} de_1^{(i)} g_2^{(j)} b_{33}^{(i)} b_{33}^{(j)} - \\
& - 2a_{11}^{(j)} a_{11}^{(i)} de_1^{(j)} de_1^{(i)} B_0^{(i)} w \varepsilon^2 b_{33}^{(j)2} + a_{11}^{(j)} de_1^{(j)} g_2^{(i)} b_{33}^{(j)2} - \\
& - 8a_{11}^{(j)} a_{11}^{(i)} de_1^{(j)} de_1^{(i)} B_0^{(i)} w^3 B_0^{(j)2} \varepsilon^6 + 2g_2^{(i)} g_2^{(j)} w \varepsilon^2 B_0^{(j)2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{33}^{(i)} = & -12vB_0^{(i)}, \quad de_1^{(i)} = a_{11}^{(i)} a_{22}^{(i)} - (a_{12}^{(i)})^2, \quad de_2^{(i)} = a_{12}^{(i)} a_{13}^{(i)} - a_{11}^{(i)} a_{23}^{(i)}, \quad de_3^{(i)} = a_{13}^{(i)} a_{22}^{(i)} - a_{12}^{(i)} a_{23}^{(i)}, \\
de_4^{(i)} = & a_{12}^{(i)} a_{13}^{(i)} + a_{11}^{(i)} a_{23}^{(i)}, \quad de_7^{(i)} = a_{33}^{(i)} de_1^{(i)} - a_{23}^{(i)} de_2^{(i)} + a_{13}^{(i)} de_3^{(i)}, \quad de_8^{(i)} = (de_7^{(i)})^2 + (b_{33}^{(i)} de_1^{(i)})^2,
\end{aligned}$$

$$de_9^{(i)} = a_{33}^{(i)} a_{11}^{(i)} + a_{13}^{(i)2},$$

$$B_0^{(i)} = \frac{(R^{(i)})^2 \omega^2}{\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} (c^{(i)})^2} B_{00}, \quad g_1^{(i)} = \frac{16}{15} \left(\frac{R^{(i)}}{c^{(i)}} \right)^2 \left(\frac{\rho R_2}{\rho_0^{(i)} h_0^{(i)}} - (-1)^i \right) de_1^{(i)} - \frac{4}{3} \left(\frac{R^{(i)}}{c^{(i)}} \right)^2 de_1^{(i)},$$

$$g_2^{(i)} = de_2^{(i)2} + (a_{33}^{(i)} a_{11}^{(i)} + (a_{13}^{(i)})^2) de_1^{(i)},$$

$$a_{11}^{(i)} = -\frac{8}{5} \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 - \frac{8}{105} (1 - \mu_0^{(i)}) + \frac{16}{105} \left(\frac{R^{(i)} \omega}{c^{(i)}} \right)^2, \quad a_{22}^{(i)} = \frac{4}{15} \frac{2R^{(i)}}{l_2} (1 + \mu_0^{(i)}),$$

$$a_{13}^{(i)} = \frac{64}{105} \frac{2R^{(i)}}{l_2} \mu_0^{(i)}, \quad (1.25)$$

$$a_{22}^{(i)} = -\frac{4}{3} \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 \left(1 + 4(a_0^{(i)})^2 \right) (1 - \mu_0^{(i)}) - \frac{16}{15} \left(1 + (a_0^{(i)})^2 \right) + \frac{16}{15} \left(\frac{R^{(i)} \omega}{c^{(i)}} \right)^2,$$

$$\begin{aligned}
a_{23}^{(i)} &= -\frac{32}{15} \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 (2 - \mu_0^{(i)}) (a_0^{(i)})^2 - \frac{32}{35} (1 + (a_0^{(i)})^2), \\
a_{33}^{(i)} &= \frac{256}{315} (1 + (a_0^{(i)})^2) + \frac{128}{5} \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^4 (a_0^{(i)})^2 + \frac{512}{105} \left(\frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 (a_0^{(i)})^2 - \\
&\quad - \frac{256}{315} \left(\frac{R^{(i)} \omega}{c^{(i)}} \right)^2 + 2\varepsilon^2 w B_0^{(i)}, \quad Q_1 = 1 - \frac{3}{\sigma} \operatorname{cth} \sigma + \frac{3}{\sigma^2}, \\
B_{00} &= -\frac{\rho R_2}{\operatorname{Re} \psi} \left[\frac{256}{315} - \frac{1}{\sigma^2} \frac{256}{105} + \frac{1}{\sigma^4} \frac{128}{5} - \frac{1}{\sigma^6} 384 Q_1 - \frac{1}{\sigma^2} \frac{128}{15} Q_1 (1 - F) \right], \\
A_{a2}^{(i)} &= \frac{4}{3} \frac{(R^{(i)})^2 \omega^2}{(c^{(i)})^2} E_z \sin \varphi_{z0}, \quad A_{b2} = -\frac{4}{3} \frac{(R^{(i)})^2 \omega^2}{(c^{(i)})^2} E_x \sin \varphi_{x0}, \\
A_{c2} &= \frac{4}{3} \frac{(R^{(i)})^2 \omega^2}{(c^{(i)})^2} E_z \cos \varphi_{z0}, \quad A_{d2} = -\frac{4}{3} \frac{(R^{(i)})^2 \omega^2}{(c^{(i)})^2} E_x \cos \varphi_{x0}, \\
A_{a3} &= \frac{16}{15} \frac{(R^{(i)})^2 \omega^2}{(c^{(i)})^2} \left(\frac{\rho R_2}{\rho_0^{(i)} h_0^{(i)}} - (-1)^i \right) E_z \sin \varphi_{z0}, \\
A_{c3} &= \frac{16}{15} \frac{(R^{(i)})^2 \omega^2}{(c^{(i)})^2} \left(\frac{\rho R_2}{\rho_0^{(i)} h_0^{(i)}} - (-1)^i \right) E_z \cos \varphi_{z0}, \\
A_{b3} &= \frac{16}{15} \frac{(R^{(i)})^2 \omega^2}{(c^{(i)})^2} \left(\frac{\rho R_2}{\rho_0^{(i)} h_0^{(i)}} - (-1)^i \right) E_x \sin \varphi_{x0}, \\
A_{d3} &= \frac{16}{15} \frac{(R^{(i)})^2 \omega^2}{(c^{(i)})^2} \left(\frac{\rho R_2}{\rho_0^{(i)} h_0^{(i)}} - (-1)^i \right) E_x \cos \varphi_{x0}.
\end{aligned}$$

а для условий (1.21) и (1.23), выражение имеет вид:

$$F = 1 - \frac{15}{\sigma^3} Q_1 \operatorname{th} \sigma.$$

Поставляя полученные коэффициенты в выражения (1.23), получим следующие выражения для прогибов внутренней и внешней оболочек:

$$u_{30}^{(i)} = -(1 - \zeta^2)^2 a_{300}^{(i)} + \sqrt{\frac{\operatorname{num}^{(i)}}{\operatorname{den}}} (1 - \zeta^2)^2 \times \quad (1.26)$$

$$\times \left[E_z \omega^2 \cos \theta \sin(\omega t + \varphi_{z0} + \eta^{(i)}(\omega)) + E_x \omega^2 \sin \theta \sin(\omega t + \varphi_{x0} + \eta^{(i)}(\omega)) \right].$$

где

$$\begin{aligned} \text{num}^{(i)} &= \left(a_{11}^{(j)} a_{11}^{(i)} d e_1^{(j)} g_1^{(i)} b_{33}^{(j)} \right)^2 + 2 \left(a_{11}^{(j)} a_{11}^{(i)} \right)^2 d e_1^{(j)} d e_1^{(i)} g_1^{(j)} g_1^{(i)} b_{33}^{(j)} b_{33}^{(i)} + \\ &+ \left(a_{11}^{(j)} a_{11}^{(i)} d e_1^{(j)} g_1^{(i)} b_{33}^{(i)} \right)^2 + 4 w \varepsilon^2 a_{11}^{(j)} \left(a_{11}^{(i)} \right)^2 d e_1^{(i)} g_1^{(i)} g_1^{(j)} g_2^{(j)} B_0^{(i)} + \\ &+ 4 w^2 \varepsilon^4 \left(a_{11}^{(j)} a_{11}^{(i)} d e_1^{(i)} g_1^{(j)} B_0^{(i)} \right)^2 + \left(a_{11}^{(i)} g_1^{(i)} g_1^{(j)} \right)^2, \quad i=1,2, \quad j=1,2, \quad i \neq j; \\ \text{den} &= \left(g_2^{(1)} g_2^{(2)} \right)^2 + \left(288 v^2 - 8 w^2 \varepsilon^4 \right) a_{11}^{(1)} a_{11}^{(2)} d e_1^{(1)} d e_1^{(2)} g_2^{(1)} g_2^{(2)} B_0^{(1)} B_0^{(2)} + \\ &+ \left(16 w^2 \varepsilon^4 + 2304 v^2 \right) w^2 \varepsilon^4 \left(a_{11}^{(1)} a_{11}^{(2)} d e_1^{(1)} d e_1^{(2)} B_0^{(1)} B_0^{(2)} \right)^2 + 144 v^2 \left(d e_1^{(1)} a_{11}^{(1)} g_2^{(2)} B_0^{(1)} \right)^2 + \\ &+ 144 v^2 \left(d e_1^{(2)} a_{11}^{(2)} g_2^{(1)} B_0^{(2)} \right)^2 - 1152 v^2 w \varepsilon^2 \left(a_{11}^{(1)} d e_1^{(1)} B_0^{(1)} \right)^2 a_{11}^{(2)} g_2^{(2)} d e_1^{(2)} B_0^{(2)} - \\ &- 1152 v^2 w \varepsilon^2 a_{11}^{(1)} g_2^{(1)} d e_1^{(1)} B_0^{(1)} \left(a_{11}^{(2)} d e_1^{(2)} B_0^{(2)} \right)^2; \\ a_{300}^{(i)} &= (-1)^i p_0 \left(R^{(i)} \right)^2 / \left\{ \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \left(c^{(i)} \right)^2 \left[\frac{16}{21} - \frac{32}{147} \left(\mu_0^{(i)} \right)^2 + 24 \left(a_0^{(i)} \right)^2 \left(\frac{2 R^{(i)}}{l_2} \right)^4 \right] \right\}, \quad i=1,2; \end{aligned}$$

$$\eta^{(i)}(\omega) = \frac{F_{num}^{(i)}}{F_{den}^{(i)}},$$

$$\begin{aligned} F_{num}^{(i)} &= d e_1^{(i)} D r^{(i)} \left(d e_1^{(i)} a_{11}^{(j)} c c c^{(j)} d e_9^{(i)} d e_2^{(j)} - d e_1^{(i)} a_{11}^{(i)} d e_9^{(j)} d e_1^{(j)} c c c_2^{(i)} - \right. \\ &- d e_1^{(i)} a_{11}^{(j)} d e_9^{(i)} d e_1^{(j)} c c c_2^{(j)} - a_{11}^{(j)} d e_2^{(i)2} c o f_1^{(j)} + a_{11}^{(i)} d e_2^{(j)2} c o f_1^{(i)} - a_{11}^{(i)} c c c_1^i d e_9^{(j)} d e_2^{(i)} d e_1^{(j)} \left. \right) + \\ &+ 2 d e_1^{(i)} a_{11}^{(i)} a_{11}^{(j)} \varepsilon^2 w D r^{(i)} \left(d e_1^{(i)} c o f_1^{(j)} B 0 N e w^{(i)} - d e_1^{(j)} c o f_1^{(i)} B 0 N e w^{(j)} \right) D r^{(i)}, \\ &i=1,2, \quad j=1,2, \quad i \neq j; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{den}^{(i)} &= -a_{11}^{(j)2} d e_1^{(j)2} c o f^{(i)} b_{33}^{(j)2} K K^{(i)} - b_{33}^{(j)} a_{11}^{(j)} d e_1^{(j)} b_{33}^{(i)} a_{11}^{(i)} d e_1^{(i)} K K^{(i)} c o f^{(j)} - \\ &- b_{33}^{(j)} a_{11}^{(j)2} d e_1^{(j)} b_{33}^{(i)} d e_1^{(i)} K K^{(j)} c o f^{(i)} - a_{11}^{(i)} a_{11}^{(j)} d e_1^{(i)2} c o f^{(j)} b_{33}^{(i)2} K K^{(j)} - \\ &- 2 a_{11}^{(j)} d e_1^{(i)} c o f^{(i)} c o f^{(j)} B 0 N e w^{(i)} w \varepsilon^2 K K^{(j)} + 2 a_{11}^{(j)2} d e_1^{(j)2} a_{11}^{(i)} d e_1^{(i)} B 0 N e w^{(i)} w \varepsilon^2 b_{33}^{(j)2} K K^{(i)} + \\ &+ 2 a_{11}^{(j)2} a_{11}^{(i)} d e_1^{(i)2} d e_1^{(j)} b_{33}^{(j)} B 0 N e w^{(i)} w \varepsilon^2 b_{33}^{(i)} K K^{(j)} + \\ &+ 2 d e_1^{(j)2} a_{11}^{(j)2} a_{11}^{(i)} d e_1^{(i)} b_{33}^{(j)} B 0 N e w^{(j)} w \varepsilon^2 b_{33}^{(i)} K K^{(i)} + \\ &+ 2 a_{11}^{(j)2} a_{11}^{(i)} d e_1^{(i)2} d e_1^{(j)} B 0 N e w^{(j)} w \varepsilon^2 b_{33}^{(i)2} K K^{(j)} + \\ &+ 4 B 0 N e w^{(j)} c o f^{(j)} a_{11}^{(j)} a_{11}^{(i)} d e_1^{(j)} d e_1^{(i)} B 0 N e w^{(i)} w^2 \varepsilon^4 K K^{(i)} + \\ &+ 8 B 0 N e w^{(i)2} B 0 N e w^{(j)} a_{11}^{(i)} d e_1^{(i)2} d e_1^{(j)} a_{11}^{(j)2} w^3 \varepsilon^6 K K^{(j)} - c o f^{(i)} c o f^{(j)2} K K^{(i)}, \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad i \neq j.$$

Из формул (1.26) находим амплитудно-частотные характеристики для внешней и внутренней оболочек а

$$A^{(i)}(\omega) = \sqrt{\frac{\text{num}^{(i)}}{\text{den}}}, \quad i = 1, 2 \quad (1.27)$$

Отметим, что полученные выражения имеют одинаковый знаменатель. Следовательно, данные амплитудно-частотные характеристики должны определять не колебания каждой из оболочек, а будет определять амплитудно-частотные характеристики системы «упругая оболочка – вязкая несжимаемая жидкость – упругая оболочка».

2.2 Задача гидроупругости для трех соосных оболочек

Аналогичный подход будем применять для более сложной задачи.

Будем рассматривать следующую общую модель (Рис 2).

Будем считать, что внешняя оболочка 1, средняя оболочка 2 и внутренняя оболочка 3 механической системы являются упругими цилиндрическими оболочками.

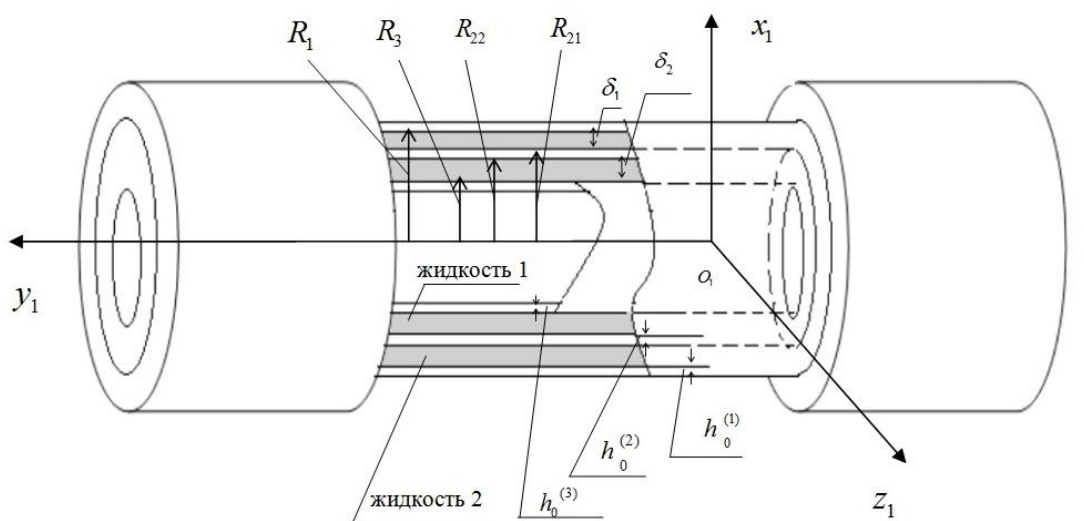


Рис. 2. Механическая модель

Внутренний радиус внешней оболочки обозначим R_1 , а внешний радиус внутренней оболочки – R_3 , а внешний и внутренний радиус средней оболочки соответственно R_{21} и R_{22} . Крепление внутренней, средней и внешней оболочек обеспечивает жесткое защемление. Наружная поверхность внешней оболочки и поверхность средней оболочки образуют цилиндр в цилиндре длиной l_1 . Вязкая несжимаемая жидкость 1 и 2 полностью заполняет зазор между стенками трех оболочек.

Также поверхность средней оболочки и внутренняя поверхность оболочки 3 образуют цилиндр в цилиндре длиной l_2 .

Будем считать, что длина l_1 равна длине l_2 и обозначим её 1.

Будем предполагать, что радиальный зазор цилиндрической щели в цилиндре 1 δ_1 значительно меньше внешнего радиуса средней оболочки 2, то есть $\delta_1 = R_1 - R_{21} \ll R_{21}$.

Также будем предполагать, что радиальный зазор цилиндрической щели в цилиндре 2 δ_2 значительно меньше внутреннего радиуса средней оболочки 2, то есть $\delta_2 = R_{22} - R_3 \ll R_3$.

Скалярная форма уравнений динамики жидкости 1 и жидкости 2 имеет вид:

$$W_{11r} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial r} + \nu_1 \left(\frac{\partial^2 V_{1r}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{1r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_{1r}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_{1r}}{\partial y^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_{1\theta}}{\partial \theta} - \frac{V_{1r}}{r^2} \right),$$

$$W_{22r} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial r} + \nu_2 \left(\frac{\partial^2 V_{2r}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{2r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_{2r}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_{2r}}{\partial y^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_{2\theta}}{\partial \theta} - \frac{V_{2r}}{r^2} \right)$$

$$W_{11\theta} = -\frac{1}{\rho_1 r} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} + \nu_1 \left(\frac{\partial^2 V_{1\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{1\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_{1\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_{1\theta}}{\partial y^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_{1r}}{\partial \theta} - \frac{V_{1\theta}}{r^2} \right),$$

$$W_{22\theta} = -\frac{1}{\rho_2 r} \frac{\partial p_2}{\partial \theta} + \nu_2 \left(\frac{\partial^2 V_{2\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{2\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_{2\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_{2\theta}}{\partial y^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_{2r}}{\partial \theta} - \frac{V_{2\theta}}{r^2} \right)$$

$$W_{11y} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y} + \nu_1 \left(\frac{\partial^2 V_{1y}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{1y}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_{1y}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_{1y}}{\partial y^2} \right),$$

$$W_{22y} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial y} + \nu_2 \left(\frac{\partial^2 V_{2y}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{2y}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_{2y}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_{2y}}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial V_{1r}}{\partial r} + \frac{V_{1r}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{1\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial V_{1y}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial V_{2r}}{\partial r} + \frac{V_{2r}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{2\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial V_{2y}}{\partial y} = 0.$$

где

$$W_{11r} = W_{1z1} \cos \theta + W_{1x1} \sin \theta +$$

$$+ \frac{\partial V_{1r}}{\partial t} + V_{1r} \frac{\partial V_{1r}}{\partial r} + \frac{V_{1\theta} \partial V_{1r}}{r \partial \theta} + V_{1y} \frac{\partial V_{1r}}{\partial y} - \frac{V_{1\theta}^2}{r},$$

$$W_{22r} = W_{1z1} \cos \theta + W_{1x1} \sin \theta +$$

$$+ \frac{\partial V_{2r}}{\partial t} + V_{2r} \frac{\partial V_{2r}}{\partial r} + \frac{V_{2\theta} \partial V_{2r}}{r \partial \theta} + V_{2y} \frac{\partial V_{2r}}{\partial y} - \frac{V_{2\theta}^2}{r},$$

$$W_{11\theta} = -W_{1z1} \sin \theta + W_{1x1} \cos \theta +$$

$$+ \frac{\partial V_{1\theta}}{\partial t} + V_{1r} \frac{\partial V_{1\theta}}{\partial r} + \frac{V_{1\theta}}{r} \frac{\partial V_{1\theta}}{\partial \theta} + V_{1y} \frac{\partial V_{1\theta}}{\partial y} + \frac{V_{1r} V_{1\theta}}{r},$$

$$W_{22\theta} = -W_{1z1} \sin \theta + W_{1x1} \cos \theta +$$

$$+ \frac{\partial V_{2\theta}}{\partial t} + V_{2r} \frac{\partial V_{2\theta}}{\partial r} + \frac{V_{2\theta}}{r} \frac{\partial V_{2\theta}}{\partial \theta} + V_{2y} \frac{\partial V_{2\theta}}{\partial y} + \frac{V_{2r} V_{2\theta}}{r},$$

$$W_{11y} = \frac{\partial V_{1y}}{\partial t} + V_{1r} \frac{\partial V_{1y}}{\partial r} + \frac{V_{1\theta}}{r} \frac{\partial V_{1y}}{\partial \theta} + V_{1y} \frac{\partial V_{1y}}{\partial y},$$

$$W_{22y} = \frac{\partial V_{2y}}{\partial t} + V_{2r} \frac{\partial V_{2y}}{\partial r} + \frac{V_{2\theta}}{r} \frac{\partial V_{2y}}{\partial \theta} + V_{2y} \frac{\partial V_{2y}}{\partial y}.$$

Граничные условия для системы уравнений (1.2) на непроницаемой поверхности внутренней и внешней оболочек в цилиндрической щели, представляют собой условия прилипания жидкости 1 и жидкости 2 к стенкам, запишутся следующим образом:

$$V_{1r} = \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t}, \quad V_{1\theta} = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial t}, \quad V_{1y} = -\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t} \quad \text{при } r = R_3 + \delta_1 + h_0^{(2)} + \delta_2 + u_3^{(1)},$$

$$V_{1r} = \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t}, \quad V_{1\theta} = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial t}, \quad V_{1y} = -\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t} \quad \text{при } r = R_3 + h_0^{(2)} + \delta_2 + u_3^{(2)},$$

$$V_{2r} = \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t}, \quad V_{2\theta} = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial t}, \quad V_{2y} = -\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t} \text{ при } r = R_3 + u_3^{(3)},$$

$$V_{2r} = \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t}, \quad V_{2\theta} = \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial t}, \quad V_{2y} = -\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t} \text{ при } r = R_3 + \delta_2 + u_3^{(2)},$$

$u_1^{(i)} = u_1^{(i)}(y, \theta, t)$ – продольное упругое перемещение оболочки, положительное в направлении $\bar{n}_s$, противоположным направлению $\bar{j}$;

$u_2^{(i)} = u_2^{(i)}(y, \theta, t)$ – окружное упругое перемещение оболочки в направлении $\bar{n}_\theta$;

$u_3^{(i)} = u_3^{(i)}(y, \theta, t)$ – прогиб оболочки, положительный в направлении $\bar{n}$, совпадающим с $\bar{n}_r$ и противоположным направлению к центру кривизны;

$\bar{u}^{(i)} = u_1^{(i)}\bar{n}_s + u_2^{(i)}\bar{n}_\theta + u_3^{(i)}\bar{n}$ – вектор упругих перемещений оболочки.

Здесь и далее верхний индекс $i=1$ относится к внешней оболочке, $i=2$ – к средней оболочке $i=3$ – к внутренней оболочке.

Кроме того, необходимы условия периодичности параметров течения по θ с периодом 2π (условия замкнутости потока жидкости).

Скалярные уравнения динамики внешней и внутренней упругих цилиндрических оболочек, основанные на гипотезах Кирхгофа-Лява, с учётом переносного движения относительно инерциального пространства, запишутся в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial y^2} + \frac{1-\mu_0^{(i)}}{2} \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial \theta^2} - \frac{1+\mu_0^{(i)}}{2} \frac{1}{R^{(i)}} \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial y \partial \theta} - \frac{\mu_0^{(i)}}{R^{(i)}} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} = \\ & = \frac{1-(\mu_0^{(i)})^2}{E^{(i)} h_0^{(i)}} [\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} W_{Os}^{(i)} - G_1^{(i)}]; \\ & -\frac{1+\mu_0^{(i)}}{2} \frac{1}{R^{(i)}} \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial y \partial \theta} + \frac{1-\mu_0^{(i)}}{2} \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial y^2} + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial \theta^2} + \\ & + (a_0^{(i)})^2 \left[2(1-\mu_0^{(i)}) \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial y^2} + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial \theta^2} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial \theta} - (a_0^{(i)})^2 \left[(2 - \mu_0^{(i)}) \frac{\partial^3 u_3^{(i)}}{\partial y^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 u_3^{(i)}}{\partial \theta^3} \right] = \frac{1 - (\mu_0^{(i)})^2}{E^{(i)} h_0^{(i)}} [\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} W_{O\theta}^{(i)} - G_2^{(i)}], \\
& - \frac{\mu_0^{(i)}}{R^{(i)}} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial y} + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial \theta} - (a_0^{(i)})^2 \left[(2 - \mu_0^{(i)}) \frac{\partial^3 u_2^{(i)}}{\partial y^2 \partial \theta} + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^3 u_2^{(i)}}{\partial \theta^3} \right] + \\
& + \frac{u_3^{(i)}}{R^{(i)}} + (a_0^{(i)})^2 \left[(R^{(i)})^2 \frac{\partial^4 u_3^{(i)}}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 u_3^{(i)}}{\partial y^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{(R^{(i)})^2} \frac{\partial^4 u_3^{(i)}}{\partial \theta^4} \right] = \\
& = \frac{1 - (\mu_0^{(i)})^2}{E^{(i)} h_0^{(i)}} [-\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} W_{On}^{(i)} + G_3^{(i)}], \quad i = 1, 2, 3,
\end{aligned}$$

где верхний индекс 1 относится к внешней оболочке, а индекс 2 – к средней оболочке и индекс 3 – к внутренней оболочке;

$E^{(i)}$ – модуль Юнга,

$\mu_0^{(i)}$ – коэффициент Пуассона,

$\rho_0^{(i)}$ – плотность материала,

$R^{(i)}$ – радиус срединной поверхности,

$h_0^{(i)}$ – толщина оболочки,

$W_{OS}^{(i)}, W_{O\theta}^{(i)}, W_{On}^{(i)}$ – проекции абсолютного ускорения единицы площади

срединной поверхности оболочек $\bar{W}_O^{(i)} = \bar{W}_1 + \frac{\partial^2 \bar{u}^{(i)}}{\partial t^2}$, $i = 1, 2, 3$ на оси $\bar{n}_s, \bar{n}_\theta, \bar{n}$

(продольное и окружное направления в срединной поверхности оболочек и по нормали к ней), имеющие вид:

$$\begin{aligned}
G_1^{(1)} &= q_s^{(1)}, \quad G_1^{(2)} = q_{s2}^{(2)} + q_{s1}^{(2)}, \quad G_1^{(3)} = q_3^{(3)}, \\
G_2^{(1)} &= q_\theta^{(1)}, \quad G_2^{(2)} = q_{\theta 2}^{(2)} + q_{\theta 1}^{(2)}, \quad G_2^{(3)} = q_\theta^{(3)}, \\
G_3^{(1)} &= -q_n^{(1)}, \quad G_3^{(2)} = q_{n2}^{(2)} - q_{n1}^{(2)}, \quad G_3^{(3)} = q_n^{(3)}, \\
W_{OS}^{(i)} &= \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial t^2},
\end{aligned}$$

$$W_{O\theta}^{(i)} = W_{1x1} \cos \theta - W_{1z1} \sin \theta + \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial t^2},$$

$$W_{On}^{(i)} = W_{1x1} \sin \theta + W_{1z1} \cos \theta + \frac{\partial^2 u_3^{(i)}}{\partial t^2}, \quad i=1,2,3.$$

Напряжения на поверхностях оболочек со стороны слоя жидкости записываются в виде:

$$q_s^{(1)} = -\left[P_{ry}^{(1)} \cos^{(1)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{\theta y}^{(1)} \cos^{(1)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) + P_{yy}^{(1)} \cos^{(1)}(\bar{n}, \bar{j})\right]_{r=r^{(1)}};$$

$$q_\theta^{(1)} = \left[P_{r\theta}^{(1)} \cos^{(1)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{\theta\theta}^{(1)} \cos^{(1)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) + P_{\theta y}^{(1)} \cos^{(1)}(\bar{n}, \bar{j})\right]_{r=r^{(1)}};$$

$$q_n^{(1)} = \left[P_{rr}^{(1)} \cos^{(1)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{r\theta}^{(1)} \cos^{(1)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) + P_{ry}^{(1)} \cos^{(1)}(\bar{n}, \bar{j})\right]_{r=r^{(1)}}; \quad i=1,2,3,$$

$$q_{s1}^{(2)} = -\left[P_{ry}^{(1)} \cos^{(21)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{\theta y}^{(1)} \cos^{(21)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) + P_{yy}^{(1)} \cos^{(21)}(\bar{n}, \bar{j})\right]_{r=R_3+\delta_2+h_0^{(2)}+u_3^{(2)}};$$

$$q_{s2}^{(2)} = -\left[P_{ry}^{(2)} \cos^{(22)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{\theta y}^{(2)} \cos^{(22)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) + P_{yy}^{(2)} \cos^{(22)}(\bar{n}, \bar{j})\right]_{r=R_3+\delta_2+u_3^{(2)}}$$

$$q_{1\theta}^{(2)} = \left[P_{r\theta}^{(1)} \cos^{(21)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{\theta\theta}^{(1)} \cos^{(21)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) + P_{\theta y}^{(1)} \cos^{(21)}(\bar{n}, \bar{j})\right]_{r=R_3+\delta_2+h_0^{(2)}+u_3^{(2)}}$$

$$q_{2\theta}^{(2)} = \left[P_{r\theta}^{(2)} \cos^{(22)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{\theta\theta}^{(2)} \cos^{(22)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) + P_{\theta y}^{(2)} \cos^{(22)}(\bar{n}, \bar{j})\right]_{r=R_3+\delta_2+u_3^{(2)}};$$

$$q_{n1}^{(2)} = \left[P_{rr}^{(1)} \cos^{(21)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{r\theta}^{(1)} \cos^{(21)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) + P_{ry}^{(1)} \cos^{(21)}(\bar{n}, \bar{j})\right]_{r=R_3+\delta_2+h_0^{(2)}+u_3^{(2)}};$$

$$q_{n2}^{(2)} = \left[P_{rr}^{(2)} \cos^{(22)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{r\theta}^{(2)} \cos^{(22)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) + P_{ry}^{(2)} \cos^{(22)}(\bar{n}, \bar{j})\right]_{r=R_3+\delta_2+u_3^{(2)}};$$

$$q_s^{(3)} = -\left[P_{ry}^{(2)} \cos^{(3)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{\theta y}^{(2)} \cos^{(3)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) + P_{yy}^{(2)} \cos^{(3)}(\bar{n}, \bar{j})\right]_{r=r^{(3)}};$$

$$q_\theta^{(3)} = \left[P_{r\theta}^{(2)} \cos^{(3)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{\theta\theta}^{(2)} \cos^{(3)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) + P_{\theta y}^{(2)} \cos^{(3)}(\bar{n}, \bar{j})\right]_{r=r^{(3)}};$$

$$q_n^{(3)} = \left[P_{rr}^{(2)} \cos^{(3)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{r\theta}^{(2)} \cos^{(3)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) + P_{ry}^{(2)} \cos^{(3)}(\bar{n}, \bar{j})\right]_{r=r^{(3)}}; \quad i=1,2,3,$$

$$r^{(1)} = R_3 + \delta_1 + h_0^{(2)} + \delta_2 + u_3^{(1)}; \quad r^{(3)} = R_3 + u_3^{(3)},$$

$$P_{rr}^{(1)} = -p_1 + 2\rho_1 v_1 \frac{\partial V_{1r}}{\partial r}; \quad P_{r\theta}^{(1)} = \rho_1 v_1 \left(\frac{\partial V_{1\theta}}{\partial r} - \frac{V_{1\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{1r}}{\partial \theta} \right);$$

$$P_{\theta\theta}^{(1)} = -p_1 + 2\rho_1 v_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_{1\theta}}{\partial \theta} + \frac{V_{1r}}{r} \right); \quad P_{ry}^{(1)} = \rho_1 v_1 \left(\frac{\partial V_{1y}}{\partial r} + \frac{\partial V_{1r}}{\partial y} \right);$$

$$P_{yy}^{(1)} = -p_1 + 2\rho_1 v_1 \frac{\partial V_{1y}}{\partial y}; P_{\theta y}^{(1)} = \rho_1 v_1 \left(\frac{\partial V_{1\theta}}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{1y}}{\partial \theta} \right);$$

$$P_{rr}^{(2)} = -p_2 + 2\rho_2 v_2 \frac{\partial V_{2r}}{\partial r}; P_{r\theta}^{(2)} = \rho_2 v_2 \left(\frac{\partial V_{2\theta}}{\partial r} - \frac{V_{2\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{2r}}{\partial \theta} \right);$$

$$P_{\theta\theta}^{(2)} = -p_2 + 2\rho_2 v_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_{2\theta}}{\partial \theta} + \frac{V_{2r}}{r} \right); P_{ry}^{(2)} = \rho_2 v_2 \left(\frac{\partial V_{2y}}{\partial r} + \frac{\partial V_{2r}}{\partial y} \right);$$

$$P_{yy}^{(2)} = -p_2 + 2\rho_2 v_2 \frac{\partial V_{2y}}{\partial y}; P_{\theta y}^{(2)} = \rho_2 v_2 \left(\frac{\partial V_{2\theta}}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{2y}}{\partial \theta} \right);$$

$$\cos^{(1)}(\bar{n}, \bar{n}_r) = \frac{r}{|\bar{N}|^{(1)}}; \cos^{(1)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) = -\frac{1}{|\bar{N}|^{(1)}} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial \theta};$$

$$\cos^{(1)}(\bar{n}, \bar{j}) = -\frac{r}{|\bar{N}|^{(1)}} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y} \Big|_{r=R_3+\delta_2+h_0^{(2)}+\delta_1+u_3^{(1)}};$$

$$\cos^{(21)}(\bar{n}, \bar{n}_r) = \frac{r}{|\bar{N}|^{(21)}}; \cos^{(21)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) = -\frac{1}{|\bar{N}|^{(21)}} \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial \theta};$$

$$\cos^{(1)}(\bar{n}, \bar{j}) = -\frac{r}{|\bar{N}|^{(21)}} \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial y} \Big|_{r=R_3+\delta_2+h_0^{(2)}+u_3^2};$$

$$\cos^{(22)}(\bar{n}, \bar{n}_r) = \frac{r}{|\bar{N}|^{(22)}}; \cos^{(22)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) = -\frac{1}{|\bar{N}|^{(22)}} \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial \theta};$$

$$\cos^{(2)}(\bar{n}, \bar{j}) = -\frac{r}{|\bar{N}|^{(22)}} \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial y} \Big|_{r=R_3+\delta_2+u_3^{(2)}};$$

$$\cos^{(3)}(\bar{n}, \bar{n}_r) = \frac{r}{|\bar{N}|^{(3)}}; \cos^{(3)}(\bar{n}, \bar{n}_\theta) = -\frac{1}{|\bar{N}|^{(3)}} \frac{\partial u_3^{(3)}}{\partial \theta};$$

$$\cos^{(3)}(\bar{n}, \bar{j}) = -\frac{r}{|\bar{N}|^{(3)}} \frac{\partial u_3^{(3)}}{\partial y} \Big|_{r=R_3+u_3^{(3)}};$$

$$|\bar{N}|^{(1)} = \left\{ \left(R_3 + \delta_2 + h_0^{(2)} + \delta_1 + u_3^{(1)} \right)^2 \left[1 + \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y} \right]^2 + \left(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$|\bar{N}|^{(21)} = \left\{ \left(R_3 + \delta_2 + h_0^{(2)} + \delta_1 + u_3^{(2)} \right)^2 \left[1 + \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial y} \right]^2 + \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial \theta} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$|\bar{N}|^{(22)} = \left\{ \left(R_3 + \delta_2 + u_3^{(2)} \right)^2 \left[1 + \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial y} \right]^2 + \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial \theta} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$|\bar{N}|^{(3)} = \left\{ \left(R_3 + u_3^{(3)} \right)^2 \left[1 + \frac{\partial u_3^{(3)}}{\partial y} \right]^2 + \left(\frac{\partial u_3^{(3)}}{\partial \theta} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}; \left(a_0^{(i)} \right)^2 = \frac{\left(h_0^{(i)} \right)^2}{12 \left(R^{(i)} \right)^2}.$$

Граничные условия для перемещений оболочки состоят в условиях жесткого защемления на торцах

$$u_1^{(i)} = u_2^{(i)} = u_3^{(i)} = \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \pm \frac{l_2}{2}.$$

Кроме того, для обеих оболочек ставятся условия периодичности параметров по θ с периодом 2π .

Таким образом, получаем математическую модель механической системы, состоящей из трех соосных упругих цилиндрических оболочек, взаимодействующих через слой вязкой несжимаемой жидкости при наличии внешней вибрации.

2.3 Выводы к разделу 2

В разделе 2 был рассмотрен ход решения задачи гидроупругости для двух соосных цилиндрических оболочек, взаимодействующих с вязкой несжимаемой жидкости. Данная задача была выбрана как типовая для проверки используемого метода решения и применения в дальнейшем параллельных вычислений

Кроме того, приведена постановка задачи гидроупругости для колебаний трех соосных оболочек.

3 Реализация метода исследования с использованием параллельных вычислений

3.1 Реализация, программного способа аналитического вычисления без использования параллельных вычислений

Как показали исследования, проведенные в разделе 2, представленная задача имеет решение. Однако, прямое численное решение ее достаточно сложно, поэтому будем использовать комбинированный метод: часть задачи будем решать в ручном режиме, часть – в автоматизированном. При этом будем автоматизировать не только численные вычисления, но и аналитические, что позволит использовать полученный программный комплекс для более широкого класса задач.

Для этого разобьём разрабатываемый проблемно-аналитический комплекс на два независимых модуля: аналитического поиска решения и численного вычисления. В каждом из этих модулей присутствует большая временная программная проблема, которую можно решить с использованием параллельного вычисления.

Рассмотрим первый модуль с аналитическим вычислением. Схему работы программного модуля можно описать следующим образом (Рис.2):

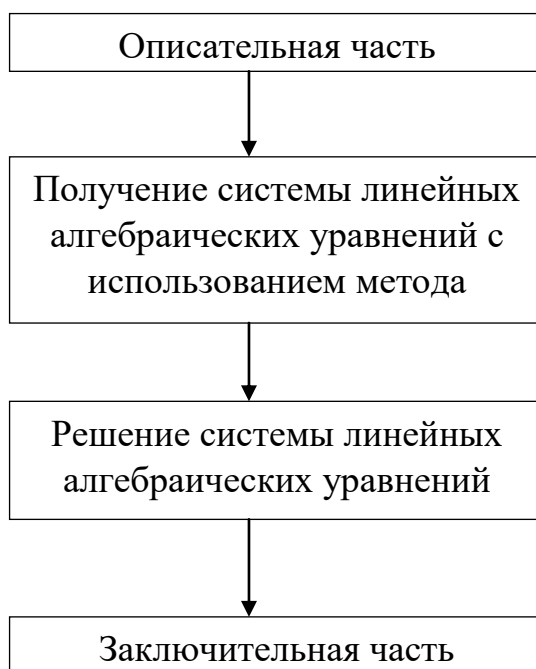


Рис. 2 Схема работы программного модуля

Модуль аналитического вычисления амплитудных частотных характеристик фактически представляет собой последовательность действий, которые необходимо совершить для получения результата. Причем, выражения постоянно преобразовывались для получения основного и промежуточных результатов, т.к. в противном случае, высокая вычислительная не позволяла получить результат.

Так, например, для решения системы линейных уравнений, получающаяся в результате применения метода Бубнова-Галеркина не могла быть решена не методом Гаусса, не методом Крамера, не методом обратной матрицы. Поэтому был реализован метод последовательной подстановки решения системы линейных уравнений.

Программа приведена в приложении А.

Вычислительный модуль представляет собой единую процедуру Work, в которую считываются исходные данные из файла и вывод также осуществляется в файл. Внутри процедуры была реализована другая функция RevoltingMoment(omega), которая вычисляет значения амплитудных частотных характеристик для каждой из оболочек для каждой из частот колебаний. Диапазон колебаний выбран от 1 до 20000 Гц (от 1 до 126000 рад/с).

Наибольшая проблема была представлена нахождением максимумов и минимумов значений амплитудных частотных характеристик. Для реализации данной проблемы было использовано определения локальных максимумов и минимумов функции, использованием упрощения по частоте. Которая была реализована следующим образом:

```
> GrantOmega:=solve(RezDat[3]=4,aomega):  
aRenolds:=delta^2*aomega/nu:  
aepsilon:=sqrt(aRenolds/2):  
eee[1][1]:=simplify(diff(simplify(subs(vvv=1,subs(www=1.2,RezDat[1]))),aom  
ega)):  
eee[2][1]:=simplify(diff(simplify(subs({www=1.2,vvv=1},RezDat[2])),aomega)  
):  
eee[1][2]:=simplify(diff(simplify(subs({www=1,vvv=aeepsilon/6},RezDat[1])),a  
omega)):
```

```
eee[2][2]:=simplify(diff(simplify(subs({www=1,vvv=aepsilon/6},RezDat[2])),a
omega)):
```

```
tmp[1][1]:=solve(numer(simplify(expand(eee[1][1]))),aomega):
print(1);
tmp[2][1]:=solve(numer(simplify(expand(eee[2][1]))),aomega):
print(2);
tmp[1][2]:=solve(numer(simplify(expand(eee[1][2]))),aomega):
print(3);
tmp[2][2]:=solve(numer(simplify(expand(eee[2][2]))),aomega):
print(4);
```

```
for j1 from 1 to 2 do
kk:=1:
for j2 from 1 to 2 do
for i from 1 to nops([tmp[j1][j2]]) do
if (whattype(tmp[j1][j2][i])='float') and (tmp[j1][j2][i]>0)
then
if (tmp[j1][j2][i]<GrantOmega) and (j2=1)
then
RootN[j1][kk]:=tmp[j1][j2][i]:
kk:=kk+1:
else
if (tmp[j1][j2][i]>GrantOmega) and (j2=2)
then
RootN[j1][kk]:=tmp[j1][j2][i]:
kk:=kk+1:
fi:
fi:
fi:
od:
od:
od:
```

```
for j1 from 1 to 2 do
kk:=1:
kk1:=1:
for i from 1 to nops(op(op([eval(RootN[j1]))))) do
if RootN[j1][i]<GrantOmega
then Teee:=eee[j1][1]:
else Teee:=eee[j1][2]:
fi:
if eval(subs(aomega=RootN[j1][i],diff(Teee,aomega)))<0
then
MaxRoot[j1][kk]:=RootN[j1][i]:
```

```

kk:=kk+1:
fi:

if (eval(subs(aomega=RootN[j1][i],diff(Teee,aomega)))<0) or
(eval(subs(aomega=RootN[j1][i],diff(Teee,aomega)))>0)
then
MaxRoot1[j1][kk1]:=RootN[j1][i]:
kk1:=kk1+1:
fi:

od;
od:

```

Расчеты проводились с помощью разработанной программы для модели с параметрами: $R_2=1.775 \cdot 10^{-1}$ м, $l_2=7.82 \cdot 10^{-1}$ м, $\delta=2 \cdot 10^{-2}$ м, $\rho=10^3$ кг/м³, $\nu=10^{-6}$ м²/с, $h_0^{(1)}=1.85 \cdot 10^{-2}$ м, $E^{(1)}=1,6 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu_0^{(1)}=0,25$, $\rho_0^{(1)}=7,4 \cdot 10^3$ кг/м³, $h_0^{(2)}=9.25 \cdot 10^{-2}$ м, $E^{(2)}=6,96 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu_0^{(2)}=3,4 \cdot 10^{-1}$, $\rho_0^{(2)}=2,7 \cdot 10^3$ кг/м³ (Табл. 3.1-3.7).

Приведены расчеты для амплитудных частотных характеристик каждой из оболочек. Как показали расчеты – резонансов может быть достаточно много, но большое число этих резонансов незначительное и можно наблюдать только 6 значимых резонансных частот для амплитудных частотных характеристик каждой из оболочек. Более того, можно заметить, что сами частоты для внешней и внутренней оболочек совпадают. Приведены амплитудные частотные характеристики при различных параметрах

Таблица 3.1

Значения резонансных частот, величин АЧХ и коэффициентов динамичности для исходного набора параметров (открытые торцы)

Частота ω , рад/с	$A^{(1)}(\omega)$, с ²	$K^{(1)}(\omega)$		Частота ω , рад/с	$A^{(2)}(\omega)$, с ²	$K^{(2)}(\omega)$
3434	2,25E-05	6,84E+02		3434	4,73E-06	8,34E+02
11383	1,08E-03	3,28E+04		11383	1,19E-03	2,10E+05
27383	8,90E-07	2,71E+01		27383	5,97E-07	1,05E+02
42861	7,50E-07	2,29E+01		42861	3,17E-07	5,59E+01
47851	1,28E-06	3,90E+01		47851	1,39E-06	2,45E+02
60680	8,24E-06	2,51E+02		60680	9,15E-06	1,61E+03

Таблица 3.2

Значения резонансных частот, величин АЧХ и коэффициентов динамичности с увеличенной в два раза шириной цилиндрической щели ($\delta=4 \cdot 10^{-2}$ м)
(открытые торцы)

Частота ω , рад/с	$A^{(1)}(\omega)$, с ²	$K^{(1)}(\omega)$		Частота ω , рад/с	$A^{(2)}(\omega)$, с ²	$K^{(2)}(\omega)$
4373	5,75E-05	1,68E+03		4373	1,38E-05	1,94E+03
10437	2,12E-03	6,19E+04		10437	2,47E-03	3,48E+05
25842	2,26E-06	6,58E+01		25842	1,15E-06	1,61E+02
42357	1,39E-06	4,04E+01		42357	5,43E-07	7,64E+01
47242	5,74E-06	1,67E+02		47242	6,83E-06	9,62E+02
59255	1,16E-05	3,38E+02		59255	1,42E-05	2,01E+03

Таблица 3.3

Значения резонансных частот, величин АЧХ и коэффициентов динамичности с уменьшенной в два раза шириной цилиндрической щели ($\delta=1 \cdot 10^{-2}$ м)
(открытые торцы)

Частота ω , рад/с	$A^{(1)}(\omega)$, с ²	$K^{(1)}(\omega)$		Частота ω , рад/с	$A^{(2)}(\omega)$, с ²	$K^{(2)}(\omega)$
2489	7,51E-06	2,34E+02		2489	2,17E-06	3,06E+02
10409	2,35E-03	7,34E+04		10409	2,44E-03	3,44E+05
28110	2,46E-07	7,67E+00		28110	1,94E-07	2,73E+01
43128	4,32E-07	1,35E+01		43128	9,29E-07	1,31E+02
47304	2,51E-06	7,82E+01		47304	2,60E-06	3,67E+02
59076	9,21E-06	2,87E+02		59076	9,69E-06	1,36E+03

Таблица 3.4

Значения резонансных частот, величин АЧХ и коэффициентов динамичности с увеличенной в 100 раз вязкостью жидкости ($\nu=10^{-4}$ м)
(открытые торцы)

Частота ω , рад/с	$A^{(1)}(\omega)$, с ²	$K^{(1)}(\omega)$		Частота ω , рад/с	$A^{(2)}(\omega)$, с ²	$K^{(2)}(\omega)$
3362	1,99E-06	6,06E+01		3363	5,40E-07	7,61E+01
10417	2,26E-04	6,89E+03		10417	2,44E-04	3,44E+04
27322	3,28E-08	9,99E-01		27322	2,17E-08	3,05E+00
42841	2,09E-08	6,37E-01		42841	7,68E-08	1,08E+01
47265	3,60E-07	1,10E+01		47265	3,91E-07	5,50E+01
59125	9,97E-07	3,04E+01		59125	1,10E-06	1,56E+02

Таблица 3.5

Значения резонансных частот, величин АЧХ и коэффициентов динамичности
с уменьшенной в 100 раз вязкостью жидкости ($\nu=10^{-8}$ м)
(открытые торцы)

Частота ω , рад/с	$A^{(1)}(\omega)$, с ²	$K^{(1)}(\omega)$		Частота ω , рад/с	$A^{(2)}(\omega)$, с ²	$K^{(2)}(\omega)$
3363	1,99E-04	6,06E+03		3363	5,40E-05	7,60E+03
10417	2,26E-02	6,89E+05		10417	2,44E-02	3,44E+06
27322	3,27E-06	9,96E+01		27322	2,15E-06	3,03E+02
42841	2,08E-06	6,35E+01		42841	7,68E-06	1,08E+03
47265	3,60E-05	1,10E+03		47265	3,91E-05	5,50E+03
59125	9,97E-05	3,04E+03		59125	1,10E-04	1,56E+04

Таблица 3.6

Значения резонансных частот, величин АЧХ и коэффициентов динамичности
с увеличенной в два раза толщиной внешней оболочки ($h_0^{(1)}=3.7 \cdot 10^{-2}$ м)
(открытые торцы)

Частота ω , рад/с	$A^{(1)}(\omega)$, с ²	$K^{(1)}(\omega)$		Частота ω , рад/с	$A^{(2)}(\omega)$, с ²	$K^{(2)}(\omega)$
4157	1,51E-05	5,84E+02		4157	7,91E-06	1,11E+03
10063	1,25E-03	4,83E+04		10063	1,40E-03	1,98E+05
27545	8,57E-07	3,32E+01		27545	5,62E-07	7,91E+01
42600	3,66E-07	1,42E+01		42600	7,45E-07	1,05E+02
46653	3,27E-06	1,26E+02		46653	3,84E-06	5,40E+02
57615	4,13E-06	1,60E+02		57615	5,03E-06	7,08E+02

Таблица 3.7

Значения резонансных частот, величин АЧХ и коэффициентов динамичности
с увеличенной в два раза толщиной внутренней оболочки ($h_0^{(2)}=1,85 \cdot 10^{-1}$ м)
(открытые торцы)

Частота ω , рад/с	$A^{(1)}(\omega)$, с ²	$K^{(1)}(\omega)$		Частота ω , рад/с	$A^{(2)}(\omega)$, с ²	$K^{(2)}(\omega)$
3605	2,67E-05	8,12E+02		3605	2,04E-06	3,67E+02
13351	7,27E-04	2,21E+04		13351	8,39E-04	1,51E+05
26980	1,99E-06	6,07E+01		26980	1,13E-06	2,04E+02
42903	2,16E-06	6,58E+01		42903	9,96E-07	1,79E+02
56596	3,55E-05	1,08E+03		56596	3,92E-05	7,06E+03
94527	3,84E-06	1,17E+02		94527	4,32E-06	7,77E+02

Программа приведена в приложении В.

Анализ приведенных расчетов не входит в содержание данной работы

3.2 Реализация, программного способа аналитически-численного вычисления с использования параллельных вычислений

Из построенной схемы (Рис. 2) видно, что такой программный модуль может быть легко распараллелен, а именно, последовательными блоками останутся «Описательная часть» и «Заключительная часть», а «Получение системы линейных алгебраических уравнений с использованием метода Бубнова-Галеркина» и «Решение системы линейных алгебраических уравнений» могут быть распараллелены.

Блок «Получение системы линейных алгебраических уравнений с использованием метода Бубнова-Галеркина» может быть распараллелен, т.к. в полученной системе уравнений динамики упругих соосных цилиндрических оболочек присутствуют 6 уравнений и проведение процедуры метода Бубнова-Галеркина производится независимо для каждого уравнения. В связи с этим, будет достаточно запуска шести параллельных потоков для решения проблемы распараллеливания данного блока.

Для реализации метода Бубнова-Галеркина было принято решение об использовании одного блока из 6 потоков. Для этого была разработана следующая процедура реализации для отдельного уравнения:

```
> Proc_tau:=proc(EQ_local, multi_coeff,a_1,b_1)
local EQ_local_1, tmp1, tmp2, tmp3, tmp11, tmp21, tmp111,
tmp211, tmp112, tmp212,tmp31:
EQ_local_1:=collect(expand(EQ_local),[cos(tau),sin(tau)],distributed):
tmp1:=coeff(EQ_local_1,sin(tau)):
tmp2:=coeff(EQ_local_1,cos(tau)):
tmp3:=(EQ_local_1-tmp1*sin(tau)-tmp2*cos(tau)):
tmp1:=expand(applyrule([theta+phi=ThetaPhi,-theta-phi=-ThetaPhi],combine(tmp1,trig))):
tmp2:=expand(applyrule([theta+phi=ThetaPhi,-theta-phi=-ThetaPhi],combine(tmp2,trig))):
tmp11:=convert(int(multi_coeff*tmp1,zeta=a_1..b_1),trig):
tmp21:=convert(int(multi_coeff*tmp2,zeta=a_1..b_1),trig):
tmp31:=convert(int(multi_coeff*tmp3,zeta=a_1..b_1),trig):
tmp111:=coeff(tmp11,sin(ThetaPhi)):
tmp112:=coeff(tmp11,cos(ThetaPhi)):
tmp211:=coeff(tmp21,sin(ThetaPhi)):
```

```

tmp212:=coeff(tmp21,cos(ThetaPhi));
RETURN(tmp111,tmp112, tmp211, tmp212, tmp31);
end:

```

Получать уравнения для системы линейных алгебраических уравнений из заданных 6 уравнения одновременно. Распараллеливать внутри процедуры не является целесообразным, т.к. это может приводить к блокировке процессов и увеличивать нагрузку на процессоры. Тестирование продукта будет на 8-ядерном процессоре. Код этого блока представлен ниже:

```

TRTR:=Threads:-Task:-Start(passed, Task =
[Proc_tau(EQOutr1,zeta*(1-zeta^2),-1,1)], Task =
[Proc_tau(EQOutr2,(1-zeta^2),-1,1)], Task =
[Proc_tau(EQOutr3,(1-zeta^2)^2,-1,1)], Task =
[Proc_tau(EQInn1,zeta*(1-zeta^2),-1,1)], Task =
[Proc_tau(EQInn2,(1-zeta^2),-1,1)], Task = [Proc_tau(EQInn3,(1-
zeta^2)^2,-1,1)]):

```

Значительно большую проблему имеет распараллеливание блока «Решение системы линейных алгебраических уравнений». С одной стороны, это уже ставшая классической задача для численного вычисления, с другой стороны будем стараться сохранить возможность получения аналитического решения, т.к. получение только численного решения данного не позволит выявлять амплитудно-частотные характеристики прогибов каждой из оболочек и потребует от нас проведение анализа поведения только самих прогибов, что несколько ограничивает анализ представленной задачи.

Анализ задачи, решенной в разделе 2 показал, что получаемая после применения метода Бубнова-Галеркина, система линейных алгебраических уравнений является системой 28 порядка. Для метода решения будем применять метод Гаусса.

Метод Гаусса основан на алгоритме последовательного исключения неизвестных. Выпишем расширенную матрицу коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right).$$

Задача состоит в том, чтобы привести ее к «треугольному» виду при помощи эквивалентных преобразований и получить единицы на главной диагонали и нули под ними.

Алгоритм состоит в том, что на каждом шаге выполняются следующие действия (количество шагов определяется количеством уравнений). Выбирается одна из ненулевых не рассмотренных ранее строк, ее номер считаем равным i . Все элементы этой строки делятся на элемент, стоящий на i -м месте (номер столбца этого элемента равен j). Если на i -м шаге какая-то из строк содержит уже на i -м месте единицу, то именно она переставляется и считается i -й строкой. Далее, добавляя к остальным, ранее не рассмотренным строкам i -ю строку умноженную на подходящее число, добиваемся того, что все элементы j -го столбца, расположенные ниже i -й строки, были равны нулю.

При решении систем алгебраических уравнений больших порядков требуется выполнять большой объем вычислений, в этом случае без техники не обойтись, следовательно, актуальной становится финансовая сторона вопроса.

Оценим число арифметических операций, необходимых для решения систем алгебраических уравнений порядка n методом Крамера. Будем учитывать только операции умножения и деления, поскольку времени на выполнение операций сложения и вычитания требуется на порядок меньше.

Для нахождения решения необходимо вычислить $n+1$ определитель порядка n , каждый из них содержит $n!$ членов, пренебрегая операциями сложения и вычитания и учитывая, что для нахождения n неизвестных требуется n операций деления, окончательно получаем $\approx (n+1)!$ операций. Поскольку у быстродействующей вычислительной техники программное обеспечение ориентировано на параллельную обработку информации (содержит параллельные программы), то время на выполнение вычислений может быть существенно уменьшено, но не более чем до $n!$.

Оценим число операций, необходимое для решения той же системы методом Гаусса. В первом уравнении этой системы n неизвестных, и для приведения к 1 всех коэффициентов в каждом из n уравнений требуется $n \cdot (n - 1)$ операций деления.

Для получения системы из $n-1$ уравнения требуется выполнить $2n$ операций вычитания, пренебрегая которыми, получаем после 1-го шага $\approx n \cdot (n - 1)$ операций. Далее, по индукции, получаем $(n - 1)(n - 2)$ и т.д., то есть окончательно получаем

$$\sum_{k=1}^n k \cdot (k - 1) = \frac{n(n - 1)(n - 2)}{6} - \frac{n(n + 1)}{2} \approx \frac{n^3}{3} \text{ операций.}$$

Таким образом, при больших n предпочтение, несомненно, должно быть отдано методу Гаусса. Часто по этой причине метод Гаусса называют машинным.

Плата за эффективность метода достаточно велика – это «неустойчивость» решения. Другими словами, правильность полученного решения системы методом Гаусса, вообще говоря, невозможно проверить.

При решении системы уравнений (1) методом Гаусса возможны следующие случаи.

1). Если матрица $\bar{A}$ приведена к треугольному виду, то система (3) совместна и имеет единственное решение.

2). Если матрица $\bar{A}$ содержит хотя бы одну строку, все элементы которой равны нулю, то система (1) совместна и имеет множество решений.

3). Если матрица $\bar{A}$ содержит строку, все элементы которой, кроме свободного члена, равны нулю, то система (1) несовместна, то есть решения не имеет.

Следует, что отметить для параллельного вычисления методом Гаусса традиционного используется следующие схемы использования потоков:

1. Простой подход. В памяти храниться одну строку матрицы (одно уравнение). Тогда требуется n для матрицы $n \times n$.

2. Блочный подход. Каждый процесс хранит в своей памяти горизонтальную полосу из n / P смежных строк. Требуется P процессов.
3. Циклическое распределение строк матрицы. Каждый процесс хранит в своей памяти порядка n / P строк, векторы $b[n]$ и $x[n]$. Строки распределены по циклической схеме для выравнивания вычислительной загрузки процессов.

Однако, в данном случае было принято решение об использовании фиксированного набора процессов, а именно, 7 процессов. Другими словами, будем использовать вариацию блочного подхода, где систему 28×28 будем разделить на 4 блока по 7 процессов.

При этом для реализации прямого хода метода Гаусса, реализуем следующую функцию:

```
> gauss_fisrt := proc (ii, nnn)
local j, r; for j from ii+1 to nnn do
for r from ii+1 to nnn do
ca[j, r] := ca[j, r]-ca[ii, r]*ca[j, ii]/ca[ii, ii]:
end do;
cb[j] := cb[j]-cb[ii]*ca[j, ii]/ca[ii, ii]:
end do:
end proc:
```

Тогда реализация прямого хода будет иметь вид:

```
> for i from 0 to 3 do
TRTR1[i] := Threads:-Task:-Start(passed, Task =
[gauss_fisrt(7*i+1,nn1)], Task = [gauss_fisrt(7*i+2,nn1)], Task =
[gauss_fisrt(7*i+3,nn1)], Task = [gauss_fisrt(7*i+4,nn1)], Task =
[gauss_fisrt(7*i+5,nn1)], Task = [gauss_fisrt(7*i+6,nn1)], Task =
[gauss_fisrt(7*i+7,nn1)]):
end do:
```

Реализация же обратного хода метода Гаусса, не будем распараллеливать, однако дополнительно к обратному ходу добавим цикл преобразований в

котором также будем использовать 4 блока по 7 процессов, представленные ниже

```
> for i from nn1 by -1 to 1 do
s := 0;
for j from i+1 to nn1 do
s := ca[i, j]*x[j]+s;
end do;
x[i] := (cb[i]-s)/ca[i,i];
end do;
> for i from 0 to 3 do
TRTR4[i] := Threads:-Task:-Start(passed, Task =
[simplify(expand(x[7*i+1]))], Task =
[simplify(expand(x[7*i+2]))], Task =
[simplify(expand(x[7*i+3]))], Task =
[simplify(expand(x[7*i+4]))], Task =
[simplify(expand(x[7*i+5]))], Task =
[simplify(expand(x[7*i+6]))], Task =
[simplify(expand(x[7*i+7]))]); simplify(expand(x[i])) end do;
```

Кроме того, параллельная версия программы сделана как единый аналитико-вычислительный комплекс. Программа приведена в приложении С.

Расчеты показали, что скорость выполнения единого аналитико-вычислительного комплекса для задачи с двумя соосными оболочками в 4 раза больше, чем скорость аналитического блока без параллельного программирования. Другими слова «выигрыш» во времени составил 400%. Расчеты производились по соотношению времени с использованием закона Закон Густафсона — Барсиса.

Закона Густафсона — Барсиса — ускорения масштабированием определяется следующим образом:

$$S_n = n + (1 - n)s,$$

где n — число процессоров, s — доля последовательных блоков.

Для нашей задачи $S_n = 4$, т.к. число ядер было использовано 7, а доля последовательных блоков составляет 0,5. Таким образом, Закона Густафсона — Барсиса подтверждает эффективность выполнения программы и совпадает с оценкой по времени.

Следует заметить, что задача гидроупругости с двумя соосными оболочками была решена сначала в ручном режиме аналитически, что являлось тестовой задачей для последующего решения для исследования в области применения параллельных вычислений.

Представленная задача гидроупругости с тремя соосными оболочками из-за высокой технической сложности не могла быть решена в ручном и последовательном режиме на имеющейся в наличии у автора компьютерной технике.

Применение адаптированного аналитико-вычислительного комплекса для задачи с тремя соосными оболочками, позволило решить указанную задачу.

Оценка для задачи гидроупругости для трех соосных оболочек по закону Закона Густафсона — Барсиса, составило $S_n = 5,2$. Т.е. если бы была последовательная программа, то скорость выполнения была бы в 5,2 раза по времени.

Данные для расчетов задачи гидроупругости с тремя соосными оболочками взяты аналогичные данным для задачи гидроупругости с двумя соосными оболочками

Приведены расчеты для амплитудных частотных характеристик каждой из оболочек. Как показали расчеты – резонансов может быть достаточно много, но большое число этих резонансов незначительное и можно наблюдать только 9 значимых резонансных частот для амплитудных частотных характеристик каждой из оболочек.

Таблица 3.8

Значения резонансных частот, величин АЧХ и коэффициентов динамичности для исходного набора параметров (открытые торцы)

Частота ω , рад/с	$A^{(1)}(\omega)$, c^2	$K^{(1)}(\omega)$	$A^{(2)}(\omega)$, c^2	$K^{(2)}(\omega)$	$A^{(3)}(\omega)$, c^2	$K^{(3)}(\omega)$
3434	2,25E-05	6,84E+02	4,73E-06	8,34E+02	4,73E-06	8,34E+02
4526	2,56E-05	6,94E+02	4,33E-06	8,24E+02	3,73E-06	7,34E+02
11383	1,08E-03	3,28E+04	1,19E-03	2,10E+05	1,19E-03	2,10E+05
15365	2,28E-03	3,28E+04	2,29E-03	1,10E+05	2,29E-03	1,10E+05
27383	8,90E-07	2,71E+01	5,97E-07	1,05E+02	5,97E-07	1,05E+02
42861	7,50E-07	2,29E+01	3,17E-07	5,59E+01	3,17E-07	5,59E+01
47851	1,28E-06	3,90E+01	1,39E-06	2,45E+02	1,39E-06	2,45E+02

49251	1,09E-06	3,60E+01	2,34E-06	2,65E+02	2,08E-06	2,25E+02
-------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

Анализ приведенных расчетов не входит в содержание данной работы.
Данная программа не приводится.

3.3 Выводы к разделу 3

В разделе 3 был рассмотрен процесс построение проблемно-ориентированных комплексов для последовательного решения, состоящего аналитического и численного блоков, и параллельного аналитико-вычислительного комплекса для задачи гидроупругости двух соосных оболочек.

Кроме того, было обосновано ускорение масштабированием с помощью закона Закона Густафсона — Барсиса, которое составило 4 для задачи гидроупругости двух соосных оболочек.

Оценка для задачи гидроупругости для трех соосных оболочек по закону Закона Густафсона — Барсиса, составило $S_n = 5,2$. Т.е. если бы была последовательная программа, то скорость выполнения была бы в 5,2 раза по времени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей выпускной квалификационной работе магистра рассматривается процесс разработки и реализации проблемно-ориентированного комплекса, предназначенного для автоматизации процесса решения задач гидроупругости с использованием параллельных вычислений.

В процессе написания выпускной квалификационной работы были решены следующие задачи:

1. Подобрана и проанализирована литература по компьютерному моделированию в задачах гидроупругости.
2. Проведен анализ существующих систем компьютерной математики для использования символьных и параллельных вычислений в области компьютерного моделирования в задачах гидроупругости.
3. Определены и реализованы методы решения поставленной задачи гидроупругости для двух соосных оболочек.
4. Разработан проблемно-ориентированный комплекс для автоматизации символьных и численных вычислений для решения задачи гидроупругости для двух соосных оболочек без использования параллельных вычислений.
5. Проведен анализ разработанного проблемно-ориентированного комплекса для дальнейшей автоматизации с использованием параллельных вычислений
6. Разработан проблемно-ориентированный комплекс для автоматизации символьных и численных вычислений для решения задачи гидроупругости для двух и трех соосных оболочек с использованием параллельных вычислений.

Таким образом, все задачи выпускной квалификационной работы выполнены и цель достигнута.

Результаты работы были частично представлены на следующих научных мероприятиях:

1. Международная научная конференция «Компьютерные науки и информационные технологии» 2021 г. (19.11.2021, ФКНиИТ СГУ, тема доклада: «Применение параллельных вычислений в задачах гидроупругости трех соосных оболочек»),
2. Студенческая научная конференция «Компьютерные науки и информационные технологии» 30.04.2021г тема доклада: «Параллельные алгоритмы компьютерного моделирования в линейных задачах гидроупругости»
3. Научная конференция механико-математического факультета «Актуальные проблемы математики и механики», 12.04.2021 г. тема доклада: «Подходы к исследованию задач гидроупругости с использованием численных и параллельных вычислений»
4. XXVII Международный симпозиум им. А.Г. Горшков Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Москва, Вятчи, 17–21 мая 2021 года. тема доклада: «Проблема применения параллельных вычислений для задачи гидроупругости трех соосных оболочек, взаимодействующими с двумя вязкими несжимаемыми жидкостями при вибрации»
5. XI Международной научно-практической конференции Проблемы безопасности на транспорте. Гомель, 25–26 ноября 2021 года тема доклада: «Параллельные вычисления в задачах гидроупругости соосных оболочек»
6. Студенческая научная конференция «Компьютерные науки и информационные технологии» 30.04.2022г тема доклада: «Параллельные алгоритмы компьютерного моделирования в задачах гидроупругости».
7. Научная конференция механико-математического факультета «Актуальные проблемы математики и механики», 12.04.2022 г. тема доклада: «Постановка задачи моделирования

взаимодействия вязкой сжимаемой жидкости с упругой ребристой пластиной»

Были опубликованы следующие статьи:

Елистратова О.В., Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Плаксина И.В. Проблема применения параллельных вычислений для задачи гидроупругости трех соосных оболочек, взаимодействующими с двумя вязкими несжимаемыми жидкостями при вибрации // В сборнике: Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. Москва, 2021. С. 40-41.

Елистратова О.В., Кондратов Д.В., Плаксина И.В., Кондратова Ю.Н. Параллельные вычисления в задачах гидроупругости соосных оболочек // В сборнике: Проблемы безопасности на транспорте. Материалы XI Международной научно-практической конференции. Под общей редакцией Ю.И. Кулаженко. 2021. С. 129-130.

Кондратов Д. В., Плаксина И. В., Елистратова О. В. Подходы к исследованию задач гидроупругости с использованием численных и параллельных вычислений // Математика. Механика : сб. науч. тр. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2021 – Вып. 23 – С. 87-91

Еще несколько статей на тему находятся в печати.

Настоящая работа имеет потенциал для дальнейшего развития. Предложенные метод для решения задачи гидроупругости с использованием параллельных вычислений, автоматизирующий его проблемно-ориентированный комплекс может быть основой для других научных исследований в области гидроупругости.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Сазанов В. И., Калашников Б. А. Динамика агрегатов пневмогидравлических систем ракет с ЖРД. Санкт-Петербург, Лань, 2022, 244 с.
2. Быков Л.В., Молчанов А.М., Щербаков М.А., Янышев Д.С. Вычислительная механика сплошных сред в задачах авиационной и космической техники. URSS. 2019. 668 с.
3. Овчаренко В.Н., Поплавский Б.К., Ефремов А.В. Частотные методы идентификации в задачах динамики полета воздушных судов. URSS. 2022. 458 с.
4. Блинков Ю.А., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И., Попова Е.В. Волны в соосных квадратично нелинейных оболочках, окруженных упругой средой, содержащих жидкость / ММТТ. 2020. № 5. С. 41-44.
5. Блинков Ю.А., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И., Кондратов Д.В. Моделирование волновых процессов в двух соосных оболочках заполненных вязкой жидкостью с учетом инерции ее движения и окруженных упругой средой // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2019. № 2. 14 с.
6. Блинков Ю.А., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И., Кондратов Д.В. Нелинейные волны в цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость с учетом инерции ее движения, при воздействии окружающей упругой среды и конструкционного демпфирования в продольном направлении // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2019. № 1. 14 с.
7. Агеев, Р.В. Математическое моделирование динамических процессов в гидродинамической опоре с трехслойным статором, установленной на вибрирующем основании / Р.В. Агеев // Вестник Саратовского государственного технического университета.– 2010. №4 (49). - С.7-14.
8. Попова, А. А. Математическое моделирование процессов взаимодействия вязкой жидкости с тонкостенными ребристыми элементами гидродинамических демпферов и трубопроводов : диссертация ... кандидата

технических наук : 05.13.18, 01.02.06 / Попова Анна Александровна. - Саратов, 2008. - 174 с.

9. Попова, А. А. Математическое моделирование динамических процессов в виброопоре с упругими элементами конструкции/А.А. Попова// Вестник Саратовского государственного технического университета.– 2007. Том 1, Вып. 4.- С.25-31

10. Гайнутдинова, Д.Ф. Разработка методики проведения физических экспериментов по исследованию взаимовлияния в динамической системе жидкость – конструкция / Д. Ф. Гайнутдинова // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2016. № 47. С.215-229.

11. Amabili, M. Non-Linear Dynamics and Stability of Circular Cylindrical Shells Containing Flowing Fluid. Part III: Truncation Effect Without Flow and Experiments / M. Amabili, F. Pellicano, M.P. Pandoussis // Journal of Sound and Vibration. – 2000. – Vol. 237. – P. 617-640

12. Amabili, M. Non-Linear Dynamics and Stability of Circular Cylindrical Shells Conveying Flowing Fluid / M. Amabili, F. Pellicano, M.P. Pandoussis // Computers & Structures. – 2002. – Vol. 80. – P. 899-906

13. Amabili, M. Effect of geometric imperfections on non-linear stability of circular cylindrical shells conveying fluid / M. Amabili, K.Karagiozis, M.P.Pandoussis // International Journal of Non-Linear Mechanics.-2009.-Vol. 44.-P. 276 – 289

14. Amabili, M. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction/ M.Amabili, M.P. Paidoussis // Appl Mech Rev.- 2003.- Vol.56.- No 4.- P.349–381.

15. Агеев, Р.В. Математическое моделирование взаимодействия слоя вязкой жидкости с упругими стенками канала, установленного на вибрирующем основании / Р.В. Агеев, Т.В. Быкова, Ю.Н. Кондратова // Сер. Математика. Механика. Информатика. - Саратов: Изв. Сарат. ун-та, 2011.- Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 2.- С.48-54.

16. Агеев, Р.В. Математическая модель движения пульсирующего слоя вязкой

жидкости в канале с упругой стенкой / Р.В. Агеев, Е.Л. Кузнецова, Н.И. Куликов, Л.И. Могилевич, В.С. Попов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 3. – С. 17–35.

17. Бочкарев, С.А. Аэроупругая устойчивость пластины, взаимодействующей с текущей жидкостью / С. А. Бочкарев, С.В. Лекомцев // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.Физ.-мат. Науки.- 2015. Т. 19, № 4.-С.750-767

18. Скородумов, Е.С. Колебания геометрически нерегулярной пластины и штампа, взаимодействующих друг с другом через слой вязкой жидкости/ Е.С. Скородумов, Д.В. Кондратов, Е.Л. Кузнецова, Л.И. Могилевич, В.С. Попов // Известия ТулГУ. Технические науки. Вып. 11:- Тула: Изд-во ТулГУ ,2016, С.37- 53.

19. Волов, М.И. Математическое моделирование динамики взаимодействия пульсирующего слоя вязкой жидкости с упругими стенками канала, образованного двумя параллельными пластинами / М.И. Волов, В.С. Попов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та.- 2011.Вып.1, №55 -С.34-38.

20. Худаяров, Б.А. Численное моделирование нелинейных колебаний вязкоупругого трубопровода с жидкостью/ Б.А. Худаяров, Ф. Тураев// Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика, 2016, № 5(43). - С.90-98.

21. Бочкарев, С. А. Численное моделирование упругой трубы с текущей жидкостью / С. А. Бочкарев, С. В. Лекомцев // Вестн. Пермского национального исследовательского политехн. Ун-та. Механика, 2011. Вып.3-С.5-14.

22. Бочкарёв, С. А. Численное моделирование пространственных колебаний цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью / С. А. Бочкарёв, С. В. Лекомцев, В. П. Матвеев // Пермь: Вычислительные технологии. - 2013. Том 18, №2. - С.12-24.

23. Bochkarev, S.A. Stability Analysis of Loaded Coaxial Cylindrical Shells with Internal Fluid Flow/ S. A. Bochkarev and V. P. Matveenko// Mechanics of Solids.- 2010.-Vol. 45, No. 6.-P. 789–802.

24. Bochkarev, S. A. Specific Features of Dynamic Behavior of Stationary and Rotating Single/Coaxial Cylindrical Shells Interacting With the Axial and Rotational Fluid Flows / Sergey A. Bochkarev, Valery P. Matveenko // Journal of Vibration and Acoustics.- APRIL 2015, Vol. 137.
25. Bochkarev, S.A. The dynamic behaviour of elastic coaxial cylindrical shells conveying fluid / S. A. Bochkarev, V. P. Matveenko // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2010.-Vol. 74.-P. 467–474.
26. Bochkarev, S. A. Parametric investigation of the stability of coaxial cylindrical shells containing flowing fluid / S.A. Bochkarev, S.V. Lekomtsev, V.P. Matveenko // European Journal of Mechanics A/Solids.-2014.-Vol. 47.- P. 174-181
27. Nguyen, V.B. A CFD-Based Model for the Study of the Stability of Cantilevered Coaxial Cylindrical Shells Conveying Viscous Fluid / V.B. Nguyen, M.P. Paidoussis, A.K. Misra // Journal of Sound and Vibration. – 1994. – Vol. 176. – P. 105-125.
28. Uğurlu, B. A hydroelastic investigation of circular cylindrical shells-containing flowing fluid with different end conditions / B. Uğurlu, A. Ergin // Journal of Sound and Vibration.-2008.- Vol. 318 .- P. 1291–1312.
29. Бочкарев, С.А. Аэроупругая устойчивость круговых цилиндрических оболочек, содержащих текущую жидкость / С. А. Бочкарёв, С. В. Лекомцев // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.Физ.-мат. Науки.- 2015. Т. 19, № 4.-С.750-767
30. Karagiozis, K.N. An experimental study of the nonlinear dynamics of cylindrical shells with clamped ends subjected to axial flow / K.N. Karagiozis, M.P. Paidoussis, A.K. Misra, E. Grinevich // Journal of Fluids and Structures.-2005.- Vol. 20.- P. 801–816.
31. Karagiozis, K.N. Nonlinear stability of cylindrical shells subjected to axial flow: Theory and experiments/ K.N. Karagiozis, M.P. Paidoussis, M. Amabili, A.K. Misra // Journal of Sound and Vibration.-2008.-Vol. 309. - P. 637–676.
32. Misra, A.K. Dynamics and Stability of Pinned-Clamped and Clamped-Pinned Cylindrical Shells Conveying Fluid / A.K. Misra, S.S.T. Wong, M.P. Pandoussis // Journal of Fluids and Structures. – 2001. – Vol. 15. – P. 1153-1166.

33. Плаксина, И.В. Задачи гидроупругости для трубы кольцевого сечения с упругой, геометрически нерегулярной внешней оболочкой при воздействии давления / И.В. Плаксина, Д.В. Кондратов, Ю.Н. Кондратова, В.С. Попов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Том 13, Вып. 3. - С.70-76.
34. Кондратова, Ю.Н. Гидроупругость упругой цилиндрической трубы кольцевого сечения при различных ее закреплениях/ Ю. Н. Кондратова// Вестник Саратовского государственного технического университета.—№3 (57). Выпуск 1.— Саратов: Изд-во СГТУ, 2011. - С. 50–59
35. Zhang, Yong Liang. Vibration of prestressed thin cylindrical shells conveying fluid/ Yong Liang Zhang, Daniel G. Gormanb, Jason M. Reese// Thin-Walled Structures.- 2003.-Vol. 41.- P. 1103–1127
36. Au-Yang, M.K. Response of Fluid-Elastically Coupled Coaxial Cylindrical Shells to External Flow/ M.K. Au-Yang// Journal of Fluids Engineering, June 1977.-P. 319-324
37. Soldatos, K.P. Three-dimensional solution of the free vibration problem of homogeneous isotropic cylindrical shells and panels / K. P. Soldatos, V. P. Hadjigeorgiou // Journal of Sound and Vibration.-1990.- Vol.137(3), P.369 -384
38. Zhang, Y. L. Finite element analysis of the vibratory characteristics of cylindrical shells conveying fluid / Yong Liang Zhang, Jason M. Reese, Daniel G. Gorman // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.- 2002.- Vol. 191.- P. 5207–5231.
39. Païdoussis, M.P. Dynamics and Stability of Coaxial Cylindrical Shells Conveying Viscous Fluid / M.P. Païdoussis, A.K. Misra и S. P. Chan // Journal of Applied Mechanics.- 1985.- Vol. 52.- P.389-396.
40. Païdoussis, M.P. Internal- and annular-flow-induced instabilities of a clamped-clamped or cantilevered cylindrical shell in a coaxial conduit: the effects of system parameters / M.P. Païdoussis, A.K. Misra , V.B. Nguyen // Journal of Sound and Vibration.- 1992.Vol.- 159(2).- P.- 193-205.
41. Chung, H. Analysis of a cylindrical shell vibrating in a cylindrical fluid region/ H. Chung, P. Turula, T.M. Mulcahy and J.A, Jendrzejczyk// Nuclear Engineering and

Design.-1981.- Vol. 63.- P. 109-120.

42. Horacek, J. Vibration analysis of cylindrical shells in contact with an annular fluid region / J. Horacek, J. Trnka, J. Veselý, D.G. Gorman// Engineering Structures. -1995.- Vol. 17.- No. 10.- P. 714 -724

43. Могилевич, Л.И. Колебания упругих стенок трубы кольцевого сечения, взаимодействующих с жидкостью, при воздействии вибрации/ Л.И. Могилевич, Ю.Н. Кондратова// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2357–2359

44. Кондратов, Д.В. Математическое моделирование процессов взаимодействия двух цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними при свободном торцевом истечении в условиях вибрации / Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич// Вестник Саратовского государственного технического университета.–2007.– №3(26). Вып.1.– С. 22-31.

45. Кондратов, Д.В. Математическое моделирование взаимодействия двух соосных цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними в условиях вибрации, с учетом износа оболочек / Д.В. Кондратов, Ю.Н. Кондратова, Л.И. Могилевич, А.В. Христофорова // «НАУКОВЕДЕНИЕ».-2016. Том 8.- №4.

46. Кондратов, Д.В. Гидроупругость трех соосных оболочек, свободно опертых по концам, взаимодействующих с вязкими жидкостями в условиях вибрации / Д.В. Кондратов, К.А. Барулина, Ек.Л. Кузнецова // Известия ТулГУ. Технические науки. Вып. 3:- Тула: Изд-во ТулГУ, 2015, С. 25-36.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А. Модуль аналитических вычислений

> restart:

>

u[outr10]:=applyrule([u[moutr]*a[s10outr]*sin(phi[outru1])=s10outrSin,u[moutr]*a[s10outr]*cos(phi[outru1])=s10outrCos,v[moutr]*a[s20outr]*sin(phi[outru2])=s20outrSin,v[moutr]*a[s20outr]*cos(phi[outru2])=s20outrCos,w[moutr]*a[s30outr]*sin(phi[outru3])=s30outrSin,w[moutr]*a[s30outr]*cos(phi[outru3])=s30outrCos,u[moutr]*a[c10outr]*sin(phi[outru1])=c10outrSin,u[moutr]*a[c10outr]*cos(phi[outru1])=c10outrCos,v[moutr]*a[c20outr]*sin(phi[outru2])=c20outrSin,v[moutr]*a[c20outr]*cos(phi[outru2])=c20outrCos,w[moutr]*a[c30outr]*sin(phi[outru3])=c30outrSin,w[moutr]*a[c30outr]*cos(phi[outru3])=c30outrCos,u[moutr]*a[o10outr]=o10outr,v[moutr]*a[o20outr]=o20outr,w[moutr]*a[o30outr]=o30outr,expand(u[moutr]*(a[c10outr]*zeta*(1-zeta^2)*cos(theta+phi)+a[s10outr]*zeta*(1-zeta^2)*sin(theta+phi))*sin(tau+phi[outru1])+u[moutr]*a[o10outr]*zeta*(1-zeta^2))):

>

u[inn10]:=applyrule([u[minn]*a[s10inn]*sin(phi[innu1])=s10innSin,u[minn]*a[s10inn]*cos(phi[innu1])=s10innCos,v[minn]*a[s20inn]*sin(phi[innu2])=s20innSin,v[minn]*a[s20inn]*cos(phi[innu2])=s20innCos,w[minn]*a[s30inn]*sin(phi[innu3])=s30innSin,w[minn]*a[s30inn]*cos(phi[innu3])=s30innCos,u[minn]*a[c10inn]*sin(phi[innu1])=c10innSin,u[minn]*a[c10inn]*cos(phi[innu1])=c10innCos,v[minn]*a[c20inn]*sin(phi[innu2])=c20innSin,v[minn]*a[c20inn]*cos(phi[innu2])=c20innCos,w[minn]*a[c30inn]*sin(phi[innu3])=c30innSin,w[minn]*a[c30inn]*cos(phi[innu3])=c30innCos,u[minn]*a[o10inn]=o10inn,v[minn]*a[o20inn]=o20inn,w[minn]*a[o30inn]=o30inn,expand(u[minn]*(a[c10inn]*zeta*(1-zeta^2)*cos(theta+phi)+a[s10inn]*zeta*(1-zeta^2)*sin(theta+phi))*sin(tau+phi[innu1])+u[minn]*a[o10inn]*zeta*(1-zeta^2))):

>

u[outr20]:=applyrule([u[moutr]*a[s10outr]*sin(phi[outru1])=s10outrSin,u[moutr]*a[s10outr]*cos(phi[outru1])=s10outrCos,v[moutr]*a[s20outr]*sin(phi[outru2])=s20outrSin,v[moutr]*a[s20outr]*cos(phi[outru2])=s20outrCos,w[moutr]*a[s30outr]*sin(phi[outru3])=s30outrSin,w[moutr]*a[s30outr]*cos(phi[outru3])=s30outrCos,u[moutr]*a[c10outr]*sin(phi[outru1])=c10outrSin,u[moutr]*a[c10outr]*cos(phi[outru1])=c10outrCos,v[moutr]*a[c20outr]*sin(phi[outru2])=c20outrSin,v[moutr]*a[c20outr]*cos(phi[outru2])=c20outrCos,w[moutr]*a[c30outr]*sin(phi[outru3])=c30outrSin,w[moutr]*a[c30outr]*cos(phi[outru3])=c30outrCos,u[moutr]*a[o10outr]=o10outr,v[moutr]*a[o20outr]=o20outr,w[moutr]*a[o30outr]=o30outr,expand(v[moutr]*(a[s20outr]*(1-zeta^2)*cos(theta+phi)+a[c20outr]*(1-zeta^2)*sin(theta+phi)+a[o20outr]*(1-zeta^2))*sin(tau+phi[outru2]))):

>

u[inn20]:=applyrule([u[minn]*a[s10inn]*sin(phi[innu1])=s10innSin,u[minn]*a[s10inn]*cos(phi[innu1])=s10innCos,v[minn]*a[s20inn]*sin(phi[innu2])=s20innSin,v[minn]*a[s20inn]*cos(phi[innu2])=s20innCos,w[minn]*a[s30inn]*sin(phi[innu3])=s30innSin,w[minn]*a[s30inn]*cos(phi[innu3])=s30innCos,u[minn]*a[c10inn]*sin(phi[innu1])=c10innSin,u[minn]*a[c10inn]*cos(phi[innu1])=c10innCos,v[minn]*a[c20inn]*sin(phi[innu2])=c20innSin,v[minn]*a[c20inn]*cos(phi[innu2])=c20innCos,w[minn]*a[c30inn]*sin(phi[innu3])=c30innSin,w[minn]*a[c30inn]*cos(phi[innu3])=c30innCos,u[minn]*a[o10inn]=o10inn,v[minn]*a[o20inn]=o20inn,w[minn]*a[o30inn]=o30inn,expand(v[minn]*(a[s20inn]*(1-zeta^2)*cos(theta+phi)+a[c20inn]*(1-zeta^2)*sin(theta+phi)+a[o20inn]*(1-zeta^2))*sin(tau+phi[innu2]))):

>

u[outr30]:=applyrule([u[moutr]*a[s10outr]*sin(phi[outru1])=s10outrSin,u[moutr]*a[s10outr]*cos(phi[outru1])=s10outrCos,v[moutr]*a[s20outr]*sin(phi[outru2])=s20outrSin,v[moutr]*a[s20outr]*cos(phi[outru2])=s20outrCos,w[moutr]*a[s30outr]*sin(phi[outru3])=s30outrSin,w[moutr]*a[s30outr]*cos(phi[outru3])=s30outrCos,u[moutr]*a[c10outr]*sin(phi[outru1])=c10outrSin,u[moutr]*a[c10outr]*cos(phi[outru1])=c10outrCos,v[moutr]*a[c20outr]*sin(phi[outru2])=c20outrSin,v[moutr]*a[c20outr]*cos(phi[outru2])=c20outrCos,w[moutr]*a[c30outr]*sin(phi[outru3])=c30outrSin,w[moutr]*a[c30outr]*cos(phi[outru3])=c30outrCos,u[moutr]*a[o10outr]=o10outr,v[moutr]*a[o20outr]=o20outr,w[moutr]*a[o30outr]=o30outr,expand(u[moutr]*(a[c10outr]*zeta*(1-zeta^2)*cos(theta+phi)+a[s10outr]*zeta*(1-zeta^2)*sin(theta+phi))*sin(tau+phi[outru1])+u[moutr]*a[o10outr]*zeta*(1-zeta^2))):

```

utr]*cos(phi[outru2])=c20outruCos,w[moutru]*a[c30outru]*sin(phi[outru3])=c30outruSin,w[moutru]*a[c
30outru]*cos(phi[outru3])=c30outruCos,u[moutru]*a[o10outru]=o10outru,v[moutru]*a[o20outru]=o20outru,
w[moutru]*a[o30outru]=o30outru],expand(w[moutru]*(a[c30outru]*(1-
zeta^2)^2*cos(theta+phi)+a[s30outru]*(1-
zeta^2)^2*sin(theta+phi))*sin(tau+phi[outru3])+w[moutru]*a[o30outru]*(1-zeta^2)^2)):
>
u[inn30]:=applyrule([u[minn]*a[s10inn]*sin(phi[innu1])=s10innSin,u[minn]*a[s10inn]*cos(phi[inn
u1])=s10innCos,v[minn]*a[s20inn]*sin(phi[innu2])=s20innSin,v[minn]*a[s20inn]*cos(phi[innu2])
=s20innCos,w[minn]*a[s30inn]*sin(phi[innu3])=s30innSin,w[minn]*a[s30inn]*cos(phi[innu3])=s3
0innCos,u[minn]*a[c10inn]*sin(phi[innu1])=c10innSin,u[minn]*a[c10inn]*cos(phi[innu1])=c10inn
Cos,v[minn]*a[c20inn]*sin(phi[innu2])=c20innSin,v[minn]*a[c20inn]*cos(phi[innu2])=c20innCos,
w[minn]*a[c30inn]*sin(phi[innu3])=c30innSin,w[minn]*a[c30inn]*cos(phi[innu3])=c30innCos,u[
minn]*a[o10inn]=o10inn,v[minn]*a[o20inn]=o20inn,w[minn]*a[o30inn]=o30inn],expand(w[minn]
*(a[c30inn]*(1-zeta^2)^2*cos(theta+phi)+a[s30inn]*(1-
zeta^2)^2*sin(theta+phi))*sin(tau+phi[innu3])+w[minn]*a[o30inn]*(1-zeta^2)^2)):
> U[outru10] :=u[outru10]/u[moutru]:
> U[inn10] :=u[inn10]/u[minn]:
> U[outru20] :=u[outru20]/v[moutru]:
> U[inn20] :=u[inn20]/v[minn]:
> U[outru30] :=u[outru30]/w[moutru]:
> U[inn30] :=u[inn30]/w[minn]:
> o20outru :=0:
o20inn :=0:
> u1[inn30]:=applyrule([1-
2*zeta^2+zeta^4=coeffzeta],collect(simplify(expand(applyrule([theta+phi=ThetaPhi],combine(u[in
n30],trig)))),[s30innSin,cos(ThetaPhi),sin(tau),sin(ThetaPhi),cos(tau),c30innSin,c30innCos,s30innC
os,o30inn],distributed));
> u1[outru30]:=applyrule([1-
2*zeta^2+zeta^4=coeffzeta],collect(simplify(expand(applyrule([theta+phi=ThetaPhi],combine(u[ou
tru30],trig)))),[s30outruSin,cos(ThetaPhi),sin(tau),sin(ThetaPhi),cos(tau),c30outruSin,c30outruCos,s30o
utruCos,o30outru],distributed));
>
> P0[open]:=sigma/e*int(sinh(sigma*(qwerty-zeta))*(12*v*(diff(u[outru30],tau)-
diff(u[inn30],tau))+2*epsilon^2*w*(diff(u[outru30],tau$2)-diff(u[inn30],tau$2))),zeta=-1..q)-
sigma/(2*e)*(cosh(sigma*zeta)/cosh(sigma)+sinh(sigma*zeta)/sinh(sigma))*int(sinh(sigma*(1-
zeta))*(12*v*(diff(u[outru30],tau)-diff(u[inn30],tau))+2*epsilon^2*w*(diff(u[outru30],tau$2)-
diff(u[inn30],tau$2))),zeta=-1..1):
>
> P0[open]:=applyrule([qwerty=zeta,q=zeta],P0[open]):
> P0[open]:=simplify(P0[open]):
>
> P0:=P0[open]:
> W[x1outru]:=-Ex*omega^2*sin(tau+phix0):
> W[z1outru]:=-Ez*omega^2*sin(tau+phiz0):
> W[x1inn]:=-Ex*omega^2*sin(tau+phix0):
> W[z1inn]:=-Ez*omega^2*sin(tau+phiz0):
>
Внешняя оболочка
>
EQOtru1:=1/((RR[outru])^2*omega^2*SonicSpeedMSqrOtru)*rho0[outru]*h0[outru]*((2*RR[outru]/12
)^2*u[moutru]*diff(U[outru10],zeta$2)+(1-mu0[outru])/2*u[moutru]*diff(U[outru10],theta$2)-
(1+mu0[outru])/2*(2*RR[outru]/12)*v[moutru]*diff(diff(U[outru20],theta),zeta)-

```

```

(2*RR[outr]/12)*mu0[outr]*w[moutr]*diff(U[outr30],zeta))-
rho0[outr]*h0[outr]*u[moutr]*diff(U[outr10],tau$2):
>
> EQOutr1:=collect(expand(EQOutr1),[cos(tau),sin(tau)],distributed):
>
> tmp1:=coeff(EQOutr1,sin(tau)):
EQOutr11:=int(zeta*(1-zeta^2)*tmp1,zeta=-1..1):
EQOutr11:=expand(applyrule([theta+phi=ThetaPhi,-theta-phi=-
ThetaPhi],combine(EQOutr11,trig))):
>
> EQOutr11:=collect(EQOutr11,[sin(ThetaPhi),cos(ThetaPhi)],distributed):
> EQOutr111:=coeff(EQOutr11,sin(ThetaPhi));
> EQOutr112:=coeff(EQOutr11,cos(ThetaPhi));
>
> tmp2:=coeff(EQOutr1,cos(tau)):
EQOutr12:=int(zeta*(1-zeta^2)*tmp2,zeta=-1..1):
EQOutr12:=expand(applyrule([theta+phi=ThetaPhi,-theta-phi=-
ThetaPhi],combine(EQOutr12,trig))):
> EQOutr12:=collect(EQOutr12,[sin(ThetaPhi),cos(ThetaPhi)],distributed):
> EQOutr121:=coeff(EQOutr12,sin(ThetaPhi));
> EQOutr122:=coeff(EQOutr12,cos(ThetaPhi));
>
> EQOutr13:=int(zeta*(1-zeta^2)*(EQOutr1-tmp1*sin(tau)-tmp2*cos(tau)),zeta=-1..1);

> EQOutr2:=1/((RR[outr])^2*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr)*rho0[outr]*h0[outr]*(-
(1+mu0[outr])/2*2*RR[outr]/12*u[moutr]*diff(diff(U[outr10],theta),zeta)+(1-
mu0[outr])/2*(2*RR[outr]/12)^2*v[moutr]*diff(U[outr20],$(zeta,2))+v[moutr]*diff(U[outr20],$(
theta,2)))+(a0[outr])^2*v[moutr]*(2*(1-
mu0[outr])*(2*RR[outr]/12)^2*diff(U[outr20],$(zeta,2))+diff(U[outr20],$(theta,2)))+w[moutr]*
diff(U[outr30],theta)-(a0[outr])^2*w[moutr]*((2-
mu0[outr])*(2*RR[outr]/12)^2*diff(diff(U[outr30],$(zeta,2)),theta)+diff(U[outr30],$(theta,3))))-
rho0[outr]*h0[outr]*v[moutr]*diff(U[outr20],tau$2)-
(rho0[outr]*h0[outr]*(W[x1outr]/omega^2*cos(theta+phi)-W[z1outr]/omega^2*sin(theta+phi))):
> EQOutr2:=collect(expand(EQOutr2),[cos(tau),sin(tau)],distributed):
> tmp1:=coeff(EQOutr2,sin(tau)):
EQOutr21:=int((1-zeta^2)*tmp1,zeta=-1..1):
EQOutr21:=expand(applyrule([theta+phi=ThetaPhi,-theta-phi=-
ThetaPhi],combine(EQOutr21,trig))):
>
> EQOutr21:=collect(EQOutr21,[sin(ThetaPhi),cos(ThetaPhi)],distributed):
> ttmp1:=coeff(EQOutr21,sin(ThetaPhi)):
> EQOutr211:=coeff(EQOutr21,sin(ThetaPhi));
> ttmp2:=coeff(EQOutr21,cos(ThetaPhi)):
> EQOutr212:=coeff(EQOutr21,cos(ThetaPhi));
>
>
> factor(expand(simplify(EQOutr21-ttmp1*sin(ThetaPhi)-ttmp2*cos(ThetaPhi))));
> tmp2:=coeff(EQOutr2,cos(tau)):
EQOutr22:=int((1-zeta^2)*tmp2,zeta=-1..1):
EQOutr22:=expand(applyrule([theta+phi=ThetaPhi,-theta-phi=-
ThetaPhi],combine(EQOutr22,trig))):
>

```

```

> EQOutr22:=collect(EQOutr22,[sin(ThetaPhi),cos(ThetaPhi)],distributed):
> tttmp1:=coeff(EQOutr22,sin(ThetaPhi)):
> EQOutr221:=coeff(EQOutr22,sin(ThetaPhi));
> tttmp2:=coeff(EQOutr22,cos(ThetaPhi)):
> EQOutr222:=coeff(EQOutr22,cos(ThetaPhi));
> factor(expand(simplify(EQOutr22-ttmp1*sin(ThetaPhi)-ttmp2*cos(ThetaPhi))));
>
> EQOutr23:=int((1-zeta^2)*(EQOutr2-ttmp1*sin(tau)-ttmp2*cos(tau)),zeta=-1..1);
> EQOutr3:=1/(SonicSpeedMSqrOutr*(RR[outr])^2*omega^2*rho0[outr]*h0[outr]*(-
mu0[outr]*2*RR[outr]/l2*u[moutr]*diff(U[outr10],zeta)+v[moutr]*diff(U[outr20],theta)-
(a0[outr])^2*v[moutr]*((2-
mu0[outr])*(2*RR[outr]/l2)^2*diff(diff(U[outr20],`$(zeta,2)),theta)+diff(U[outr20],`$(theta,3)))+
w[moutr]*U[outr30]+(a0[outr])^2*w[moutr]*((2*RR[outr]/l2)^4*diff(U[outr30],zeta$4)+2*(2*RR[
outr]/l2)^2*diff(diff(U[outr30],zeta$2),theta$2)+diff(U[outr30],theta$4)))+rho0[outr]*h0[outr]*w[
moutr]*diff(U[outr30],tau$2))-(-
(rho*RR[2]+rho0[outr]*h0[outr])*(W[x1outr]/omega^2*sin(theta+phi)+W[z1outr]/omega^2*cos(th
eta+phi))+rho*RR[2]/(psi*Renolds)*e*(psi*Renolds/(rho*RR[2]*e*omega^2)*p[0]+P0)):
>
> EQOutr3:=collect(expand(EQOutr3),[cos(tau),sin(tau)],distributed):
> tmp1:=coeff(EQOutr3,sin(tau)):
> tmp0:=expand((1-zeta^2)^2*tmp1):
> nnn:=nops(tmp0);
EQOutr31:=0:
for kkk from 1 to nnn do
EQOutr31:=EQOutr31+int(op(kkk,tmp0),zeta=-1..1):
od:
> EQOutr31:=expand(applyrule([theta+phi=ThetaPhi,-theta-phi=-
ThetaPhi],combine(EQOutr31,trig)));
>
> EQOutr31:=collect(EQOutr31,[sin(ThetaPhi),cos(ThetaPhi)],distributed):
> EQOutr311:=simplify(convert(coeff(EQOutr31,sin(ThetaPhi)),trig));
>
> EQOutr312:=simplify(convert(coeff(EQOutr31,cos(ThetaPhi)),trig));
>
>
> tmp2:=coeff(EQOutr3,cos(tau)):
> tmp0:=expand((1-zeta^2)^2*tmp2):
> nnn:=nops(tmp0);
EQOutr32:=0:
for kkk from 1 to nnn do
EQOutr32:=EQOutr32+int(op(kkk,tmp0),zeta=-1..1):
od:
>
> EQOutr32:=expand(applyrule([theta+phi=ThetaPhi,-theta-phi=-
ThetaPhi],combine(EQOutr32,trig)));
>
> EQOutr32:=collect(EQOutr32,[sin(ThetaPhi),cos(ThetaPhi)],distributed):
> EQOutr321:=simplify(convert(coeff(EQOutr32,sin(ThetaPhi)),trig));
> EQOutr322:=simplify(convert(coeff(EQOutr32,cos(ThetaPhi)),trig));
> EQOutr33:=int((1-zeta^2)^2*(EQOutr3-tmp1*sin(tau)-tmp2*cos(tau)),zeta=-1..1);
>

```

Внутренняя оболочка

```

>
EQInn1:=1/((RR[inn])^2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn)*rho0[inn]*h0[inn]*((2*RR[inn]/l2)^2*u
[minn]*diff(U[inn10],zeta$2)+(1-mu0[inn])/2*u[minn]*diff(U[inn10],theta$2)-
(1+mu0[inn])/2*(2*RR[inn]/l2)*v[minn]*diff(diff(U[inn20],theta),zeta)-
(2*RR[inn]/l2)*mu0[inn]*w[minn]*diff(U[inn30],zeta))-
rho0[inn]*h0[inn]*u[minn]*diff(U[inn10],tau$2):
>
> EQInn1:=collect(expand(EQInn1),[cos(tau),sin(tau)],distributed):
>
> tmp1:=coeff(EQInn1,sin(tau)):
EQInn11:=int(zeta*(1-zeta^2)*tmp1,zeta=-1..1):
EQInn11:=expand(applyrule([theta+phi=ThetaPhi,-theta-phi=-ThetaPhi],combine(EQInn11,trig))):
>
> EQInn11:=collect(EQInn11,[sin(ThetaPhi),cos(ThetaPhi)],distributed):
> EQInn111:=coeff(EQInn11,sin(ThetaPhi));
> EQInn112:=coeff(EQInn11,cos(ThetaPhi));
>
> tmp2:=coeff(EQInn1,cos(tau)):
EQInn12:=int(zeta*(1-zeta^2)*tmp2,zeta=-1..1):
EQInn12:=expand(applyrule([theta+phi=ThetaPhi,-theta-phi=-ThetaPhi],combine(EQInn12,trig))):
> EQInn12:=collect(EQInn12,[sin(ThetaPhi),cos(ThetaPhi)],distributed):
> EQInn121:=coeff(EQInn12,sin(ThetaPhi));
> EQInn122:=coeff(EQInn12,cos(ThetaPhi));
>
> EQInn13:=int(zeta*(1-zeta^2)*(EQInn1-tmp1*sin(tau)-tmp2*cos(tau)),zeta=-1..1);
>
> EQInn2:=1/((RR[inn])^2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn)*rho0[inn]*h0[inn]*(-
(1+mu0[inn])/2*2*RR[inn]/l2*u[minn]*diff(diff(U[inn10],theta),zeta)+(1-
mu0[inn])/2*(2*RR[inn]/l2)^2*v[minn]*diff(U[inn20],$(zeta,2))+v[minn]*diff(U[inn20],$(theta,2)))+(a0[inn])^2*v[minn]*(2*(1-
mu0[inn])*(2*RR[inn]/l2)^2*diff(U[inn20],$(zeta,2))+diff(U[inn20],$(theta,2)))+w[minn]*diff(
U[inn30],theta)-(a0[inn])^2*w[minn]*((2-
mu0[inn])*(2*RR[inn]/l2)^2*diff(diff(U[inn30],$(zeta,2)),theta)+diff(U[inn30],$(theta,3))))-
rho0[inn]*h0[inn]*v[minn]*diff(U[inn20],tau$2)-
(rho0[inn]*h0[inn]*(W[x1inn]/omega^2*cos(theta+phi)-W[z1inn]/omega^2*sin(theta+phi))):
>
> EQInn2:=collect(expand(EQInn2),[cos(tau),sin(tau)],distributed):
> tmp1:=coeff(EQInn2,sin(tau)):
EQInn21:=int((1-zeta^2)*tmp1,zeta=-1..1):
EQInn21:=expand(applyrule([theta+phi=ThetaPhi,-theta-phi=-ThetaPhi],combine(EQInn21,trig))):
>
> EQInn21:=collect(EQInn21,[sin(ThetaPhi),cos(ThetaPhi)],distributed):
> EQInn211:=coeff(EQInn21,sin(ThetaPhi));
> EQInn212:=coeff(EQInn21,cos(ThetaPhi));
>
> tmp2:=coeff(EQInn2,cos(tau)):
EQInn22:=int((1-zeta^2)*tmp2,zeta=-1..1):
EQInn22:=expand(applyrule([theta+phi=ThetaPhi,-theta-phi=-ThetaPhi],combine(EQInn22,trig))):
>
> EQInn22:=collect(EQInn22,[sin(ThetaPhi),cos(ThetaPhi)],distributed):
> EQInn221:=coeff(EQInn22,sin(ThetaPhi));
> EQInn222:=coeff(EQInn22,cos(ThetaPhi));

```

```

> EQInn23:=int((1-zeta^2)*(EQInn2-tmp1*sin(tau)-tmp2*cos(tau)),zeta=-1..1);
> EQInn3:=1/(SonicSpeedMSqrInn*(RR[inn])^2*omega^2)*rho0[inn]*h0[inn]*(-
mu0[inn]*2*RR[inn]/l2*u[minn]*diff(U[inn10],zeta)+v[minn]*diff(U[inn20],theta)-
(a0[inn])^2*v[minn]*((2-
mu0[inn])*(2*RR[inn]/l2)^2*diff(diff(U[inn20],`$(zeta,2)),theta)+diff(U[inn20],`$(theta,3)))+w[
minn]*U[inn30]+(a0[inn])^2*w[minn]*((2*RR[inn]/l2)^4*diff(U[inn30],zeta$4)+2*(2*RR[inn]/l2)
^2*diff(diff(U[inn30],zeta$2),theta$2)+diff(U[inn30],theta$4)))+rho0[inn]*h0[inn]*w[minn]*diff(
U[inn30],tau$2)-((rho*RR[2]-
rho0[inn]*h0[inn])*(W[x1inn]/omega^2*sin(theta+phi)+W[z1inn]/omega^2*cos(theta+phi))-
rho*RR[2]/(psi*Renolds)*e*(psi*Renolds/(rho*RR[2]*e*omega^2)*p[0]+P0)):
>
>
> EQInn3:=collect(expand(EQInn3),[cos(tau),sin(tau)],distributed):
> tmp1:=coeff(EQInn3,sin(tau)):
> tmp0:=expand((1-zeta^2)^2*tmp1):
> nnn:=nops(tmp0);
EQInn31:=0:
for kkk from 1 to nnn do
EQInn31:=EQInn31+int(op(kkk,tmp0),zeta=-1..1):
od:
>
> EQInn31:=expand(applyrule([theta+phi=ThetaPhi,-theta-phi=-
ThetaPhi],combine(EQInn31,trig))):
>
> EQInn31:=collect(EQInn31,[sin(ThetaPhi),cos(ThetaPhi)],distributed):
> EQInn311:=simplify(convert(coeff(EQInn31,sin(ThetaPhi)),trig));
> EQInn312:=simplify(convert(coeff(EQInn31,cos(ThetaPhi)),trig));
>
> tmp2:=coeff(EQInn3,cos(tau)):
> tmp0:=expand((1-zeta^2)^2*tmp2):
> nnn:=nops(tmp0);
EQInn32:=0:
for kkk from 1 to nnn do
EQInn32:=EQInn32+int(op(kkk,tmp0),zeta=-1..1):
od:
>
> EQInn32:=expand(applyrule([theta+phi=ThetaPhi,-theta-phi=-
ThetaPhi],combine(EQInn32,trig))):
>
> EQInn32:=collect(EQInn32,[sin(ThetaPhi),cos(ThetaPhi)],distributed):
> EQInn321:=simplify(convert(coeff(EQInn32,sin(ThetaPhi)),trig));
> EQInn322:=simplify(convert(coeff(EQInn32,cos(ThetaPhi)),trig));
> EQInn33:=int((1-zeta^2)^2*(EQInn3-tmp1*sin(tau)-tmp2*cos(tau)),zeta=-1..1);
>
>
A[1]:=collect(EQOutr13,[s10innSin,s10innCos,c10innSin,c10innCos,s20innSin,s20innCos,c20innS
in,c20innCos,s30innSin,s30innCos,c30innSin,c30innCos,s10outrSin,s10outrCos,c10outrSin,c10ou
rCos,s20outrSin,s20outrCos,c20outrSin,c20outrCos,s30outrSin,s30outrCos,c30outrSin,c30outrCos,
o10outr,o30outr,o10inn,o30inn],distributed);
A[2]:=collect(EQOutr111,[s10innSin,s10innCos,c10innSin,c10innCos,s20innSin,s20innCos,c20inn
Sin,c20innCos,s30innSin,s30innCos,c30innSin,c30innCos,s10outrSin,s10outrCos,c10outrSin,c10ou
trCos,s20outrSin,s20outrCos,c20outrSin,c20outrCos,s30outrSin,s30outrCos,c30outrSin,c30outrCos

```


[illegible]

```
,o10outr,o30outr,o10inn,o30inn],distributed);
A[28]:=collect(EQInn33,[s10innSin,s10innCos,c10innSin,c10innCos,s20innSin,s20innCos,c20innSin,
c20innCos,s30innSin,s30innCos,c30innSin,c30innCos,s10outrSin,s10outrCos,c10outrSin,c10outrCos,
s20outrSin,s20outrCos,c20outrSin,c20outrCos,s30outrSin,s30outrCos,c30outrSin,c30outrCos,
o10outr,o30outr,o10inn,o30inn],distributed);
>
> o10outr:=solve(A[1],o10outr);
> o30outr:=solve(A[14],o30outr);
> o10outr:=simplify(o10outr);
> o10inn:=solve(A[19],o10inn);
> o30inn:=solve(A[28],o30inn);
> o10inn:=simplify(o10inn);
> ccf[1][1]:=simplify(coeff(A[13],c30innSin));
ccf[1][2]:=simplify(coeff(A[13],c30innCos));
ccf[1][3]:=simplify(coeff(A[13],c10outrSin));
ccf[1][4]:=simplify(coeff(A[13],c20outrSin));
ccf[1][5]:=simplify(coeff(A[13],c30outrSin));
ccf[1][6]:=simplify(coeff(A[13],c30outrCos));
ccf[1][7]:=simplify(A[13]-
(ccf[1][1]*c30innSin+ccf[1][2]*c30innCos+ccf[1][3]*c10outrSin+ccf[1][4]*c20outrSin+ccf[1][5]*
c30outrSin+ccf[1][6]*c30outrCos));
Aa[13]:=cf[1][1]*c30innSin+cf[1][2]*c30innCos+cf[1][3]*c10outrSin+cf[1][4]*c20outrSin+cf[1][5]*
c30outrSin+cf[1][6]*c30outrCos+cf[1][7];
>
> applyrule([B0New*v=-
b33/12],applyrule([rho*RR[2]*(63*sigma^5*cosh(sigma)^2+63*sigma^5*cosh(sigma)*sinh(sigma)
)+2835*sigma*cosh(sigma)^2-1890*sigma^2*cosh(sigma)^2-315*sigma^4*cosh(sigma)^2-
315*sigma^4*cosh(sigma)*sinh(sigma)-
2835*cosh(sigma)^2+2835+945*sigma^3*cosh(sigma)*sinh(sigma)+315*sigma^4+2*sigma^9*cos
h(sigma)*sinh(sigma)-1890*sigma^2*cosh(sigma)*sinh(sigma)-
6*sigma^7*cosh(sigma)*sinh(sigma)-
2835*cosh(sigma)*sinh(sigma)+2*sigma^9*cosh(sigma)^2+1890*sigma^2+2835*sigma*cosh(sig
ma)*sinh(sigma)-
6*sigma^7*cosh(sigma)^2+945*sigma^3*cosh(sigma)^2)=315/128*psi*Renolds*(rho0[outr]*h0[o
utr]/((RR[outr]*omega)^2*SonicSpeedMSqrOutr))*B0New*sigma^9*cosh(sigma)*(cosh(sigma)+s
inh(sigma))),512/315*rho*RR[2]*epsilon^2*w*(2835*sigma*cosh(sigma)^2-
315*sigma^4*cosh(sigma)*sinh(sigma)+2*sigma^9*cosh(sigma)*sinh(sigma)-
2835*cosh(sigma)*sinh(sigma)+2835+315*sigma^4-
6*sigma^7*cosh(sigma)^2+2*sigma^9*cosh(sigma)^2-
1890*sigma^2*cosh(sigma)*sinh(sigma)+945*sigma^3*cosh(sigma)*sinh(sigma)+63*sigma^5*co
sh(sigma)^2-2835*cosh(sigma)^2-1890*sigma^2*cosh(sigma)^2+1890*sigma^2-
6*sigma^7*cosh(sigma)*sinh(sigma)+2835*sigma*cosh(sigma)*sinh(sigma)-
315*sigma^4*cosh(sigma)^2+63*sigma^5*cosh(sigma)*sinh(sigma)+945*sigma^3*cosh(sigma)^2
)/(psi*Renolds*sigma^9*cosh(sigma)*(cosh(sigma)+sinh(sigma)))));
>
> ccf[1][1]:=-
2*rho0[outr]*h0[outr]*B0New[outr]*epsilon^2*w/(omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2):

ccf[1][2]:=-b33[outr]*rho0[outr]*h0[outr]/(omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2):

ccf[1][3]:=-a13[outr]*rho0[outr]*h0[outr]/(RR[outr]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr):
```

```

ccf[1][4]:=-a23[outr]*(rho0[outr]*h0[outr]/(omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2)):

ccf[1][5]:=a33[outr]*(rho0[outr]*h0[outr]/(omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2)):

ccf[1][6]:=rho0[outr]*h0[outr]/((RR[outr])^2*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr)*b33[outr]:

ccf[1][7]:=-Aa3[outr]*(rho0[outr]*h0[outr]/((RR[outr]*omega)^2*SonicSpeedMSqrOutr)):
> ccf[2][1]:=simplify(coeff(A[12],s30innSin)):
ccf[2][2]:=simplify(coeff(A[12],s30innCos)):
ccf[2][3]:=simplify(coeff(A[12],s10outrSin)):
ccf[2][4]:=simplify(coeff(A[12],s20outrSin)):
ccf[2][5]:=simplify(coeff(A[12],s30outrSin)):
ccf[2][6]:=simplify(coeff(A[12],s30outrCos)):
> ccf[2][7]:=simplify(A[12]-
(ccf[2][1]*s30innSin+ccf[2][2]*s30innCos+ccf[2][3]*s10outrSin+ccf[2][4]*s20outrSin+ccf[2][5]*s
30outrSin+ccf[2][6]*s30outrCos));
Aa[12]:=cf[2][1]*s30innSin+cf[2][2]*s30innCos+cf[2][3]*s10outrSin+cf[2][4]*s20outrSin+cf[2][5]
*s30outrSin+cf[2][6]*s30outrCos+cf[2][7]:
> simplify(ccf[2][1]-ccf[2][1]);
> ccf[2][1]:=-
2*rho0[outr]*h0[outr]*B0New[outr]*epsilon^2*w/(omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2):

ccf[2][2]:=-b33[outr]*rho0[outr]*h0[outr]/(omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2):

ccf[2][3]:=-a13[outr]*rho0[outr]*h0[outr]/(RR[outr]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr):

ccf[2][4]:=a23[outr]*(rho0[outr]*h0[outr]/(omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2)):

ccf[2][5]:=a33[outr]*(rho0[outr]*h0[outr]/(omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2)):

ccf[2][6]:=rho0[outr]*h0[outr]/((RR[outr])^2*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr)*b33[outr]:

ccf[2][7]:=-Ab3[outr]*(rho0[outr]*h0[outr]/((RR[outr]*omega)^2*SonicSpeedMSqrOutr)):
>
> ccf[3][1]:=simplify(coeff(A[11],c30innSin)):
ccf[3][2]:=simplify(coeff(A[11],c30innCos)):
ccf[3][3]:=simplify(coeff(A[11],c10outrCos)):
ccf[3][4]:=simplify(coeff(A[11],c20outrCos)):
ccf[3][5]:=simplify(coeff(A[11],c30outrSin)):
ccf[3][6]:=simplify(coeff(A[11],c30outrCos)):
> ccf[3][7]:=simplify(A[11]-
(ccf[3][1]*c30innSin+ccf[3][2]*c30innCos+ccf[3][3]*c10outrCos+ccf[3][4]*c20outrCos+ccf[3][5]
*c30outrSin+ccf[3][6]*c30outrCos));
Aa[11]:=cf[3][1]*c30innSin+cf[3][2]*c30innCos+cf[3][3]*c10outrCos+cf[3][4]*c20outrCos+cf[3]
[5]*c30outrSin+cf[3][6]*c30outrCos+cf[3][7]:
> simplify(ccf[3][1]-ccf[3][1]);
> ccf[3][1]:=b33[outr]*rho0[outr]*h0[outr]/(omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2):

ccf[3][2]:=-
2*rho0[outr]*h0[outr]*B0New[outr]*epsilon^2*w/(omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2):

ccf[3][3]:=-a13[outr]*rho0[outr]*h0[outr]/(RR[outr]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr):

```

```

ccf[3][4]:=-a23[outr]*(rho0[outr]*h0[outr]/(omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2)):
ccf[3][5]:=-rho0[outr]*h0[outr]/((RR[outr])^2*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr)*b33[outr]:
ccf[3][6]:=a33[outr]*(rho0[outr]*h0[outr]/(omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2)):
ccf[3][7]:=-Ac3[outr]*(rho0[outr]*h0[outr]/((RR[outr]*omega)^2*SonicSpeedMSqrOutr)):
>
>
> ccf[4][1]:=simplify(coeff(A[10],s30innSin)):
ccf[4][2]:=simplify(coeff(A[10],s30innCos)):
ccf[4][3]:=simplify(coeff(A[10],s10outrCos)):
ccf[4][4]:=simplify(coeff(A[10],s20outrCos)):
ccf[4][5]:=simplify(coeff(A[10],s30outrSin)):
ccf[4][6]:=simplify(coeff(A[10],s30outrCos)):
> ccf[4][7]:=simplify(A[10]-
(ccf[4][1]*s30innSin+ccf[4][2]*s30innCos+ccf[4][3]*s10outrCos+ccf[4][4]*s20outrCos+ccf[4][5]
*s30outrSin+ccf[4][6]*s30outrCos));
Aa[10]:=cf[4][1]*s30innSin+cf[4][2]*s30innCos+cf[4][3]*s10outrCos+cf[4][4]*s20outrCos+cf[4][5]
*s30outrSin+cf[4][6]*s30outrCos+cf[4][7]:
> simplify(ccf[4][7]-ccf[4][7]);
> ccf[4][1]:=b33[outr]*rho0[outr]*h0[outr]/(omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2):

ccf[4][2]:=-
2*rho0[outr]*h0[outr]*B0New[outr]*epsilon^2*w/(omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2):

ccf[4][3]:=-a13[outr]*rho0[outr]*h0[outr]/(RR[outr]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr):

ccf[4][4]:=a23[outr]*(rho0[outr]*h0[outr]/(omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2)):

ccf[4][5]:=-rho0[outr]*h0[outr]/((RR[outr])^2*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr)*b33[outr]:

ccf[4][6]:=a33[outr]*(rho0[outr]*h0[outr]/(omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2)):

ccf[4][7]:=-Ad3[outr]*(rho0[outr]*h0[outr]/((RR[outr]*omega)^2*SonicSpeedMSqrOutr)):
>
> ccf[5][1]:=simplify(coeff(A[27],c10innSin)):
ccf[5][2]:=simplify(coeff(A[27],c20innSin)):
ccf[5][3]:=simplify(coeff(A[27],c30innSin)):
ccf[5][4]:=simplify(coeff(A[27],c30innCos)):
ccf[5][5]:=simplify(coeff(A[27],c30outrSin)):
ccf[5][6]:=simplify(coeff(A[27],c30outrCos)):
> ccf[5][7]:=simplify(A[27]-
(ccf[5][1]*c10innSin+ccf[5][2]*c20innSin+ccf[5][3]*c30innSin+ccf[5][4]*c30innCos+ccf[5][5]*c
30outrSin+ccf[5][6]*c30outrCos));
Aa[27]:=cf[5][1]*c10innSin+cf[5][2]*c20innSin+cf[5][3]*c30innSin+cf[5][4]*c30innCos+cf[5][5]
*c30outrSin+cf[5][6]*c30outrCos+cf[5][7]:
> simplify(ccf[5][1]-ccf[5][1]);
> ccf[5][1]:=-a13[inn]*rho0[inn]*h0[inn]/(RR[inn]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn):

ccf[5][2]:=-a23[inn]*(rho0[inn]*h0[inn]/(omega^2*SonicSpeedMSqrInn*RR[inn]^2)):

```

```

ccf[5][3]:=a33[inn]*(rho0[inn]*h0[inn]/(omega^2*SonicSpeedMSqrInn*RR[inn]^2)):

ccf[5][4]:=b33[inn]*rho0[inn]*h0[inn]/(RR[inn]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn):

ccf[5][5]:=-
2*rho0[inn]*h0[inn]*B0New[inn]*epsilon^2*w/(RR[inn]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn):

ccf[5][6]:=-b33[inn]*rho0[inn]*h0[inn]/(RR[inn]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn):

ccf[5][7]:=-Aa3[inn]*(rho0[inn]*h0[inn]/((RR[inn]*omega)^2*SonicSpeedMSqrInn)):
>
> ccf[6][1]:=simplify(coeff(A[26],s10innSin)):
ccf[6][2]:=simplify(coeff(A[26],s20innSin)):
ccf[6][3]:=simplify(coeff(A[26],s30innSin)):
ccf[6][4]:=simplify(coeff(A[26],s30innCos)):
ccf[6][5]:=simplify(coeff(A[26],s30outrSin)):
ccf[6][6]:=simplify(coeff(A[26],s30outrCos)):
> ccf[6][7]:=simplify(A[26]-
(ccf[6][1]*s10innSin+ccf[6][2]*s20innSin+ccf[6][3]*s30innSin+ccf[6][4]*s30innCos+ccf[6][5]*s30outrSin+ccf[6][6]*s30outrCos));
Aa[26]:=cf[6][1]*s10innSin+cf[6][2]*s20innSin+cf[6][3]*s30innSin+cf[6][4]*s30innCos+cf[6][5]*s30outrSin+cf[6][6]*s30outrCos+cf[6][7]:
> simplify(ccf[6][7]-ccf[6][7]);
> ccf[6][1]:=-a13[inn]*rho0[inn]*h0[inn]/(RR[inn]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn):

ccf[6][2]:=a23[inn]*(rho0[inn]*h0[inn]/(omega^2*SonicSpeedMSqrInn*RR[inn]^2)):

ccf[6][3]:=a33[inn]*(rho0[inn]*h0[inn]/(omega^2*SonicSpeedMSqrInn*RR[inn]^2)):

ccf[6][4]:=b33[inn]*rho0[inn]*h0[inn]/(RR[inn]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn):

ccf[6][5]:=-
2*rho0[inn]*h0[inn]*B0New[inn]*epsilon^2*w/(RR[inn]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn):

ccf[6][6]:=-b33[inn]*rho0[inn]*h0[inn]/(RR[inn]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn):

ccf[6][7]:=-Ab3[inn]*(rho0[inn]*h0[inn]/((RR[inn]*omega)^2*SonicSpeedMSqrInn)):
> ccf[7][1]:=simplify(coeff(A[25],c10innCos)):
ccf[7][2]:=simplify(coeff(A[25],c20innCos)):
ccf[7][3]:=simplify(coeff(A[25],c30innCos)):
ccf[7][4]:=simplify(coeff(A[25],c30innSin)):
ccf[7][5]:=simplify(coeff(A[25],c30outrSin)):
ccf[7][6]:=simplify(coeff(A[25],c30outrCos)):
> ccf[7][7]:=simplify(A[25]-
(ccf[7][1]*c10innCos+ccf[7][2]*c20innCos+ccf[7][3]*c30innCos+ccf[7][4]*c30innSin+ccf[7][5]*c30outrSin+ccf[7][6]*c30outrCos));
Aa[25]:=cf[7][1]*c10innCos+cf[7][2]*c20innCos+cf[7][3]*c30innCos+cf[7][4]*c30innSin+cf[7][5]*c30outrSin+cf[7][6]*c30outrCos+cf[7][7]:
> simplify(ccf[7][1]-ccf[7][1]);
> ccf[7][1]:=-a13[inn]*rho0[inn]*h0[inn]/(RR[inn]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn):

```

```

ccf[7][2]:=-a23[inn]*(rho0[inn]*h0[inn]/(omega^2*SonicSpeedMSqrInn*RR[inn]^2)):

ccf[7][3]:=a33[inn]*(rho0[inn]*h0[inn]/(omega^2*SonicSpeedMSqrInn*RR[inn]^2)):

ccf[7][4]:=-b33[inn]*rho0[inn]*h0[inn]/(RR[inn]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn):

ccf[7][5]:=b33[inn]*rho0[inn]*h0[inn]/(RR[inn]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn):

ccf[7][6]:=-
2*rho0[inn]*h0[inn]*B0New[inn]*epsilon^2*w/(RR[inn]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn):

ccf[7][7]:=-Ac3[inn]*(rho0[inn]*h0[inn]/((RR[inn]*omega)^2*SonicSpeedMSqrInn)):
> ccf[8][6];
> ccf[8][1]:=simplify(coeff(A[24],s10innCos)):
ccf[8][2]:=simplify(coeff(A[24],s20innCos)):
ccf[8][3]:=simplify(coeff(A[24],s30innSin)):
ccf[8][4]:=simplify(coeff(A[24],s30innCos)):
ccf[8][5]:=simplify(coeff(A[24],s30outrSin)):
ccf[8][6]:=simplify(coeff(A[24],s30outrCos)):
> ccf[8][7]:=simplify(A[24]-
(ccf[8][1]*s10innCos+ccf[8][2]*s20innCos+ccf[8][3]*s30innSin+ccf[8][4]*s30innCos+ccf[8][5]*s
30outrSin+ccf[8][6]*s30outrCos));
Aa[24]:=cf[8][1]*s10innCos+cf[8][2]*s20innCos+cf[8][3]*s30innSin+cf[8][4]*s30innCos+cf[8][5]
*s30outrSin+cf[8][6]*s30outrCos+cf[8][7]:
> simplify(ccf[8][7]-ccf[8][7]);
> ccf[8][1]:=-a13[inn]*rho0[inn]*h0[inn]/(RR[inn]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn):

ccf[8][2]:=a23[inn]*(rho0[inn]*h0[inn]/(omega^2*SonicSpeedMSqrInn*RR[inn]^2)):

ccf[8][3]:=-b33[inn]*rho0[inn]*h0[inn]/(RR[inn]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn):

ccf[8][4]:=a33[inn]*(rho0[inn]*h0[inn]/(omega^2*SonicSpeedMSqrInn*RR[inn]^2)):

ccf[8][5]:=b33[inn]*rho0[inn]*h0[inn]/(RR[inn]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn):

ccf[8][6]:=-
2*rho0[inn]*h0[inn]*B0New[inn]*epsilon^2*w/(RR[inn]^2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn):

ccf[8][7]:=-Ad3[inn]*(rho0[inn]*h0[inn]/((RR[inn]*omega)^2*SonicSpeedMSqrInn)):
> s10outrCos:=applyrule([mu0[outr]*l2^2+2*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2*l2^2-
l2^2-84*RR[outr]^2=a11[outr]*l2^2*105/8],simplify(solve(A[2],s10outrCos)));
>
> c10outrCos:=applyrule([mu0[outr]*l2^2+2*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2*l2^2-
l2^2-84*RR[outr]^2=a11[outr]*l2^2*105/8],simplify(solve(A[3],c10outrCos)));
>
> s10outrSin:=applyrule([mu0[outr]*l2^2+2*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2*l2^2-
l2^2-84*RR[outr]^2=a11[outr]*l2^2*105/8],simplify(solve(A[4],s10outrSin)));
> c10outrSin:=applyrule([mu0[outr]*l2^2+2*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2*l2^2-
l2^2-84*RR[outr]^2=a11[outr]*l2^2*105/8],simplify(solve(A[5],c10outrSin)));
>
> s10innCos:=applyrule([mu0[inn]*l2^2+2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn*RR[inn]^2*l2^2-12^2-
84*RR[inn]^2=a11[inn]*l2^2*105/8],simplify(solve(A[15],s10innCos)));

```

```

>
>
> c10innCos:=applyrule([mu0[inn]*l2^2+2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn*RR[inn]^2*l2^2-l2^2-
84*RR[inn]^2=a11[inn]*l2^2*105/8],simplify(solve(A[16],c10innCos)));
> s10innSin:=applyrule([mu0[inn]*l2^2+2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn*RR[inn]^2*l2^2-l2^2-
84*RR[inn]^2=a11[inn]*l2^2*105/8],simplify(solve(A[17],s10innSin)));
> c10innSin:=applyrule([mu0[inn]*l2^2+2*omega^2*SonicSpeedMSqrInn*RR[inn]^2*l2^2-l2^2-
84*RR[inn]^2=a11[inn]*l2^2*105/8],simplify(solve(A[18],c10innSin)));
> c20outrCos:=simplify(applyrule([32/35*a0[outr]^2+256/15*a0[outr]^2*RR[outr]^2/(l2^2)-
128/15*a0[outr]^2*mu0[outr]*RR[outr]^2/(l2^2)=-a23[outr]-
32/35,1024/1575*RR[outr]^2*mu0[outr]^2/(l2^2)+1024/1575*RR[outr]^2*mu0[outr]/(l2^2)=a12[o
utr]*a13[outr],4/3*Ez*cos(phiz0)*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2=Ac2[outr]],collect(
expand(applyrule([75*a11[outr]*RR[outr]^2+300*a11[outr]*a0[outr]^2*RR[outr]^2-
300*a11[outr]*a0[outr]^2*mu0[outr]*RR[outr]^2+15*a11[outr]*l2^2+15*a11[outr]*a0[outr]^2*l2
^2-75*a11[outr]*mu0[outr]*RR[outr]^2-
15*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2*l2^2*a11[outr]+4*RR[outr]^2*mu0[outr]^2+8*m
u0[outr]*RR[outr]^2+4*RR[outr]^2=-de1[outr]*l2^2*(15/4)^2,-75*a11[outr]*RR[outr]^2-
300*a11[outr]*a0[outr]^2*RR[outr]^2+300*a11[outr]*a0[outr]^2*mu0[outr]*RR[outr]^2-
15*a11[outr]*l2^2-
15*a11[outr]*a0[outr]^2*l2^2+75*a11[outr]*mu0[outr]*RR[outr]^2+15*omega^2*SonicSpeedMS
qrOutr*RR[outr]^2*l2^2*a11[outr]-4*RR[outr]^2*mu0[outr]^2-8*mu0[outr]*RR[outr]^2-
4*RR[outr]^2=de1[outr]*l2^2*(15/4)^2],simplify(solve(A[6],c20outrCos)))),[c30outrCos,a11[outr]
,de1[outr]],distributed)));
>
>
c20outrCos:=simplify(applyrule([a13[outr]*a12[outr]=de2[outr]+a23[outr]*a11[outr]],expand(c20o
utrCos),[c30outrCos,a11[outr]]));
>
>
> c20outrSin:=simplify(applyrule([32/35*a0[outr]^2+256/15*a0[outr]^2*RR[outr]^2/(l2^2)-
128/15*a0[outr]^2*mu0[outr]*RR[outr]^2/(l2^2)=-a23[outr]-
32/35,1024/1575*RR[outr]^2*mu0[outr]^2/(l2^2)+1024/1575*RR[outr]^2*mu0[outr]/(l2^2)=a12[o
utr]*a13[outr],4/3*Ez*sin(phiz0)*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2=Aa2[outr]],collect(
expand(applyrule([75*a11[outr]*RR[outr]^2+300*a11[outr]*a0[outr]^2*RR[outr]^2-
300*a11[outr]*a0[outr]^2*mu0[outr]*RR[outr]^2+15*a11[outr]*l2^2+15*a11[outr]*a0[outr]^2*l2
^2-75*a11[outr]*mu0[outr]*RR[outr]^2-
15*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2*l2^2*a11[outr]+4*RR[outr]^2*mu0[outr]^2+8*m
u0[outr]*RR[outr]^2+4*RR[outr]^2=-de1[outr]*l2^2*(15/4)^2,-75*a11[outr]*RR[outr]^2-
300*a11[outr]*a0[outr]^2*RR[outr]^2+300*a11[outr]*a0[outr]^2*mu0[outr]*RR[outr]^2-
15*a11[outr]*l2^2-
15*a11[outr]*a0[outr]^2*l2^2+75*a11[outr]*mu0[outr]*RR[outr]^2+15*omega^2*SonicSpeedMS
qrOutr*RR[outr]^2*l2^2*a11[outr]-4*RR[outr]^2*mu0[outr]^2-8*mu0[outr]*RR[outr]^2-
4*RR[outr]^2=de1[outr]*l2^2*(15/4)^2],simplify(solve(A[8],c20outrSin)))),[a11[outr],c30outrSin,
sin(phiz0),de1[outr]],distributed)));
>
>
c20outrSin:=simplify(applyrule([a13[outr]*a12[outr]=de2[outr]+a23[outr]*a11[outr]],expand(c20o
utrSin),[c30outrSin,a11[outr]]));
>
> s20outrSin:=simplify(solve(A[9],s20outrSin));
>
s20outrSin:=simplify(applyrule([a13[outr]*a12[outr]=de2[outr]+a23[outr]*a11[outr]],applyrule([

```

```

256/15*a0[outr]^2*RR[outr]^2/(de1[outr]*l2^2)-
32/35*a0[outr]^2/de1[outr]+128/15*a0[outr]^2*mu0[outr]*RR[outr]^2/(de1[outr]*l2^2)=(a23[outr]
]+32/35)/de1[outr],(32/35*a0[outr]^2/de1[outr]+256/15*a0[outr]^2*RR[outr]^2/(de1[outr]*l2^2)-
128/15*a0[outr]^2*mu0[outr]*RR[outr]^2/(de1[outr]*l2^2))=(-a23[outr]-
32/35)/de1[outr],1024/1575*RR[outr]^2*mu0[outr]/(de1[outr]*l2^2)+1024/1575*RR[outr]^2*mu0
[outr]^2/(de1[outr]*l2^2)=a13[outr]*a12[outr]/de1[outr],-
1024/1575*RR[outr]^2*mu0[outr]/(de1[outr]*l2^2)-
1024/1575*RR[outr]^2*mu0[outr]^2/(de1[outr]*l2^2)=-
a13[outr]*a12[outr]/de1[outr]],collect(applyrule([75*a11[outr]*RR[outr]^2+300*a11[outr]*a0[outr]
]^2*RR[outr]^2-
300*a11[outr]*a0[outr]^2*mu0[outr]*RR[outr]^2+15*a11[outr]*l2^2+15*a11[outr]*a0[outr]^2*l2
^2-75*a11[outr]*mu0[outr]*RR[outr]^2-
15*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2*l2^2*a11[outr]+4*RR[outr]^2*mu0[outr]^2+8*m
u0[outr]*RR[outr]^2+4*RR[outr]^2=-de1[outr]*l2^2*(15/4)^2,-75*a11[outr]*RR[outr]^2-
300*a11[outr]*a0[outr]^2*RR[outr]^2+300*a11[outr]*a0[outr]^2*mu0[outr]*RR[outr]^2-
15*a11[outr]*l2^2-
15*a11[outr]*a0[outr]^2*l2^2+75*a11[outr]*mu0[outr]*RR[outr]^2+15*omega^2*SonicSpeedMS
qrOutr*RR[outr]^2*l2^2*a11[outr]-4*RR[outr]^2*mu0[outr]^2-8*mu0[outr]*RR[outr]^2-
4*RR[outr]^2=de1[outr]*l2^2*(15/4)^2],applyrule([Ex*sin(phix0)*omega^2*SonicSpeedMSqrOut
r*RR[outr]^2=-3/4*Ab2[outr]],expand(s20outrSin))),[s30outrSin,a11[outr]]));

>
> s20outrCos:=applyrule([75*a11[outr]*RR[outr]^2+300*a11[outr]*a0[outr]^2*RR[outr]^2-
300*a11[outr]*a0[outr]^2*mu0[outr]*RR[outr]^2+15*a11[outr]*l2^2+15*a11[outr]*a0[outr]^2*l2
^2-75*a11[outr]*mu0[outr]*RR[outr]^2-
15*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2*l2^2*a11[outr]+4*RR[outr]^2*mu0[outr]^2+8*m
u0[outr]*RR[outr]^2+4*RR[outr]^2=-de1[outr]*l2^2*(15/4)^2,-75*a11[outr]*RR[outr]^2-
300*a11[outr]*a0[outr]^2*RR[outr]^2+300*a11[outr]*a0[outr]^2*mu0[outr]*RR[outr]^2-
15*a11[outr]*l2^2-
15*a11[outr]*a0[outr]^2*l2^2+75*a11[outr]*mu0[outr]*RR[outr]^2+15*omega^2*SonicSpeedMS
qrOutr*RR[outr]^2*l2^2*a11[outr]-4*RR[outr]^2*mu0[outr]^2-8*mu0[outr]*RR[outr]^2-
4*RR[outr]^2=de1[outr]*l2^2*(15/4)^2],collect(expand(simplify(solve(A[7],s20outrCos))),[s30out
rCos,Ex,cos(phix0)]));

>
s20outrCos:=simplify(applyrule([a13[outr]*a12[outr]=de2[outr]+a23[outr]*a11[outr]],applyrule([-
256/15*a0[outr]^2*RR[outr]^2/(de1[outr]*l2^2)-
32/35*a0[outr]^2/de1[outr]+128/15*a0[outr]^2*mu0[outr]*RR[outr]^2/(de1[outr]*l2^2)=(a23[outr]
]+32/35)/de1[outr],(32/35*a0[outr]^2/de1[outr]+256/15*a0[outr]^2*RR[outr]^2/(de1[outr]*l2^2)-
128/15*a0[outr]^2*mu0[outr]*RR[outr]^2/(de1[outr]*l2^2))=(-a23[outr]-
32/35)/de1[outr],1024/1575*RR[outr]^2*mu0[outr]/(de1[outr]*l2^2)+1024/1575*RR[outr]^2*mu0
[outr]^2/(de1[outr]*l2^2)=a13[outr]*a12[outr]/de1[outr],-
1024/1575*RR[outr]^2*mu0[outr]/(de1[outr]*l2^2)-
1024/1575*RR[outr]^2*mu0[outr]^2/(de1[outr]*l2^2)=-
a13[outr]*a12[outr]/de1[outr]],collect(applyrule([-
4/3*Ex*cos(phix0)*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr*RR[outr]^2=Ad2[outr]],expand(s20outrCos))),
[s30outrCos,a11[outr]]));

>
>
> c20innCos:=applyrule([75*a11[inn]*RR[inn]^2+300*a11[inn]*a0[inn]^2*RR[inn]^2-
300*a11[inn]*a0[inn]^2*mu0[inn]*RR[inn]^2+15*a11[inn]*l2^2+15*a11[inn]*a0[inn]^2*l2^2-
75*a11[inn]*mu0[inn]*RR[inn]^2-
15*omega^2*SonicSpeedMSqrInn*RR[inn]^2*l2^2*a11[inn]+4*RR[inn]^2*mu0[inn]^2+8*mu0[i

```

```

nn)*RR[inn]^2+4*RR[inn]^2=-de1[inn]*l2^2*(15/4)^2,-75*a11[inn]*RR[inn]^2-
300*a11[inn]*a0[inn]^2*RR[inn]^2+300*a11[inn]*a0[inn]^2*mu0[inn]*RR[inn]^2-
15*a11[inn]*l2^2-
15*a11[inn]*a0[inn]^2*l2^2+75*a11[inn]*mu0[inn]*RR[inn]^2+15*omega^2*SonicSpeedMSqrIn
n*RR[inn]^2*l2^2*a11[inn]-4*RR[inn]^2*mu0[inn]^2-8*mu0[inn]*RR[inn]^2-
4*RR[inn]^2=de1[inn]*l2^2*(15/4)^2],simplify(solve(A[20],c20innCos)));
> c20innCos:=simplify(applyrule([a13[inn]*a12[inn]=de2[inn]+a23[inn]*a11[inn]],applyrule([-
256/15*a0[inn]^2*RR[inn]^2/(de1[inn]*l2^2)-
32/35*a0[inn]^2/de1[inn]+128/15*a0[inn]^2*mu0[inn]*RR[inn]^2/(de1[inn]*l2^2)=(a23[inn]+32/
35)/de1[inn],(32/35*a0[inn]^2/de1[inn]+256/15*a0[inn]^2*RR[inn]^2/(de1[inn]*l2^2)-
128/15*a0[inn]^2*mu0[inn]*RR[inn]^2/(de1[inn]*l2^2))=(-a23[inn]-
32/35)/de1[inn],1024/1575*RR[inn]^2*mu0[inn]/(de1[inn]*l2^2)+1024/1575*RR[inn]^2*mu0[inn
]^2/(de1[inn]*l2^2)=a13[inn]*a12[inn]/de1[inn],-1024/1575*RR[inn]^2*mu0[inn]/(de1[inn]*l2^2)-
1024/1575*RR[inn]^2*mu0[inn]^2/(de1[inn]*l2^2)=-
a13[inn]*a12[inn]/de1[inn]],collect(applyrule([4/3*Ez*cos(phiz0)*omega^2*SonicSpeedMSqrInn*
RR[inn]^2=Ac2[inn]],expand(c20innCos)),[c30innCos,a11[inn]]))));
>
>
>
> s20innCos:=applyrule([75*a11[inn]*RR[inn]^2+300*a11[inn]*a0[inn]^2*RR[inn]^2-
300*a11[inn]*a0[inn]^2*mu0[inn]*RR[inn]^2+15*a11[inn]*l2^2+15*a11[inn]*a0[inn]^2*l2^2-
75*a11[inn]*mu0[inn]*RR[inn]^2-
15*omega^2*SonicSpeedMSqrInn*RR[inn]^2*l2^2*a11[inn]+4*RR[inn]^2*mu0[inn]^2+8*mu0[i
nn]*RR[inn]^2+4*RR[inn]^2=-de1[inn]*l2^2*(15/4)^2,-75*a11[inn]*RR[inn]^2-
300*a11[inn]*a0[inn]^2*RR[inn]^2+300*a11[inn]*a0[inn]^2*mu0[inn]*RR[inn]^2-
15*a11[inn]*l2^2-
15*a11[inn]*a0[inn]^2*l2^2+75*a11[inn]*mu0[inn]*RR[inn]^2+15*omega^2*SonicSpeedMSqrIn
n*RR[inn]^2*l2^2*a11[inn]-4*RR[inn]^2*mu0[inn]^2-8*mu0[inn]*RR[inn]^2-
4*RR[inn]^2=de1[inn]*l2^2*(15/4)^2],simplify(solve(A[21],s20innCos)));
> s20innCos:=simplify(applyrule([a13[inn]*a12[inn]=de2[inn]+a23[inn]*a11[inn]],applyrule([-
256/15*a0[inn]^2*RR[inn]^2/(de1[inn]*l2^2)-
32/35*a0[inn]^2/de1[inn]+128/15*a0[inn]^2*mu0[inn]*RR[inn]^2/(de1[inn]*l2^2)=(a23[inn]+32/
35)/de1[inn],(32/35*a0[inn]^2/de1[inn]+256/15*a0[inn]^2*RR[inn]^2/(de1[inn]*l2^2)-
128/15*a0[inn]^2*mu0[inn]*RR[inn]^2/(de1[inn]*l2^2))=(-a23[inn]-
32/35)/de1[inn],1024/1575*RR[inn]^2*mu0[inn]/(de1[inn]*l2^2)+1024/1575*RR[inn]^2*mu0[inn
]^2/(de1[inn]*l2^2)=a13[inn]*a12[inn]/de1[inn],-1024/1575*RR[inn]^2*mu0[inn]/(de1[inn]*l2^2)-
1024/1575*RR[inn]^2*mu0[inn]^2/(de1[inn]*l2^2)=-
a13[inn]*a12[inn]/de1[inn]],collect(applyrule([Ex*cos(phix0)*omega^2*SonicSpeedMSqrInn*RR[
inn]^2=-3/4*Ad2[inn]],expand(s20innCos)),[s30innCos,a11[inn]]))));
>
>
> c20innSin:=applyrule([75*a11[inn]*RR[inn]^2+300*a11[inn]*a0[inn]^2*RR[inn]^2-
300*a11[inn]*a0[inn]^2*mu0[inn]*RR[inn]^2+15*a11[inn]*l2^2+15*a11[inn]*a0[inn]^2*l2^2-
75*a11[inn]*mu0[inn]*RR[inn]^2-
15*omega^2*SonicSpeedMSqrInn*RR[inn]^2*l2^2*a11[inn]+4*RR[inn]^2*mu0[inn]^2+8*mu0[i
nn]*RR[inn]^2+4*RR[inn]^2=-de1[inn]*l2^2*(15/4)^2,-75*a11[inn]*RR[inn]^2-
300*a11[inn]*a0[inn]^2*RR[inn]^2+300*a11[inn]*a0[inn]^2*mu0[inn]*RR[inn]^2-
15*a11[inn]*l2^2-
15*a11[inn]*a0[inn]^2*l2^2+75*a11[inn]*mu0[inn]*RR[inn]^2+15*omega^2*SonicSpeedMSqrIn
n*RR[inn]^2*l2^2*a11[inn]-4*RR[inn]^2*mu0[inn]^2-8*mu0[inn]*RR[inn]^2-
4*RR[inn]^2=de1[inn]*l2^2*(15/4)^2],simplify(solve(A[22],c20innSin)));
> c20innSin:=simplify(applyrule([a13[inn]*a12[inn]=de2[inn]+a23[inn]*a11[inn]],applyrule([-

```

```

256/15*a0[inn]^2*RR[inn]^2/(de1[inn]*l2^2)-
32/35*a0[inn]^2/de1[inn]+128/15*a0[inn]^2*mu0[inn]*RR[inn]^2/(de1[inn]*l2^2)=(a23[inn]+32/
35)/de1[inn],(32/35*a0[inn]^2/de1[inn]+256/15*a0[inn]^2*RR[inn]^2/(de1[inn]*l2^2)-
128/15*a0[inn]^2*mu0[inn]*RR[inn]^2/(de1[inn]*l2^2))=(-a23[inn]-
32/35)/de1[inn],1024/1575*RR[inn]^2*mu0[inn]/(de1[inn]*l2^2)+1024/1575*RR[inn]^2*mu0[inn
]^2/(de1[inn]*l2^2)=a13[inn]*a12[inn]/de1[inn],-1024/1575*RR[inn]^2*mu0[inn]/(de1[inn]*l2^2)-
1024/1575*RR[inn]^2*mu0[inn]^2/(de1[inn]*l2^2)=
a13[inn]*a12[inn]/de1[inn]],collect(applyrule([4/3*Ez*sin(phiz0)*omega^2*SonicSpeedMSqrInn*
RR[inn]^2=Aa2[inn]],expand(c20innSin)),[c30innSin,a11[inn]]));
>
>
> s20innSin:=applyrule([75*a11[inn]*RR[inn]^2+300*a11[inn]*a0[inn]^2*RR[inn]^2-
300*a11[inn]*a0[inn]^2*mu0[inn]*RR[inn]^2+15*a11[inn]*l2^2+15*a11[inn]*a0[inn]^2*l2^2-
75*a11[inn]*mu0[inn]*RR[inn]^2-
15*omega^2*SonicSpeedMSqrInn*RR[inn]^2*l2^2*a11[inn]+4*RR[inn]^2*mu0[inn]^2+8*mu0[i
nn]*RR[inn]^2+4*RR[inn]^2=-de1[inn]*l2^2*(15/4)^2,-75*a11[inn]*RR[inn]^2-
300*a11[inn]*a0[inn]^2*RR[inn]^2+300*a11[inn]*a0[inn]^2*mu0[inn]*RR[inn]^2-
15*a11[inn]*l2^2-
15*a11[inn]*a0[inn]^2*l2^2+75*a11[inn]*mu0[inn]*RR[inn]^2+15*omega^2*SonicSpeedMSqrIn
n*RR[inn]^2*l2^2*a11[inn]-4*RR[inn]^2*mu0[inn]^2-8*mu0[inn]*RR[inn]^2-
4*RR[inn]^2=de1[inn]*l2^2*(15/4)^2],simplify(solve(A[23],s20innSin)));
> s20innSin:=simplify(applyrule([a13[inn]*a12[inn]=de2[inn]+a23[inn]*a11[inn]],applyrule([-
256/15*a0[inn]^2*RR[inn]^2/(de1[inn]*l2^2)-
32/35*a0[inn]^2/de1[inn]+128/15*a0[inn]^2*mu0[inn]*RR[inn]^2/(de1[inn]*l2^2)=(a23[inn]+32/
35)/de1[inn],(32/35*a0[inn]^2/de1[inn]+256/15*a0[inn]^2*RR[inn]^2/(de1[inn]*l2^2)-
128/15*a0[inn]^2*mu0[inn]*RR[inn]^2/(de1[inn]*l2^2))=(-a23[inn]-
32/35)/de1[inn],1024/1575*RR[inn]^2*mu0[inn]/(de1[inn]*l2^2)+1024/1575*RR[inn]^2*mu0[inn
]^2/(de1[inn]*l2^2)=a13[inn]*a12[inn]/de1[inn],-1024/1575*RR[inn]^2*mu0[inn]/(de1[inn]*l2^2)-
1024/1575*RR[inn]^2*mu0[inn]^2/(de1[inn]*l2^2)=
a13[inn]*a12[inn]/de1[inn]],collect(applyrule([Ex*sin(phix0)*omega^2*SonicSpeedMSqrInn*RR[i
nn]^2=-3/4*Ab2[inn]],expand(s20innSin)),[s30innSin,a11[inn]]));
>
>
>
c10innCos:=applyrule([mu0[inn]*RR[inn]=105/128*a13[inn]*l2,(7+7*mu0[inn])*RR[inn]=15/4*7
*a12[inn]*l2/2,(-7-7*mu0[inn])*RR[inn]=-
15/4*7*a12[inn]*l2/2,(8+8*mu0[inn])*RR[inn]=15/4*8*a12[inn]*l2/2,(-8-8*mu0[inn])*RR[inn]=-
15/4*8*a12[inn]*l2/2],collect(simplify(c10innCos),[Ac2[inn],c30innCos,a11[inn],de1[inn],de2[inn
],RR[inn]]));
>
>
s10innSin:=applyrule([mu0[inn]*RR[inn]=105/128*a13[inn]*l2,(7+7*mu0[inn])*RR[inn]=15/4*7*
a12[inn]*l2/2,(-7-7*mu0[inn])*RR[inn]=-
15/4*7*a12[inn]*l2/2,(8+8*mu0[inn])*RR[inn]=15/4*8*a12[inn]*l2/2,(-8-8*mu0[inn])*RR[inn]=-
15/4*8*a12[inn]*l2/2],collect(simplify(s10innSin),[Ab2[inn],s30innSin,a11[inn],de1[inn],de2[inn],
RR[inn]]));
>
>
c10innSin:=applyrule([mu0[inn]*RR[inn]=105/128*a13[inn]*l2,(7+7*mu0[inn])*RR[inn]=15/4*7
*a12[inn]*l2/2,(-7-7*mu0[inn])*RR[inn]=-
15/4*7*a12[inn]*l2/2,(8+8*mu0[inn])*RR[inn]=15/4*8*a12[inn]*l2/2,(-8-8*mu0[inn])*RR[inn]=-
15/4*8*a12[inn]*l2/2],collect(simplify(c10innSin),[Aa2[inn],c30innSin,a11[inn],de1[inn],de2[inn],
RR[inn]]));

```

```

>
>
s10innCos:=applyrule([mu0[inn]*RR[inn]=105/128*a13[inn]*l2,(7+7*mu0[inn])*RR[inn]=15/4*7
*a12[inn]*l2/2,(-7-7*mu0[inn])*RR[inn]=-
15/4*7*a12[inn]*l2/2,(8+8*mu0[inn])*RR[inn]=15/4*8*a12[inn]*l2/2,(-8-8*mu0[inn])*RR[inn]=-
15/4*8*a12[inn]*l2/2],collect(simplify(s10innCos),[Ad2[inn],s30innCos,a11[inn],de1[inn],de2[inn
],RR[inn]]));
>
s10outrSin:=applyrule([mu0[outr]*RR[outr]=105/128*a13[outr]*l2,(7+7*mu0[outr])*RR[outr]=15/
4*7*a12[outr]*l2/2,(-7-7*mu0[outr])*RR[outr]=-
15/4*7*a12[outr]*l2/2,(8+8*mu0[outr])*RR[outr]=15/4*8*a12[outr]*l2/2,(-8-
8*mu0[outr])*RR[outr]=-
15/4*8*a12[outr]*l2/2],collect(simplify(s10outrSin),[Ab2[outr],s30outrSin,a11[outr],de1[outr],de2[
outr],RR[outr]]));
>
c10outrSin:=applyrule([mu0[outr]*RR[outr]=105/128*a13[outr]*l2,(7+7*mu0[outr])*RR[outr]=15
/4*7*a12[outr]*l2/2,(-7-7*mu0[outr])*RR[outr]=-
15/4*7*a12[outr]*l2/2,(8+8*mu0[outr])*RR[outr]=15/4*8*a12[outr]*l2/2,(-8-
8*mu0[outr])*RR[outr]=-
15/4*8*a12[outr]*l2/2],collect(simplify(c10outrSin),[Aa2[outr],c30outrSin,a11[outr],de1[outr],de2
[outr],RR[outr],a23[outr]]));
>
c10outrCos:=applyrule([mu0[outr]*RR[outr]=105/128*a13[outr]*l2,(7+7*mu0[outr])*RR[outr]=15
/4*7*a12[outr]*l2/2,(-7-7*mu0[outr])*RR[outr]=-
15/4*7*a12[outr]*l2/2,(8+8*mu0[outr])*RR[outr]=15/4*8*a12[outr]*l2/2,(-8-
8*mu0[outr])*RR[outr]=-
15/4*8*a12[outr]*l2/2],collect(simplify(c10outrCos),[Ac2[outr],c30outrCos,a11[outr],de1[outr],de
2[outr],RR[outr]]));
>
s10outrCos:=applyrule([mu0[outr]*RR[outr]=105/128*a13[outr]*l2,(7+7*mu0[outr])*RR[outr]=15
/4*7*a12[outr]*l2/2,(-7-7*mu0[outr])*RR[outr]=-
15/4*7*a12[outr]*l2/2,(8+8*mu0[outr])*RR[outr]=15/4*8*a12[outr]*l2/2,(-8-
8*mu0[outr])*RR[outr]=-
15/4*8*a12[outr]*l2/2],collect(simplify(s10outrCos),[Ad2[outr],s30outrCos,a11[outr],de1[outr],de
2[outr],RR[outr]]));
>
> cf:=ccf:
> ccf[4][3];
> s30outrCos:=simplify(solve(Aa[10],s30outrCos));
> c30outrCos:=expand(simplify(solve(Aa[11],c30outrCos)));
> s30outrSin:=simplify(solve(Aa[12],s30outrSin));
> c30outrSin:=simplify(solve(Aa[13],c30outrSin));
> nops(expand(c30outrSin));
> nops(expand(s30outrSin));
> s30innCos:=simplify(solve(Aa[24],s30innCos));
> c30innCos:=simplify(solve(Aa[25],c30innCos));
> nops(expand(c30innCos));
> nops(expand(s30innCos));
> s30innSin:=simplify(solve(Aa[26],s30innSin));
> c30innSin:=simplify(solve(Aa[27],c30innSin));
> nops(expand(c30innSin));
> nops(expand(s30innSin));

```

```

>
> s30innSin:=simplify(s30innSin);
> s30innCos:=simplify(s30innCos);
> c30innSin:=simplify(c30innSin);
> c30innCos:=simplify(c30innCos);
> s30outrSin:=simplify(s30outrSin);
> s30outrCos:=simplify(s30outrCos);
> c30outrSin:=simplify(c30outrSin);
> c30outrCos:=simplify(c30outrCos);
> p[0]:=0:
>
> Aa2[inn] := ccc1[inn]*omega^2*Ez*sin(phiz0):
Ab2[inn] := -ccc1[inn]*omega^2*Ex*sin(phix0):
Ac2[inn] := ccc1[inn]*omega^2*Ez*cos(phiz0):
Ad2[inn] := -ccc1[inn]*omega^2*Ex*cos(phix0):
Aa3[inn] := -ccc2[inn]*omega^2*Ez*sin(phiz0):
Ab3[inn] := -ccc2[inn]*omega^2*Ex*sin(phix0):
Ac3[inn] := -ccc2[inn]*omega^2*Ez*cos(phiz0):
Ad3[inn] := -ccc2[inn]*omega^2*Ex*cos(phix0):
> Aa2[outr] := ccc1[outr]*omega^2*Ez*sin(phiz0):
Ab2[outr] := -ccc1[outr]*omega^2*Ex*sin(phix0):
Ac2[outr] := ccc1[outr]*omega^2*Ez*cos(phiz0):
Ad2[outr] := -ccc1[outr]*omega^2*Ex*cos(phix0):
Aa3[outr] := ccc2[outr]*omega^2*Ez*sin(phiz0):
Ab3[outr] := ccc2[outr]*omega^2*Ex*sin(phix0):
Ac3[outr] := ccc2[outr]*omega^2*Ez*cos(phiz0):
Ad3[outr] := ccc2[outr]*omega^2*Ex*cos(phix0):
>
> nops(collect(expand(applyrule([phiz0-tau=-Minus,-phiz0+tau=Minus,phiz0+tau=Plus,-phiz0-
tau=-Plus],eval(subs(Ex=0,combine(simplify(u1[outr30]),trig))))),
[sin(Plus),cos(Plus),sin(Minus),cos(Minus)],distributed));
> nops(collect(expand(applyrule([phix0-tau=-Minus,-phix0+tau=Minus,phix0+tau=Plus,-phix0-
tau=-Plus],eval(subs(Ez=0,combine(simplify(u1[outr30]),trig))))),
[sin(Plus),cos(Plus),sin(Minus),cos(Minus)],distributed));
> nops(collect(expand(applyrule([phiz0-tau=-Minus,-phiz0+tau=Minus,phiz0+tau=Plus,-phiz0-
tau=-Plus],eval(subs(Ex=0,combine(simplify(u1[inn30]),trig))))),
[sin(Plus),cos(Plus),sin(Minus),cos(Minus)],distributed));
> nops(collect(expand(applyrule([phix0-tau=-Minus,-phix0+tau=Minus,phix0+tau=Plus,-phix0-
tau=-Plus],eval(subs(Ez=0,combine(simplify(u1[inn30]),trig))))),
[sin(Plus),cos(Plus),sin(Minus),cos(Minus)],distributed));
> u1[outr30]:=collect(simplify(expand(applyrule([phix0-tau=-Minusx,-
phix0+tau=Minusx,phix0+tau=Plusx,-phix0-tau=-Plusx,phiz0-tau=-Minusz,-
phiz0+tau=Minusz,phiz0+tau=Plusz,-phiz0-tau=-
Plusz],combine(simplify(u1[outr30]),trig)))),[sin(Plusx),cos(Plusx),sin(Minusx),cos(Minusx),sin(Plu
sz),cos(Plusz),sin(Minusz),cos(Minusz),sin(ThetaPhi),cos(ThetaPhi),Ex,Ez],distributed);
> u1[inn30]:=collect(simplify(expand(applyrule([phix0-tau=-Minusx,-
phix0+tau=Minusx,phix0+tau=Plusx,-phix0-tau=-Plusx,phiz0-tau=-Minusz,-
phiz0+tau=Minusz,phiz0+tau=Plusz,-phiz0-tau=-
Plusz],combine(simplify(u1[inn30]),trig)))),[sin(Plusx),cos(Plusx),sin(Minusx),cos(Minusx),sin(Plu
sz),cos(Plusz),sin(Minusz),cos(Minusz),sin(ThetaPhi),cos(ThetaPhi),Ex,Ez],distributed);
>
>

```

```

aaa1:=collect(factor(expand(eval(subs(Ez=0,combine(simplify(u1[inn30]),trig))))/(coeffzeta*omeg
a^2*Ex*sin(ThetaPhi)),[sin(Plusx),cos(Plusx)],distributed):
>
aaa3:=collect(factor(expand(eval(subs(Ez=0,combine(simplify(u1[outr30]),trig))))/(coeffzeta*ome
ga^2*Ex*sin(ThetaPhi)),[sin(Plusx),cos(Plusx)],distributed):
> FCH1[outr]:=simplify(factor(coeff(aaa3,cos(Plusx)))/factor(coeff(aaa3,sin(Plusx))));
> FCH1[inn]:=simplify(factor(coeff(aaa1,cos(Plusx)))/factor(coeff(aaa1,sin(Plusx))));
> ACH1[outr]:=simplify((coeff(aaa3,sin(Plusx)))^2+(coeff(aaa3,cos(Plusx)))^2);
> ACH1[inn]:=simplify((coeff(aaa1,sin(Plusx)))^2+(coeff(aaa1,cos(Plusx)))^2);
>

```

Приложение В Расчетный модуль

```

> restart:
> Digits := 40:
>
>
> Work:=proc()
local InputFile,OutputFile,DataPMA,g,RR1,l2,rho0,rho,Pendulum,
    E,h0,delta,mu0,nu,l,NumberVariant,TypeElastic,TypeVibration,
    TypeCurrent,TypeMotion,step,NumberSteps,RR,nx1,nz1,deltam,
    kpx,kpz,aomega,RezDat,ml,HighBound,LowBound,RevoltingMoment,
    kpp,kpr,lambdExp,i,nnn,deltam1,m:

currentdir('D:\\small\\Juli\\Аспирантура\\ОбаУпр\\'):
InputFile:=open('InputData_TEST.dat',READ):
OutputFile:=open('OutputDataDis.dat',WRITE):
DataPMA:=readdata(InputFile,float,5):
nnn:=nops(DataPMA)/6:
for i32 from 1 to nnn do
NumberVariant:=DataPMA[1+(i32-1)*6][1]:
TypeCurrent :=DataPMA[1+(i32-1)*6][2]:
RR[2]      :=DataPMA[2+(i32-1)*6][1]:
l2         :=DataPMA[2+(i32-1)*6][2]:
delta      :=DataPMA[2+(i32-1)*6][3]:
rho        :=DataPMA[2+(i32-1)*6][4]:
nu         :=DataPMA[3+(i32-1)*6][1]:
h0[outr]   :=DataPMA[4+(i32-1)*6][1]:
E[outr]    :=DataPMA[4+(i32-1)*6][2]:
mu0[outr]  :=DataPMA[4+(i32-1)*6][3]:
rho0[outr] :=DataPMA[4+(i32-1)*6][4]:
h0[inn]    :=DataPMA[5+(i32-1)*6][1]:
E[inn]     :=DataPMA[5+(i32-1)*6][2]:
mu0[inn]   :=DataPMA[5+(i32-1)*6][3]:
rho0[inn]  :=DataPMA[5+(i32-1)*6][4]:
LowBound   :=DataPMA[6+(i32-1)*6][1]:
HighBound  :=DataPMA[6+(i32-1)*6][2]:
NumberSteps:=DataPMA[6+(i32-1)*6][3]:
step:=(HighBound-LowBound)/NumberSteps:
g:=9.81:

RevoltingMoment:=proc(omega,aTypeCurrent)

```

```

local a11,a12,a13,a22,a23,c1,c2,d,f,Ex,Ez,R,psi,sigma,lambda,
v1,v12,w2,v2,w1,w12,we,ve,Reynolds,epsilon,Q1,Q2,A01,A02,B01,B02,Kos1,
Kos11,w,v,de1,de2,de3,de7,de8,det1,det2,det3,det7,det8,Mz1,Mx1,Moz1,Mox1,
FF,E1,E2,Mz2,Mx2,Moz2,Mox2,U1,U2,U11,U22,U111,U222,M0,K0,Kos22,const1,
const2,const3,const5,Ya,Yoa,Ms1,Ms2,Mos1,Mos2,GG,a0,b33,d33,B0,Boo,M,K,
c11,c12,c13,c33,c22,c23,a33,m2,wMinus1,Moment11,vdelta,wdelta,
epsilondelta,Phi,SonicSpeedMSqr,phi,x1,z1,r,p,OneMinusTh,Yobb,Phipr,
EEx,EEz,xxx1,EEx,qqq1:

```

```

sigma:=l2/(2*RR[2]):
psi:=delta/RR[2]:
Reynolds:=delta^2*omega/nu:
epsilon:=sqrt(Reynolds/2):

```

```

a0[outr]:=sqrt(h0[outr]^2/(12*RR[outr]^2));
a0[inn]:=sqrt(h0[inn]^2/(12*RR[inn]^2));
RR1:=RR[2]+delta;
RR[outr]:=RR1+h0[outr]/2;
RR[inn]:=RR[2]-h0[inn]/2;

```

```

SonicSpeedMSqrOutr:=(rho0[outr]*(1-mu0[outr]^2))/E[outr];
SonicSpeedMSqrInn:=(rho0[inn]*(1-mu0[inn]^2))/E[inn];

```

```

c1:=-sinh(epsilon)/(cos(epsilon)+cosh(epsilon)):
c2:= sin(epsilon)/(cos(epsilon)+cosh(epsilon)):
d:=simplify(expand(1+(c1-c2)/epsilon)):
f:=simplify(expand(1/epsilon*(c1+c2))):
v2:=epsilon*(cos(epsilon)*sin(epsilon)+cosh(epsilon)*sinh(epsilon))/((sin(epsilon))^2+(sinh(epsilon))^2):
w2:=1/epsilon*(cosh(epsilon)*sinh(epsilon)-cos(epsilon)*sin(epsilon))/((sin(epsilon))^2+(sinh(epsilon))^2):
v1:=epsilon*(cosh(epsilon)*sin(epsilon)+cos(epsilon)*sinh(epsilon))/((sin(epsilon))^2+(sinh(epsilon))^2):
w1:=1/epsilon*(cosh(epsilon)*sin(epsilon)-cos(epsilon)*sinh(epsilon))/((sin(epsilon))^2+(sinh(epsilon))^2):
v12:=v1-v2:
w12:=w1+w2:
wMinus1:=w-1:
ve:=v1*v+1/6*epsilon^4*w1*(w-1):
we:=3*w1*v-1/2*v1*(w-1):
w:=www:
v:=vvv:

```

```

m:=evalf(Pi*rho*RR[2]^2*l2):
m2:=m+deltam:

```

```

M0:=m*RR[2]/delta*(1-tanh(sigma)/sigma*Phi):
K0:=12*nu*m*RR[2]/delta^3*(1-tanh(sigma)/sigma*Phi):
vdelta:=v:

```

$w_{\Delta} = w$;
 $K = K_0 \cdot w_{\Delta}$;
 $M = M_0 \cdot w_{\Delta}$;
 $\text{OneMinusTh} = 1 - (1 - \Phi) \cdot \tanh(\sigma) / \sigma$;

$\text{ccc1}[\text{inn}] = 4/3 \cdot \text{RR}[\text{inn}]^2 \cdot \text{SonicSpeedMSqrInn}$;
 $\text{ccc2}[\text{inn}] = (16/15 \cdot \text{RR}[\text{inn}]^2 \cdot \text{SonicSpeedMSqrInn} \cdot (\rho \cdot \text{RR}[2] / (\rho_0[\text{inn}] \cdot h_0[\text{inn}]) - 1))$;

$\text{a11}[\text{inn}] = -8/5 \cdot (2 \cdot \text{RR}[\text{inn}] / l_2)^2 - 8/105 \cdot (1 - \mu_0[\text{inn}])$
 $\quad + 16/105 \cdot \text{RR}[\text{inn}]^2 \cdot \omega^2 \cdot \text{SonicSpeedMSqrInn}$;
 $\text{a12}[\text{inn}] = 4/15 \cdot 2 \cdot \text{RR}[\text{inn}] / l_2 \cdot (1 + \mu_0[\text{inn}])$;
 $\text{a13}[\text{inn}] = 64/105 \cdot 2 \cdot \text{RR}[\text{inn}] / l_2 \cdot \mu_0[\text{inn}]$;
 $\text{a22}[\text{inn}] = -4/3 \cdot (2 \cdot \text{RR}[\text{inn}] / l_2)^2 \cdot (1 + 4 \cdot (a_0[\text{inn}])^2) \cdot (1 - \mu_0[\text{inn}]) -$
 $16/15 \cdot (1 + (a_0[\text{inn}])^2) + 16/15 \cdot \text{RR}[\text{inn}]^2 \cdot \omega^2 \cdot \text{SonicSpeedMSqrInn}$;
 $\text{a23}[\text{inn}] = -32/15 \cdot (2 \cdot \text{RR}[\text{inn}] / l_2)^2 \cdot (a_0[\text{inn}])^2 \cdot (2 - \mu_0[\text{inn}]) - 32/35 \cdot (1 + (a_0[\text{inn}])^2)$;
 $\text{a33}[\text{inn}] = 256/315 \cdot (1 + (a_0[\text{inn}])^2) + 128/5 \cdot (2 \cdot \text{RR}[\text{inn}] / l_2)^4 \cdot (a_0[\text{inn}])^2 + 512/105 \cdot (2 \cdot \text{RR}[\text{inn}] / l_2)$
 $\quad \cdot (a_0[\text{inn}])^2 + 2 \cdot \epsilon^2 \cdot w \cdot B_0 \text{New}[\text{inn}] -$
 $256/315 \cdot (\text{RR}[\text{inn}])^2 \cdot \omega^2 \cdot \text{SonicSpeedMSqrInn}$;
 $\text{b33}[\text{inn}] = -12 \cdot v \cdot B_0 \text{New}[\text{inn}]$;

$\text{de1}[\text{inn}] = \text{a11}[\text{inn}] \cdot \text{a22}[\text{inn}] - (\text{a12}[\text{inn}])^2$;
 $\text{de2}[\text{inn}] = \text{a12}[\text{inn}] \cdot \text{a13}[\text{inn}] - \text{a11}[\text{inn}] \cdot \text{a23}[\text{inn}]$;
 $\text{de3}[\text{inn}] = \text{a13}[\text{inn}] \cdot \text{a22}[\text{inn}] - \text{a12}[\text{inn}] \cdot \text{a23}[\text{inn}]$;
 $\text{de7}[\text{inn}] = \text{a33}[\text{inn}] \cdot \text{de1}[\text{inn}] - \text{a23}[\text{inn}] \cdot \text{de2}[\text{inn}] + \text{a13}[\text{inn}] \cdot \text{de3}[\text{inn}]$;
 $\text{de8}[\text{inn}] = (\text{de7}[\text{inn}])^2 + (\text{b33}[\text{inn}])^2 \cdot (\text{de1}[\text{inn}])^2$;

$\text{ccc1}[\text{outr}] = 4/3 \cdot \text{RR}[\text{outr}]^2 \cdot \text{SonicSpeedMSqrOutr}$;
 $\text{ccc2}[\text{outr}] = (16/15 \cdot \text{RR}[\text{outr}]^2 \cdot \text{SonicSpeedMSqrOutr} \cdot (\rho \cdot \text{RR}[2] / (\rho_0[\text{outr}] \cdot h_0[\text{outr}]) + 1))$;

$\text{a11}[\text{outr}] = -8/5 \cdot (2 \cdot \text{RR}[\text{outr}] / l_2)^2 - 8/105 \cdot (1 - \mu_0[\text{outr}])$
 $\quad + 16/105 \cdot \text{RR}[\text{outr}]^2 \cdot \omega^2 \cdot \text{SonicSpeedMSqrOutr}$;
 $\text{a12}[\text{outr}] = 4/15 \cdot 2 \cdot \text{RR}[\text{outr}] / l_2 \cdot (1 + \mu_0[\text{outr}])$;
 $\text{a13}[\text{outr}] = 64/105 \cdot 2 \cdot \text{RR}[\text{outr}] / l_2 \cdot \mu_0[\text{outr}]$;
 $\text{a22}[\text{outr}] = -4/3 \cdot (2 \cdot \text{RR}[\text{outr}] / l_2)^2 \cdot (1 + 4 \cdot (a_0[\text{outr}])^2) \cdot (1 - \mu_0[\text{outr}]) -$
 $16/15 \cdot (1 + (a_0[\text{outr}])^2) + 16/15 \cdot \text{RR}[\text{outr}]^2 \cdot \omega^2 \cdot \text{SonicSpeedMSqrOutr}$;
 $\text{a23}[\text{outr}] = -32/15 \cdot (2 \cdot \text{RR}[\text{outr}] / l_2)^2 \cdot (a_0[\text{outr}])^2 \cdot (2 - \mu_0[\text{outr}]) - 32/35 \cdot (1 + (a_0[\text{outr}])^2)$;
 $\text{a33}[\text{outr}] = 256/315 \cdot (1 + (a_0[\text{outr}])^2) + 128/5 \cdot (2 \cdot \text{RR}[\text{outr}] / l_2)^4 \cdot (a_0[\text{outr}])^2 + 512/105 \cdot (2 \cdot \text{RR}[\text{outr}] / l_2)$
 $\quad \cdot (a_0[\text{outr}])^2 + 2 \cdot \epsilon^2 \cdot w \cdot B_0 \text{New}[\text{outr}] -$
 $256/315 \cdot (\text{RR}[\text{outr}])^2 \cdot \omega^2 \cdot \text{SonicSpeedMSqrOutr}$;
 $\text{b33}[\text{outr}] = -12 \cdot v \cdot B_0 \text{New}[\text{outr}]$;

$\text{de1}[\text{outr}] = \text{a11}[\text{outr}] \cdot \text{a22}[\text{outr}] - (\text{a12}[\text{outr}])^2$;
 $\text{de2}[\text{outr}] = \text{a12}[\text{outr}] \cdot \text{a13}[\text{outr}] - \text{a11}[\text{outr}] \cdot \text{a23}[\text{outr}]$;
 $\text{de3}[\text{outr}] = \text{a13}[\text{outr}] \cdot \text{a22}[\text{outr}] - \text{a12}[\text{outr}] \cdot \text{a23}[\text{outr}]$;
 $\text{de7}[\text{outr}] = \text{a33}[\text{outr}] \cdot \text{de1}[\text{outr}] - \text{a23}[\text{outr}] \cdot \text{de2}[\text{outr}] + \text{a13}[\text{outr}] \cdot \text{de3}[\text{outr}]$;
 $\text{de8}[\text{outr}] = (\text{de7}[\text{outr}])^2 + (\text{b33}[\text{outr}])^2 \cdot (\text{de1}[\text{outr}])^2$;

```

if aTypeCurrent=1
  then
B0New[outr]:=-
(rho*RR[2]*(63*sigma^5*cosh(sigma)^2+63*sigma^5*cosh(sigma)*sinh(sigma)+2835*sigma*cos
h(sigma)^2-1890*sigma^2*cosh(sigma)^2-315*sigma^4*cosh(sigma)^2-
315*sigma^4*cosh(sigma)*sinh(sigma)-
2835*cosh(sigma)^2+2835+945*sigma^3*cosh(sigma)*sinh(sigma)+315*sigma^4+2*sigma^9*cos
h(sigma)*sinh(sigma)-1890*sigma^2*cosh(sigma)*sinh(sigma)-
6*sigma^7*cosh(sigma)*sinh(sigma)-
2835*cosh(sigma)*sinh(sigma)+2*sigma^9*cosh(sigma)^2+1890*sigma^2+2835*sigma*cosh(sig
ma)*sinh(sigma)-
6*sigma^7*cosh(sigma)^2+945*sigma^3*cosh(sigma)^2))/(315/128*psi*Renolds*(rho0[outr]*h0[
outr])/((RR[outr]*omega)^2*SonicSpeedMSqrOutr))*sigma^9*cosh(sigma)*(cosh(sigma)+sinh(sig
ma))):

B0New[inn]:=-
(rho*RR[2]*(63*sigma^5*cosh(sigma)^2+63*sigma^5*cosh(sigma)*sinh(sigma)+2835*sigma*cos
h(sigma)^2-1890*sigma^2*cosh(sigma)^2-315*sigma^4*cosh(sigma)^2-
315*sigma^4*cosh(sigma)*sinh(sigma)-
2835*cosh(sigma)^2+2835+945*sigma^3*cosh(sigma)*sinh(sigma)+315*sigma^4+2*sigma^9*cos
h(sigma)*sinh(sigma)-1890*sigma^2*cosh(sigma)*sinh(sigma)-
6*sigma^7*cosh(sigma)*sinh(sigma)-
2835*cosh(sigma)*sinh(sigma)+2*sigma^9*cosh(sigma)^2+1890*sigma^2+2835*sigma*cosh(sig
ma)*sinh(sigma)-
6*sigma^7*cosh(sigma)^2+945*sigma^3*cosh(sigma)^2))/(315/128*psi*Renolds*(rho0[inn]*h0[i
nn])/((RR[inn]*omega)^2*SonicSpeedMSqrInn))*sigma^9*cosh(sigma)*(cosh(sigma)+sinh(sigma))
):

else
  if aTypeCurrent=2
    then
B0New[outr]:=-128/315*rho*RR[2]*(-6*sigma^6*cosh(sigma)^2-
63*sigma^4+2*sigma^8*sinh(sigma)*cosh(sigma)+2835*cosh(sigma)^2*sigma+63*sigma^4*cosh
(sigma)^2-2835*sinh(sigma)*cosh(sigma)+63*sigma^4*sinh(sigma)*cosh(sigma)-
945*cosh(sigma)^2*sigma^2-
945*sigma^2*sinh(sigma)*cosh(sigma)+6*sigma^6+2835+2*sigma^8*cosh(sigma)^2-
2835*cosh(sigma)^2+2835*cosh(sigma)*sigma*sinh(sigma)-2*sigma^8-
6*sigma^6*sinh(sigma)*cosh(sigma)+945*sigma^2)/(psi*Renolds*(rho0[outr]*h0[outr])/((RR[outr]
*omega)^2*SonicSpeedMSqrOutr))*(sigma^8*sinh(sigma)*(cosh(sigma)+sinh(sigma))):

B0New[inn]:=-128/315*rho*RR[2]*(-6*sigma^6*cosh(sigma)^2-
63*sigma^4+2*sigma^8*sinh(sigma)*cosh(sigma)+2835*cosh(sigma)^2*sigma+63*sigma^4*cosh
(sigma)^2-2835*sinh(sigma)*cosh(sigma)+63*sigma^4*sinh(sigma)*cosh(sigma)-
945*cosh(sigma)^2*sigma^2-
945*sigma^2*sinh(sigma)*cosh(sigma)+6*sigma^6+2835+2*sigma^8*cosh(sigma)^2-
2835*cosh(sigma)^2+2835*cosh(sigma)*sigma*sinh(sigma)-2*sigma^8-
6*sigma^6*sinh(sigma)*cosh(sigma)+945*sigma^2)/(psi*Renolds*(rho0[inn]*h0[inn])/((RR[inn]*o
mega)^2*SonicSpeedMSqrInn))*(sigma^8*sinh(sigma)*(cosh(sigma)+sinh(sigma))):

fi:
fi:

```

cof[inn]:=a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]+de1[inn]*a13[inn]^2+a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]-
a11[inn]*a23[inn]*de2[inn]:

cof[outr]:=-
de2[outr]*a23[outr]*a11[outr]+a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]+a13[outr]^2*de1[outr]+de2[outr]*a1
2[outr]*a13[outr]:

cof1[outr]:=-ccc1[outr]*a12[outr]*a13[outr]+ccc2[outr]*de1[outr]+ccc1[outr]*a11[outr]*a23[outr]:

cof1[inn]:=a11[inn]*ccc1[inn]*a23[inn]-ccc1[inn]*a12[inn]*a13[inn]-ccc2[inn]*de1[inn]:

ACH1[inn] :=

a11[inn]^2*(ccc2[inn]^2*de1[inn]^2*de1[outr]^2*a13[outr]^4+ccc2[inn]^2*de2[outr]^2*a23[outr]
^2*a11[outr]^2*de1[inn]^2+ccc2[inn]^2*de1[inn]^2*a11[outr]^2*b33[outr]^2*de1[outr]^2+ccc1[i
nn]^2*a11[inn]^2*de1[outr]^2*a23[inn]^2*a13[outr]^4+ccc2[inn]^2*de1[inn]^2*a33[outr]^2*de1[
outr]^2*a11[outr]^2+ccc1[inn]^2*de1[outr]^2*a12[inn]^2*a13[inn]^2*a13[outr]^4+ccc2[outr]^2*a
11[outr]^2*de1[outr]^2*de1[inn]^2*b33[inn]^2+ccc1[outr]^2*b33[inn]^2*a11[outr]^4*a23[outr]^2
*de1[inn]^2+ccc1[inn]^2*a11[inn]^2*a11[outr]^2*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a23[inn]^2+ccc1[inn]
^2*a11[inn]^2*a23[inn]^2*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+ccc1[inn]^2*a11[outr]^2*b33[ou
tr]^2*de1[outr]^2*a12[inn]^2*a13[inn]^2+ccc1[inn]^2*de2[outr]^2*a12[inn]^2*a13[inn]^2*a23[o
utr]^2*a11[outr]^2+ccc1[inn]^2*de2[outr]^2*a12[outr]^2*a12[inn]^2*a13[inn]^2*a13[outr]^2+ccc
1[inn]^2*de2[outr]^2*a12[outr]^2*a23[inn]^2*a13[outr]^2*a11[inn]^2+ccc1[inn]^2*de2[outr]^2*a
23[inn]^2*a23[outr]^2*a11[outr]^2*a11[inn]^2+ccc1[outr]^2*b33[inn]^2*a11[outr]^2*a13[outr]^2
*de1[inn]^2*a12[outr]^2-
2*ccc2[inn]^2*de2[outr]*de1[inn]^2*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]^2*a23[outr]-
2*ccc2[inn]^2*de2[outr]*de1[inn]^2*a23[outr]*a11[outr]*de1[outr]*a13[outr]^2-
2*ccc1[inn]^2*a11[inn]*a23[inn]*de1[outr]^2*a12[inn]*a13[inn]*a13[outr]^4+2*ccc1[inn]^2*a11
[inn]^2*a23[inn]^2*a33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]*a13[outr]^2+2*ccc1[inn]^2*a33[outr]*de1[o
utr]^2*a11[outr]*a12[inn]^2*a13[inn]^2*a13[outr]^2+2*ccc1[inn]^2*de2[outr]*a12[outr]*a11[inn
]^2*a23[inn]^2*de1[outr]*a13[outr]^3-
2*ccc1[inn]*ccc2[inn]*de1[inn]*a11[inn]*de1[outr]^2*a23[inn]*a13[outr]^4+2*ccc1[inn]^2*de2[
outr]*a12[outr]*a12[inn]^2*a13[inn]^2*de1[outr]*a13[outr]^3+2*ccc1[inn]*ccc2[inn]*de1[inn]*d
e1[outr]^2*a12[inn]*a13[inn]*a13[outr]^4+2*ccc2[outr]*ccc1[outr]*b33[inn]^2*a11[outr]^3*de1[
outr]*a23[outr]*de1[inn]^2+4*ccc1[outr]^2*a23[outr]^2*a11[outr]^4*w^2*epsilon^4*B0New[inn]
^2*de1[inn]^2-
2*ccc1[outr]^2*b33[inn]^2*a11[outr]^3*a23[outr]*a13[outr]*de1[inn]^2*a12[outr]-
2*ccc2[inn]*ccc2[outr]*a11[outr]^2*b33[outr]*de1[outr]^2*de1[inn]^2*b33[inn]^4+ccc2[outr]^2*
w^2*epsilon^4*B0New[inn]^2*a11[outr]^2*de1[outr]^2*de1[inn]^2-
2*ccc1[inn]^2*a11[inn]*a12[inn]*a13[inn]*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2*a23[inn]-
2*ccc1[inn]^2*a11[inn]*a11[outr]^2*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a12[inn]*a13[inn]*a23[inn]+2*ccc
2[inn]^2*de2[outr]*a12[outr]*de1[inn]^2*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]*a13[outr]-
2*ccc1[inn]*ccc2[inn]*de2[outr]^2*de1[inn]*a23[inn]*a23[outr]^2*a11[outr]^2*a11[inn]+2*ccc1[
inn]*ccc2[inn]*de2[outr]^2*a12[outr]^2*de1[inn]*a13[inn]*a12[inn]*a13[outr]^2-
2*ccc1[inn]*ccc2[inn]*de2[outr]^2*a12[outr]^2*de1[inn]*a23[inn]*a13[outr]^2*a11[inn]-
2*ccc1[inn]^2*de2[outr]^2*a12[outr]^2*a23[inn]*a12[inn]*a13[inn]*a13[outr]^2*a11[inn]-
2*ccc1[inn]^2*de2[outr]*a11[inn]^2*a23[inn]^2*de1[outr]*a23[outr]*a11[outr]*a13[outr]^2-
2*ccc1[inn]^2*de2[outr]*a11[inn]^2*a23[inn]^2*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]^2*a23[outr]-
2*ccc1[inn]^2*de2[outr]*de1[outr]*a12[inn]^2*a13[inn]^2*a23[outr]*a11[outr]*a13[outr]^2-

$$\begin{aligned}
& 2*ccc1[inn]^2*de2[outr]*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]^2*a12[inn]^2*a13[inn]^2*a23[outr]- \\
& 2*ccc1[inn]^2*de2[outr]^2*a12[outr]*a23[inn]^2*a23[outr]*a11[outr]*a13[outr]*a11[inn]^2- \\
& 2*ccc1[inn]^2*de2[outr]^2*a12[outr]*a12[inn]^2*a13[inn]^2*a23[outr]*a11[outr]*a13[outr]- \\
& 2*ccc1[inn]^2*de2[outr]^2*a23[inn]*a23[outr]^2*a11[outr]^2*a12[inn]*a13[inn]*a11[inn]+2*ccc \\
& 1[inn]*ccc2[inn]*de1[inn]*a11[outr]^2*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a12[inn]*a13[inn]- \\
& 2*ccc1[inn]*ccc2[inn]*de1[inn]*a11[inn]*a11[outr]^2*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a23[inn]- \\
& 2*ccc1[inn]*ccc2[inn]*de1[inn]*a11[inn]*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2*a23[inn]+2*ccc1[\\
& inn]*ccc2[inn]*de2[outr]^2*de1[inn]*a23[outr]^2*a11[outr]^2*a12[inn]*a13[inn]- \\
& 2*ccc2[inn]*ccc1[outr]*b33[inn]*a11[outr]^3*b33[outr]*de1[outr]*a23[outr]*de1[inn]^2+4*ccc1[\\
& outr]^2*w^2*epsilon^4*B0New[inn]^2*a11[outr]^2*a13[outr]^2*de1[inn]^2*a12[outr]^2+2*ccc1[\\
& inn]*ccc2[inn]*de1[inn]*a12[inn]*a13[inn]*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2- \\
& 2*ccc2[outr]*ccc1[outr]*b33[inn]^2*a11[outr]^2*de1[outr]*a13[outr]*de1[inn]^2*a12[outr]- \\
& 8*ccc1[outr]^2*a23[outr]*a11[outr]^3*w^2*epsilon^4*B0New[inn]^2*a13[outr]*de1[inn]^2*a12[\\
& outr]- \\
& 4*ccc2[inn]*ccc2[outr]*de1[inn]^2*w*epsilon^2*B0New[inn]*a11[outr]^2*de1[outr]^2*a33[outr] \\
& - \\
& 4*ccc2[inn]*ccc2[outr]*de1[inn]^2*de1[outr]^2*w*epsilon^2*B0New[inn]*a11[outr]*a13[outr]^2 \\
& +4*ccc1[inn]*ccc2[inn]*de1[inn]*de1[outr]^2*a33[outr]*a11[outr]*a12[inn]*a13[inn]*a13[outr]^2 \\
& - \\
& 4*ccc1[inn]*ccc2[inn]*de1[inn]*a11[inn]*a23[inn]*a33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]*a13[outr]^2- \\
& 4*ccc1[inn]*ccc2[inn]*de2[outr]*a12[outr]*de1[inn]*a11[inn]*a23[inn]*de1[outr]*a13[outr]^3+2* \\
& ccc1[inn]^2*de2[outr]*a12[outr]*a11[inn]^2*a23[inn]^2*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]*a13[outr]- \\
& 4*ccc1[inn]^2*de2[outr]*a12[outr]*a11[inn]*a23[inn]*de1[outr]*a12[inn]*a13[inn]*a13[outr]^3+ \\
& 2*ccc1[inn]^2*de2[outr]*a12[outr]*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]*a12[inn]^2*a13[inn]^2*a13[outr] \\
& r]+8*ccc2[outr]*ccc1[outr]*a23[outr]*a11[outr]^3*w^2*epsilon^4*B0New[inn]^2*de1[outr]*de1[i \\
& nn]^2- \\
& 2*ccc2[outr]*ccc1[inn]*b33[inn]*de1[inn]*a11[outr]^2*b33[outr]*de1[outr]^2*a12[inn]*a13[inn] \\
& +2*ccc2[outr]*ccc1[inn]*b33[inn]*de1[inn]*a11[outr]^2*b33[outr]*de1[outr]^2*a23[inn]*a11[inn] \\
&]+2*ccc2[inn]*ccc1[outr]*b33[inn]*a11[outr]^2*b33[outr]*de1[outr]*a13[outr]*de1[inn]^2*a12[o \\
& utr]+4*ccc2[inn]*ccc1[outr]*de2[outr]*a23[outr]^2*a11[outr]^3*w*epsilon^2*B0New[inn]*de1[i \\
& nn]^2+4*ccc1[inn]*ccc2[inn]*de2[outr]*a12[outr]*de1[inn]*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]*a12[inn] \\
&]*a13[inn]*a13[outr]+4*ccc1[inn]*ccc2[inn]*de2[outr]*de1[inn]*a11[inn]*a23[outr]*a11[outr]*de \\
& 1[outr]*a23[inn]*a13[outr]^2+4*ccc1[inn]*ccc2[inn]*de2[outr]*de1[inn]*a11[inn]*a23[inn]*a33[o \\
& utr]*de1[outr]*a11[outr]^2*a23[outr]- \\
& 4*ccc1[inn]*ccc2[inn]*de2[outr]*de1[inn]*de1[outr]*a12[inn]*a13[inn]*a23[outr]*a11[outr]*a13[\\
& outr]^2- \\
& 4*ccc1[inn]*ccc2[inn]*de2[outr]*de1[inn]*a23[outr]*a11[outr]^2*a33[outr]*de1[outr]*a12[inn]*a \\
& 13[inn]- \\
& 4*ccc2[inn]*ccc2[outr]*de2[outr]*w*epsilon^2*B0New[inn]*a11[outr]*de1[outr]*a13[outr]*de1[i \\
& nn]^2*a12[outr]+4*ccc2[inn]*ccc2[outr]*de2[outr]*a23[outr]*a11[outr]^2*w*epsilon^2*B0New[i \\
& nn]*de1[outr]*de1[inn]^2+4*ccc2[inn]*ccc1[outr]*de2[outr]*w*epsilon^2*B0New[inn]*a11[outr] \\
& *a13[outr]^2*de1[inn]^2*a12[outr]^2- \\
& 8*ccc2[inn]*ccc1[outr]*de2[outr]*a23[outr]*a11[outr]^2*w*epsilon^2*B0New[inn]*a13[outr]*de \\
& 1[inn]^2*a12[outr]+4*ccc2[inn]*ccc1[outr]*a12[outr]*de1[inn]^2*a13[outr]^3*w*epsilon^2*B0N \\
& ew[inn]*a11[outr]*de1[outr]+4*ccc2[inn]*ccc1[outr]*a12[outr]*de1[inn]^2*w*epsilon^2*B0New[\\
& inn]*a11[outr]^2*a33[outr]*de1[outr]*a13[outr]- \\
& 4*ccc2[inn]*ccc1[outr]*de1[inn]^2*a13[outr]^2*a23[outr]*a11[outr]^2*w*epsilon^2*B0New[inn] \\
& *de1[outr]+2*ccc2[inn]^2*de2[outr]*a12[outr]*de1[inn]^2*de1[outr]*a13[outr]^3+2*ccc2[inn]^2* \\
& de1[inn]^2*a33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]*a13[outr]^2+ccc1[inn]^2*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a \\
& 11[outr]^2*a12[inn]^2*a13[inn]^2+4*ccc2[outr]*ccc1[inn]*de2[outr]*a12[outr]*de1[inn]*a23[inn] \\
& *w*epsilon^2*B0New[inn]*a11[outr]*de1[outr]*a13[outr]*a11[inn]- \\
& 4*ccc2[outr]*ccc1[inn]*de2[outr]*a12[outr]*de1[inn]*w*epsilon^2*B0New[inn]*a11[outr]*de1[o
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4*ccc1[inn]*ccc2[inn]*de2[outr]*a12[outr]*de1[inn]*a11[inn]*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]*a23[inn]*a13[outr]+4*ccc1[inn]*ccc2[inn]*de2[outr]*a12[outr]*de1[inn]*a12[inn]*a13[inn]*de1[outr]*a13[outr]^3- \\
& 4*ccc2[inn]*ccc1[outr]*de1[inn]^2*a23[outr]*a11[outr]^3*w*epsilon^2*B0New[inn]*a33[outr]*de1[outr]/(a13[outr]^4*a13[inn]^4*de1[inn]^2*de1[outr]^2- \\
& 2*a13[inn]^2*de1[inn]*a23[inn]*de2[inn]*a11[inn]*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+2*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]^2*b33[inn]*b33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]^2*a33[outr]+a13[outr]^4*a12[inn]^2*de2[inn]^2*a13[inn]^2*de1[outr]^2+a13[outr]^4*a33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*de1[outr]^2+de2[outr]^2*a13[inn]^4*de1[inn]^2*a23[outr]^2*a11[outr]^2+de2[outr]^2*a12[outr]^2*a13[outr]^2*a13[inn]^4*de1[inn]^2+a13[outr]^4*b33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*de1[outr]^2+a33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2- \\
& 2*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]^2*a23[inn]*a11[inn]*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+4*b33[inn]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*B0New[outr]^2*epsilon^4*w^2+a13[inn]^4*de1[inn]^2*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2- \\
& 2*a13[inn]^2*de1[inn]*a23[inn]*de2[inn]*a11[inn]*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+a12[inn]^2*de2[inn]^2*a13[inn]^2*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+2*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]^3*b33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*de1[outr]+2*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]^3*a12[inn]^2*de2[inn]^2*a13[inn]^2*de1[outr]- \\
& 4*de2[outr]*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]*a23[outr]*a11[outr]^2*a33[outr]*de1[outr]+8*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[inn]*a11[inn]^2*B0New[outr]*a33[outr]*a23[inn]*de2[inn]+a23[inn]^2*de2[inn]^2*a11[inn]^2*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+a23[inn]^2*de2[inn]^2*a11[inn]^2*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+2*a13[inn]^3*de1[inn]*a12[inn]*de2[inn]*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+8*de2[outr]*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*de1[outr]*a11[outr]^2*de1[inn]^2*a11[inn]*B0New[outr]*a23[outr]*a13[inn]^2- \\
& 2*de2[outr]*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]^2*b33[inn]*b33[outr]*de1[outr]*a11[outr]^2*a23[outr]-2*de2[outr]*a13[inn]^4*de1[inn]^2*a23[outr]*a11[outr]^2*a33[outr]*de1[outr]- \\
& 2*de2[outr]*a23[inn]^2*de2[inn]^2*a11[inn]^2*a23[outr]*a11[outr]^2*a33[outr]*de1[outr]- \\
& 4*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]*b33[inn]*b33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[inn]*a11[inn]*B0New[outr]*epsilon^2*w- \\
& 4*B0New[inn]*epsilon^2*w*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[inn]^2*a11[inn]*b33[outr]^2*a13[inn]^2+2*a13[inn]^3*de1[inn]*a12[inn]*de2[inn]*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2- \\
& 4*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]^2*b33[inn]*b33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]^2*B0New[outr]*epsilon^2*w- \\
& 2*de2[outr]*a13[outr]^2*a13[inn]^4*de1[inn]^2*a23[outr]*a11[outr]*de1[outr]+2*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]^3*a33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*de1[outr]+2*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]^3*a23[inn]^2*de2[inn]^2*a11[inn]^2*de1[outr]+2*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]^3*a13[inn]^4*de1[inn]^2*de1[outr]- \\
& 8*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[inn]*a11[inn]*B0New[outr]*a33[outr]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]+b33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+2*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2- \\
& 2*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]^2*a23[inn]*de2[inn]*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+2*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]*a13[inn]^2*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+4*B0New[inn]^2*epsilon^4*w^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*b33[outr]^2- \\
& 8*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[inn]^2*a11[inn]*B0New[outr]*a33[outr]*a13[inn]^2- \\
& 4*b33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*a11[outr]^2*B0New[outr]*epsilon^2*w*de1[outr]^2*a33[outr]- \\
& 4*b33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]^2*B0New[inn]*epsilon^2*w*a11[outr]^2*b33[outr]*de1[outr]^2*a33[outr]+2*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4*B0New[inn]*epsilon^2*w*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[inn]*a11[inn]*b33[outr]^2*a13[inn]*a \\
& 12[inn]*de2[inn]+a33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2- \\
& 4*a13[inn]^2*de1[inn]^2*b33[inn]*b33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]^2*a11[inn]*B0New[outr]*ep \\
& silon^2*w- \\
& 2*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]^2*a23[inn]*de2[inn]*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+2*a13[i \\
& nn]^2*de1[inn]^2*b33[inn]*b33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]^2*a11[inn]*a33[outr]+a12[inn]^2*d \\
& e2[inn]^2*a13[inn]^2*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+4*b33[inn]*de1[outr]^2*a11[outr]^2 \\
& *de1[inn]*a11[inn]^2*b33[outr]*B0New[outr]*epsilon^2*w*a23[inn]*de2[inn]+2*a13[inn]*a12[i \\
& nn]*de2[inn]*b33[inn]*b33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[inn]*a11[inn]*a33[outr]- \\
& 2*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]^2*a23[inn]*a11[inn]*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+2*a33[i \\
& nn]*de1[inn]^2*a11[inn]*a13[inn]^2*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2- \\
& 4*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]^2*B0New[inn]*epsilon^2*w*de1[outr]^2*a11[outr]^2*b33[outr] \\
& ^2- \\
& 8*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]^2*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2*B0New \\
& [outr]*a33[outr]- \\
& 2*b33[inn]*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[inn]*a11[inn]^2*b33[outr]*a23[inn]*de2[inn]*a33[outr] \\
& +4*B0New[inn]*epsilon^2*w*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[inn]*a11[inn]^2*b33[outr]^2*a23[inn] \\
& *de2[inn]+16*B0New[inn]^2*epsilon^8*w^4*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*B \\
& 0New[outr]^2+8*b33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]^2*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*a11[outr]^2*b33[\\
& outr]*de1[outr]^2*B0New[outr]+a13[inn]^4*de1[inn]^2*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+de \\
& 2[outr]^2*a12[outr]^2*a13[outr]^2*a12[inn]^2*de2[inn]^2*a13[inn]^2+de2[outr]^2*a12[outr]^2*a \\
& 13[outr]^2*b33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2+de2[outr]^2*a12[outr]^2*a13[outr]^2*a33[inn]^2* \\
& de1[inn]^2*a11[inn]^2+de2[outr]^2*a12[outr]^2*a13[outr]^2*a23[inn]^2*de2[inn]^2*a11[inn]^2- \\
& 2*a13[outr]^4*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]^2*a23[inn]*de2[inn]*de1[outr]^2- \\
& 2*a13[outr]^4*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]^2*a23[inn]*a11[inn]*de1[outr]^2+2*a13[outr]^4*a33[i \\
& nn]*de1[inn]^2*a11[inn]*a13[inn]^2*de1[outr]^2- \\
& 2*a13[outr]^4*a13[inn]^2*de1[inn]*a23[inn]*de2[inn]*a11[inn]*de1[outr]^2+a13[outr]^4*a23[inn] \\
& ^2*de2[inn]^2*a11[inn]^2*de1[outr]^2+4*a13[outr]^2*a13[inn]^3*de1[inn]*a12[inn]*de2[inn]*d \\
& e1[outr]^2*a33[outr]*a11[outr]+2*a13[outr]^2*a13[inn]^4*de1[inn]^2*a33[outr]*de1[outr]^2*a11 \\
& [outr]- \\
& 4*a13[outr]^2*b33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]^2*B0New[inn]*epsilon^2*w*a11[outr]*b33[outr]*d \\
& e1[outr]^2+8*a13[outr]^2*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*de1[outr]^2*a11[outr]*de1[inn]*a11[inn]^ \\
& 2*B0New[outr]*a23[inn]*de2[inn]+2*a13[outr]^2*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]^2*b33[inn]*b33 \\
& [outr]*de1[outr]^2*a11[outr]+4*a13[outr]^2*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]*a13[inn]^2*a33[outr]* \\
& de1[outr]^2*a11[outr]+2*a13[outr]^2*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]*b33[inn]*b33[outr]*de1[outr]^ \\
& 2*a11[outr]*de1[inn]*a11[inn]- \\
& 4*a13[outr]^2*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]^2*a23[inn]*de2[inn]*a33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]- \\
& 4*a13[outr]^2*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]^2*a23[inn]*a11[inn]*a33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]- \\
& 8*a13[outr]^2*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*de1[outr]^2*a11[outr]*de1[inn]^2*a11[inn]*B0New[\\
& outr]*a13[inn]^2+2*a13[outr]^2*a13[inn]^2*de1[inn]^2*b33[inn]*b33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr] \\
& *a11[inn]+2*a13[outr]^2*b33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*de1[outr]^2*a33[outr]*a11[outr]- \\
& 4*a13[outr]^2*b33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*a11[outr]*B0New[outr]*epsilon^2*w*de1[outr] \\
& ^2+2*a13[outr]^2*a33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*a33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]+2*a13[ou \\
& tr]^2*a12[inn]^2*de2[inn]^2*a13[inn]^2*de1[outr]^2*a33[outr]*a11[outr]+2*a13[outr]^2*a23[inn] \\
& ^2*de2[inn]^2*a11[inn]^2*a33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]+4*a13[outr]^2*a33[inn]*de1[inn]*a1 \\
& 1[inn]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]*a33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]- \\
& 8*a13[outr]^2*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*de1[outr]^2*a11[outr]*de1[inn]*a11[inn]*B0New[out \\
& r]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]- \\
& 2*a13[outr]^2*b33[inn]*de1[outr]^2*a11[outr]*de1[inn]*a11[inn]^2*b33[outr]*a23[inn]*de2[inn] \\
& - \\
& 8*a13[outr]^2*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]^2*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*de1[outr]^2*a11[out \\
& r]*B0New[outr]-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4*a_{13}[out]^2*a_{13}[inn]^2*de_{1}[inn]*a_{23}[inn]*de_{2}[inn]*a_{11}[inn]*a_{33}[out]*de_{1}[out]^2*a_{11}[out] \\
& +2*a_{13}[out]^4*a_{13}[inn]^3*de_{1}[inn]*a_{12}[inn]*de_{2}[inn]*de_{1}[out]^2+2*a_{13}[out]^4*a_{33}[inn]*de_{1}[inn]*a_{11}[inn]*a_{13}[inn]*a_{12}[inn]*de_{2}[inn]*a_{23}[out]^2*a_{11}[out]^2+2*de_{2}[out]^2*a_{33}[inn]*de_{1}[inn]*a_{11}[inn]*a_{13}[inn]*a_{12}[inn]*de_{2}[inn]*a_{23}[out]^2*a_{11}[out]^2+de_{2}[out]^2*a_{23}[inn]^2*de_{2}[inn]^2*a_{11}[inn]^2*a_{23}[out]^2*a_{11}[out]^2+2*de_{2}[out]^2*a_{13}[inn]^3*de_{1}[inn]*a_{12}[inn]*de_{2}[inn]*a_{23}[out]^2*a_{11}[out]^2-2*de_{2}[out]^2*a_{13}[inn]*a_{12}[inn]*de_{2}[inn]^2*a_{23}[inn]*a_{11}[inn]*a_{23}[out]^2*a_{11}[out]^2-2*de_{2}[out]^2*a_{33}[inn]*de_{1}[inn]*a_{11}[inn]^2*a_{23}[inn]*de_{2}[inn]*a_{23}[out]^2*a_{11}[out]^2-2*de_{2}[out]^2*a_{13}[inn]^2*de_{1}[inn]*a_{23}[inn]*de_{2}[inn]*a_{11}[inn]*a_{23}[out]^2*a_{11}[out]^2-2*de_{2}[out]^2*a_{12}[out]^2*a_{13}[out]^2*a_{13}[inn]*a_{12}[inn]*de_{2}[inn]^2*a_{23}[inn]*a_{11}[inn]-2*de_{2}[out]^2*a_{12}[out]^2*a_{13}[out]^2*a_{13}[inn]^2*de_{1}[inn]*a_{23}[inn]*de_{2}[inn]*a_{11}[inn]+2*de_{2}[out]^2*a_{12}[out]^2*a_{13}[out]^2*a_{33}[inn]*de_{1}[inn]*a_{11}[inn]*a_{13}[inn]*a_{12}[inn]*de_{2}[inn]-2*de_{2}[out]^2*a_{12}[out]^2*a_{13}[out]^2*a_{33}[inn]*de_{1}[inn]*a_{11}[inn]^2*a_{23}[inn]*de_{2}[inn]-2*de_{2}[out]^2*a_{12}[out]*a_{13}[out]*a_{12}[inn]^2*de_{2}[inn]^2*a_{13}[inn]^2*a_{23}[out]*a_{11}[out]-2*de_{2}[out]^2*a_{12}[out]*a_{13}[out]*a_{33}[inn]^2*de_{1}[inn]^2*a_{11}[inn]^2*a_{23}[out]*a_{11}[out]-4*de_{2}[out]^2*a_{12}[out]*a_{13}[out]*a_{33}[inn]*de_{1}[inn]^2*a_{11}[inn]*a_{13}[inn]^2*a_{23}[out]*a_{11}[out]-2*de_{2}[out]^2*a_{12}[out]*a_{13}[out]*a_{23}[inn]^2*de_{2}[inn]^2*a_{11}[inn]^2*a_{23}[out]*a_{11}[out]-4*de_{2}[out]^2*a_{12}[out]*a_{13}[out]*a_{33}[inn]*de_{1}[inn]*a_{11}[inn]*a_{13}[inn]*a_{12}[inn]*de_{2}[inn]*a_{23}[out]*a_{11}[out]-2*de_{2}[out]^2*a_{12}[out]*a_{13}[out]*b_{33}[inn]^2*de_{1}[inn]^2*a_{11}[inn]^2*a_{23}[out]*a_{11}[out]-4*de_{2}[out]^2*a_{12}[out]*a_{13}[out]*a_{13}[inn]^3*de_{1}[inn]*a_{12}[inn]*de_{2}[inn]*a_{23}[out]*a_{11}[out]+4*de_{2}[out]^2*a_{12}[out]*a_{13}[out]*a_{13}[inn]*a_{12}[inn]*de_{2}[inn]^2*a_{23}[inn]*a_{11}[inn]*a_{23}[out]*a_{11}[out]+4*de_{2}[out]^2*a_{12}[out]*a_{13}[out]*a_{33}[inn]*de_{1}[inn]*a_{11}[inn]^2*a_{23}[inn]*de_{2}[inn]*a_{23}[out]*a_{11}[out]+4*de_{2}[out]^2*a_{12}[out]*a_{13}[out]*a_{13}[inn]^2*de_{1}[inn]*a_{23}[inn]*de_{2}[inn]*a_{11}[inn]*a_{23}[out]*a_{11}[out]-4*de_{2}[out]*a_{13}[inn]^3*de_{1}[inn]*a_{12}[inn]*de_{2}[inn]*a_{33}[out]*de_{1}[out]*a_{11}[out]^2*a_{23}[out]-2*de_{2}[out]*a_{13}[inn]*a_{12}[inn]*de_{2}[inn]*b_{33}[inn]*b_{33}[out]*de_{1}[out]*a_{11}[out]^2*de_{1}[inn]*a_{11}[inn]*a_{23}[out]+4*de_{2}[out]*b_{33}[inn]^2*de_{1}[inn]^2*a_{11}[inn]^2*a_{11}[out]^2*B_0New[out]*epsilon^2*w*de_{1}[out]*a_{23}[out]+8*de_{2}[out]*a_{12}[out]*a_{13}[out]*B_0New[inn]*epsilon^4*w^2*de_{1}[out]*a_{11}[out]*de_{1}[inn]*a_{11}[inn]^2*B_0New[out]*a_{23}[inn]*de_{2}[inn]+2*de_{2}[out]*a_{12}[out]*a_{13}[out]*a_{33}[inn]^2*de_{1}[inn]^2*a_{11}[inn]^2*a_{33}[out]*de_{1}[out]*a_{11}[out]-8*de_{2}[out]*a_{12}[out]*a_{13}[out]*B_0New[inn]*epsilon^4*w^2*de_{1}[out]*a_{11}[out]*de_{1}[inn]^2*a_{11}[inn]*B_0New[out]*a_{13}[inn]^2-2*de_{2}[out]*a_{12}[out]*a_{13}[out]*b_{33}[inn]*de_{1}[out]*a_{11}[out]*de_{1}[inn]*a_{11}[inn]^2*b_{33}[out]*a_{23}[inn]*de_{2}[inn]+2*de_{2}[out]*a_{12}[out]*a_{13}[out]*a_{33}[inn]*de_{1}[inn]^2*a_{11}[inn]^2*b_{33}[inn]*b_{33}[out]*de_{1}[out]*a_{11}[out]+2*de_{2}[out]*a_{12}[out]*a_{13}[out]*b_{33}[inn]^2*de_{1}[inn]^2*a_{11}[inn]^2*a_{33}[out]*de_{1}[out]*a_{11}[out]+4*de_{2}[out]*a_{12}[out]*a_{13}[out]*a_{33}[inn]*de_{1}[inn]^2*a_{11}[inn]*a_{13}[inn]^2*a_{33}[out]*de_{1}[out]*a_{11}[out]+2*de_{2}[out]*a_{12}[out]*a_{13}[out]*a_{12}[inn]^2*de_{2}[inn]^2*a_{13}[inn]^2*a_{33}[out]*de_{1}[out]*a_{11}[out]-8*de_{2}[out]*a_{12}[out]*a_{13}[out]*a_{33}[inn]*de_{1}[inn]^2*a_{11}[inn]^2*B_0New[inn]*epsilon^4*w^2*de_{1}[out]*a_{11}[out]*B_0New[out]-4*de_{2}[out]*a_{12}[out]*a_{13}[out]*a_{33}[inn]*de_{1}[inn]*a_{11}[inn]^2*a_{23}[inn]*de_{2}[inn]*a_{33}[out]*de_{1}[out]*a_{11}[out]+4*de_{2}[out]*a_{12}[out]*a_{13}[out]*a_{13}[inn]^3*de_{1}[inn]*a_{12}[inn]*de_{2}[inn]*a_{33}[out]*de_{1}[out]*a_{11}[out]+2*de_{2}[out]*a_{12}[out]*a_{13}[out]*a_{23}[inn]^2*de_{2}[inn]^2*a_{11}[inn]^2*a_{33}[out]*de_{1}[out]*a_{11}[out]+4*de_{2}[out]*b_{33}[inn]*de_{1}[inn]^2*a_{11}[inn]^2*B_0New[inn]*epsilon^2*w*a_{11}[out]^2*b_{33}[out]*de_{1}[out]*a_{23}[out]-2*de_{2}[out]*a_{13}[inn]^2*de_{1}[inn]^2*b_{33}[inn]*b_{33}[out]*de_{1}[out]*a_{11}[out]^2*a_{11}[inn]*a_{23}[out]-2*de_{2}[out]*a_{33}[inn]^2*de_{1}[inn]^2*a_{11}[inn]^2*a_{23}[out]*a_{11}[out]^2*a_{33}[out]*de_{1}[out]+4*de_{2}[out]*a_{13}[inn]*a_{12}[inn]*de_{2}[inn]^2*a_{23}[inn]*a_{11}[inn]*a_{33}[out]*de_{1}[out]*a_{11}[out]^2*a_{23}[out]+2*de_{2}[out]*b_{33}[inn]*de_{1}[out]*a_{11}[out]^2*de_{1}[inn]*a_{11}[inn]^2*b_{33}[out]*a_{23}[inn]*de_{2}[inn]*a_{23}[out]+8*de_{2}[out]*B_0New[inn]*epsilon^4*w^2*de_{1}[out]*a_{11}[out]^2*de_{1}[inn]*a_{11}[inn]*B
\end{aligned}$$

ACH1[outr] :=

$$\begin{aligned} & a11[outr]^2 * (ccc2[outr]^2 * de1[outr]^2 * a23[inn]^2 * de2[inn]^2 * a11[inn]^2 + ccc2[outr]^2 * de1[outr]^2 * a12[inn]^2 * de2[inn]^2 * a13[inn]^2 + ccc1[outr]^2 * a12[outr]^2 * a13[outr]^2 * a13[inn]^4 * de1[inn]^2 + ccc1[outr]^2 * a13[inn]^4 * de1[inn]^2 * a23[outr]^2 * a11[outr]^2 + 2 * ccc2[outr]^2 * de1[inn] * de1[outr]^2 * a13[inn]^3 * a12[inn] * de2[inn] + 2 * ccc1[outr] * ccc2[outr] * b33[inn]^2 * a11[outr] * de1[outr] * a23[outr] * a11[inn]^2 * de1[inn]^2 - \\ & 2 * ccc1[outr] * ccc2[outr] * a12[outr] * de1[outr] * a23[inn]^2 * de2[inn]^2 * a13[outr] * a11[inn]^2 - \\ & 2 * ccc1[outr] * ccc2[outr] * a12[outr] * de1[inn]^2 * a33[inn]^2 * de1[outr] * a13[outr] * a11[inn]^2 + 2 * ccc1[outr] * ccc2[outr] * a11[outr] * de1[outr] * a23[outr] * a23[inn]^2 * de2[inn]^2 * a11[inn]^2 + 2 * ccc1[outr] * ccc2[outr] * de1[inn]^2 * a33[inn]^2 * a11[outr] * de1[outr] * a23[outr] * a11[inn]^2 - \\ & 2 * ccc1[outr] * ccc2[outr] * a12[outr] * de1[outr] * a12[inn]^2 * de2[inn]^2 * a13[inn]^2 * a13[outr] + 2 * ccc1[outr] * ccc2[outr] * a12[inn]^2 * de2[inn]^2 * a13[inn]^2 * a23[outr] * a11[outr] * de1[outr] + 2 * ccc2[outr]^2 * de1[inn] * a11[inn] * de1[outr]^2 * a33[inn] * a13[inn] * a12[inn] * de2[inn] + 4 * ccc1[inn]^2 * a11[inn]^2 * de1[outr]^2 * B0New[outr]^2 * epsilon^4 * w^2 * a12[inn]^2 * a13[inn]^2 + 2 * ccc1[outr]^2 * a13[inn]^3 * de1[inn] * a12[inn] * de2[inn] * a23[outr]^2 * a11[outr]^2 + 2 * ccc1[outr]^2 * a12[outr]^2 * a13[outr]^2 * a13[inn]^3 * de1[inn] * a12[inn] * de2[inn] + 2 * ccc1[outr]^2 * a12[outr]^2 * a13[outr]^2 * a33[inn] * de1[inn]^2 * a11[inn] * a13[inn]^2 - \\ & 2 * ccc1[outr]^2 * a12[outr] * a13[outr] * a13[inn]^4 * de1[inn]^2 * a23[outr] * a11[outr] - \\ & 2 * ccc1[outr]^2 * a12[outr]^2 * a13[outr]^2 * a13[inn]^2 * de1[inn] * a23[inn] * de2[inn] * a11[inn] - \\ & 2 * ccc2[outr]^2 * de1[outr]^2 * a13[inn] * a12[inn] * de2[inn]^2 * a23[inn] * a11[inn] - \\ & 2 * ccc2[outr]^2 * de1[inn] * a11[inn] * de1[outr]^2 * a13[inn]^2 * a23[inn] * de2[inn] - \\ & 2 * ccc2[outr]^2 * de1[inn] * de1[outr]^2 * a33[inn] * a23[inn] * de2[inn] * a11[inn]^2 - \\ & 2 * ccc1[outr]^2 * a13[inn]^2 * de1[inn] * a23[inn] * de2[inn] * a11[inn] * a23[outr]^2 * a11[outr]^2 - \\ & 2 * ccc1[inn] * ccc2[inn] * de1[inn] * a11[inn]^3 * b33[outr]^2 * de1[outr]^2 * a23[inn] - \\ & 2 * ccc1[outr]^2 * a12[outr]^2 * a13[outr]^2 * a13[inn] * a12[inn] * de2[inn]^2 * a23[inn] * a11[inn] + 2 * ccc1[outr]^2 * a33[inn] * de1[inn]^2 * a11[inn] * a13[inn]^2 * a23[outr]^2 * a11[outr]^2 - \\ & 2 * ccc1[outr]^2 * a33[inn] * de1[inn] * a11[inn]^2 * a23[inn] * de2[inn] * a23[outr]^2 * a11[outr]^2 - \\ & 2 * ccc1[outr]^2 * a13[inn] * a12[inn] * de2[inn]^2 * a23[inn] * a11[inn] * a23[outr]^2 * a11[outr]^2 - \\ & 2 * ccc1[outr]^2 * a12[outr] * a13[outr] * a12[inn]^2 * de2[inn]^2 * a13[inn]^2 * a23[outr] * a11[outr] - \\ & 2 * ccc1[outr]^2 * a12[outr]^2 * a13[outr]^2 * a33[inn] * de1[inn] * a11[inn]^2 * a23[inn] * de2[inn] - \\ & 2 * ccc1[outr]^2 * a12[outr] * a13[outr] * b33[inn]^2 * de1[inn]^2 * a11[inn]^2 * a23[outr] * a11[outr] - \\ & 2 * ccc1[outr]^2 * a12[outr] * a13[outr] * a33[inn]^2 * de1[inn]^2 * a11[inn]^2 * a23[outr] * a11[outr] - \\ & 2 * ccc1[outr]^2 * a12[outr] * a13[outr] * a23[inn]^2 * de2[inn]^2 * a11[inn]^2 * a23[outr] * a11[outr] + 2 * ccc1[inn] * ccc2[inn] * de1[inn] * a11[inn]^2 * b33[outr]^2 * de1[outr]^2 * a12[inn] * a13[inn] + 2 * ccc1[inn] * ccc2[outr] * b33[inn] * de1[inn] * de1[outr]^2 * b33[outr] * a23[inn] * a11[inn]^3 + 4 * ccc1[outr] * ccc2[outr] * de1[inn] * a11[outr] * de1[outr] * a23[outr] * a13[inn]^3 * a12[inn] * de2[inn] + 4 * ccc1[outr] * ccc2[outr] * de1[inn]^2 * a11[outr] * de1[outr] * a23[outr] * a33[inn] * a13[inn]^2 * a11[inn] - \\ & 4 * ccc1[outr] * ccc2[outr] * a12[outr] * de1[inn] * de1[outr] * a13[inn]^3 * a12[inn] * de2[inn] * a13[outr] - \\ & 4 * ccc1[outr] * ccc2[outr] * a12[outr] * de1[inn]^2 * de1[outr] * a33[inn] * a13[inn]^2 * a13[outr] * a11[inn] \\ & - \\ & 4 * ccc1[outr]^2 * a12[outr] * a13[outr] * a33[inn] * de1[inn]^2 * a11[inn] * a13[inn]^2 * a23[outr] * a11[outr] \\ &] - \\ & 4 * ccc1[outr]^2 * a12[outr] * a13[outr] * a13[inn]^3 * de1[inn] * a12[inn] * de2[inn] * a23[outr] * a11[outr] + \\ & 2 * ccc1[outr]^2 * a33[inn] * de1[inn] * a11[inn] * a13[inn] * a12[inn] * de2[inn] * a23[outr]^2 * a11[outr]^2 \\ & + 2 * ccc1[outr]^2 * a12[outr]^2 * a13[outr]^2 * a33[inn] * de1[inn] * a11[inn] * a13[inn] * a12[inn] * de2[inn] \\ &] - \\ & 8 * ccc1[inn]^2 * a11[inn]^3 * de1[outr]^2 * B0New[outr]^2 * epsilon^4 * w^2 * a12[inn] * a13[inn] * a23[inn] \\ &] - \\ & 4 * ccc2[inn] * ccc2[outr] * de1[inn]^2 * de1[outr]^2 * B0New[outr] * epsilon^2 * w^2 * a13[inn]^2 * a11[inn] - \\ & 4 * ccc2[inn] * ccc2[outr] * de1[inn]^2 * de1[outr]^2 * B0New[outr] * epsilon^2 * w^2 * a33[inn] * a11[inn]^2 - \\ & 2 * ccc1[outr] * ccc2[inn] * b33[inn] * a11[outr] * b33[outr] * de1[outr] * a23[outr] * a11[inn]^2 * de1[inn]^2 \\ & + 2 * ccc1[outr] * ccc2[inn] * b33[inn] * b33[outr] * de1[outr] * a13[outr] * a11[inn]^2 * de1[inn]^2 * a12[outr] \end{aligned}$$

$r]-$
 $4*ccc1[inn]*ccc2[outr]*de1[outr]^2*B0New[outr]*epsilon^2*w*de2[inn]*a23[inn]^2*a11[inn]^3-$
 $2*ccc1[inn]*ccc2[outr]*b33[inn]*de1[inn]*de1[outr]^2*b33[outr]*a12[inn]*a13[inn]*a11[inn]^2-$
 $8*ccc1[inn]*ccc2[inn]*de1[inn]*a11[inn]^3*de1[outr]^2*B0New[outr]^2*epsilon^4*w^2*a23[inn]$
 $+ccc1[inn]^2*a11[inn]^4*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a23[inn]^2+ccc1[outr]^2*a12[inn]^2*de2[inn]$
 $]^2*a13[inn]^2*a23[outr]^2*a11[outr]^2+ccc1[outr]^2*a23[inn]^2*de2[inn]^2*a11[inn]^2*a23[ou]$
 $tr]^2*a11[outr]^2+ccc2[outr]^2*de1[outr]^2*a11[inn]^2*de1[inn]^2*b33[inn]^2-$
 $2*ccc1[inn]^2*a11[inn]^3*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a12[inn]*a13[inn]*a23[inn]+ccc1[outr]^2*a1$
 $2[outr]^2*a13[outr]^2*a23[inn]^2*de2[inn]^2*a11[inn]^2+ccc1[outr]^2*b33[inn]^2*de1[inn]^2*a$
 $11[inn]^2*a23[outr]^2*a11[outr]^2+ccc1[outr]^2*a12[outr]^2*a13[outr]^2*a33[inn]^2*de1[inn]^2$
 $*a11[inn]^2+ccc1[outr]^2*a12[outr]^2*a13[outr]^2*b33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2+ccc2[outr]$
 $]^2*de1[inn]^2*de1[outr]^2*a33[inn]^2*a11[inn]^2+4*ccc2[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*de1[o$
 $utr]^2*B0New[outr]^2*epsilon^4*w^2+ccc1[outr]^2*a12[outr]^2*a13[outr]^2*a12[inn]^2*de2[in$
 $n]^2*a13[inn]^2+4*ccc1[inn]^2*a11[inn]^4*de1[outr]^2*B0New[outr]^2*epsilon^4*w^2*a23[inn]$
 $]^2+ccc2[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*b33[outr]^2*de1[outr]^2-$
 $2*ccc2[inn]*ccc2[outr]*de1[outr]^2*b33[outr]*a11[inn]^2*de1[inn]^2*b33[inn]+ccc1[outr]^2*a33$
 $[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*a23[outr]^2*a11[outr]^2+2*ccc1[outr]*ccc2[outr]*de1[inn]^2*a11$
 $[outr]*de1[outr]*a23[outr]*a13[inn]^4-$
 $2*ccc1[outr]*ccc2[outr]*a12[outr]*de1[inn]^2*de1[outr]*a13[inn]^4*a13[outr]+ccc1[inn]^2*a11[i$
 $nn]^2*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a12[inn]^2*a13[inn]^2+2*ccc2[outr]^2*de1[inn]^2*de1[outr]^2*a$
 $33[inn]*a13[inn]^2*a11[inn]+ccc2[outr]^2*de1[inn]^2*de1[outr]^2*a13[inn]^4-$
 $2*ccc1[inn]*ccc1[outr]*b33[inn]*a12[outr]*de1[inn]*b33[outr]*de1[outr]*a23[inn]*a13[outr]*a11$
 $[inn]^3+2*ccc1[inn]*ccc1[outr]*b33[inn]*de1[inn]*a11[outr]*b33[outr]*de1[outr]*a23[outr]*a23[$
 $inn]*a11[inn]^3+4*ccc1[outr]*ccc2[outr]*a12[outr]*de1[inn]*de1[outr]*a33[inn]*a23[inn]*de2[in$
 $n]*a13[outr]*a11[inn]^2-$
 $4*ccc1[outr]*ccc2[outr]*a12[outr]*de1[inn]*a11[inn]*a13[outr]*de1[outr]*a33[inn]*a13[inn]*a12$
 $[inn]*de2[inn]+4*ccc1[outr]*ccc2[outr]*a12[outr]*de1[inn]*a11[inn]*a13[outr]*de1[outr]*a13[inn]$
 $]^2*a23[inn]*de2[inn]+4*ccc1[outr]*ccc2[outr]*a12[outr]*de1[outr]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]^$
 $2*a23[inn]*a13[outr]*a11[inn]-$
 $4*ccc1[outr]*ccc2[outr]*de1[inn]*de1[outr]*a11[outr]*a33[inn]*a23[inn]*de2[inn]*a23[outr]*a11$
 $[inn]^2+4*ccc1[outr]*ccc2[outr]*de1[inn]*a11[inn]*a11[outr]*de1[outr]*a23[outr]*a33[inn]*a13[i$
 $nn]*a12[inn]*de2[inn]-$
 $4*ccc1[outr]*ccc2[outr]*de1[inn]*a11[inn]*a11[outr]*de1[outr]*a23[outr]*a13[inn]^2*a23[inn]*d$
 $e2[inn]-$
 $4*ccc1[outr]*ccc2[outr]*de1[outr]*a11[outr]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]^2*a23[inn]*a23[outr]*a$
 $11[inn]+4*ccc1[outr]*ccc2[inn]*a12[outr]*de1[inn]^2*B0New[outr]*epsilon^2*w*de1[outr]*a33[$
 $inn]*a13[outr]*a11[inn]^2+4*ccc1[outr]*ccc2[inn]*a12[outr]*de1[inn]^2*B0New[outr]*epsilon^2$
 $*w*de1[outr]*a13[inn]^2*a13[outr]*a11[inn]-$
 $4*ccc1[outr]*ccc2[inn]*a12[outr]*de1[inn]*B0New[outr]*epsilon^2*w*de1[outr]*de2[inn]*a23[in$
 $n]*a13[outr]*a11[inn]^2+4*ccc1[outr]*ccc2[inn]*a12[outr]*de1[inn]*B0New[outr]*epsilon^2*w*$
 $de1[outr]*de2[inn]*a12[inn]*a13[inn]*a13[outr]*a11[inn]-$
 $4*ccc1[outr]*ccc2[inn]*de1[inn]^2*a11[outr]*B0New[outr]*epsilon^2*w*de1[outr]*a23[outr]*a3$
 $3[inn]*a11[inn]^2-$
 $4*ccc1[outr]*ccc2[inn]*de1[inn]^2*a11[outr]*B0New[outr]*epsilon^2*w*de1[outr]*a13[inn]^2*a$
 $23[outr]*a11[inn]+4*ccc1[outr]*ccc2[inn]*de1[inn]*a11[outr]*B0New[outr]*epsilon^2*w*de1[ou$
 $tr]*de2[inn]*a23[inn]*a23[outr]*a11[inn]^2+4*ccc2[inn]*ccc2[outr]*de1[inn]*de1[outr]^2*B0Ne$
 $w[outr]*epsilon^2*w*de2[inn]*a23[inn]*a11[inn]^2-$
 $2*ccc1[outr]*ccc2[outr]*b33[inn]^2*de1[outr]*a13[outr]*a11[inn]^2*de1[inn]^2*a12[outr]-$
 $4*ccc2[inn]*ccc2[outr]*de1[inn]*de1[outr]^2*B0New[outr]*epsilon^2*w*de2[inn]*a12[inn]*a13[$
 $inn]*a11[inn]-$
 $4*ccc1[outr]^2*a12[outr]*a13[outr]*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]*a23[$
 $outr]*a11[outr]+4*ccc1[outr]^2*a12[outr]*a13[outr]*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]^2*a23[inn]*de2[$

[illegible]

$$\begin{aligned}
&]^3*b33[in]^{*2}*de1[in]^{*2}*a11[in]^{*2}*de1[outr]+2*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]^3*a12[in]^{*2} \\
& *de2[in]^{*2}*a13[in]^{*2}*de1[outr]- \\
& 4*de2[outr]*a33[in]*de1[in]*a11[in]*a13[in]*a12[in]*de2[in]*a23[outr]*a11[outr]^2*a33[outr] \\
& *de1[outr]+8*B0New[in]*epsilon^4*w^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[in]*a11[in]^2*B0New[outr] \\
& *a33[outr]*a23[in]*de2[in]+a23[in]^2*de2[in]^2*a11[in]^2*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+a23[in] \\
& ^2*de1[in]^2*de2[in]^2*a11[in]^2*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+2*a13[in]^3*de1[in]*a12[in] \\
& *de2[in]*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+8*de2[outr]*B0New[in]*epsilon^4*w^2*de1[outr]*a11[outr]^2 \\
& *de1[in]^2*a11[in]*B0New[outr]*a23[outr]*a13[in]^2- \\
& 2*de2[outr]*a33[in]*de1[in]^2*a11[in]^2*b33[in]*b33[outr]*de1[outr]*a11[outr]^2*a23[outr]- \\
& 2*de2[outr]*a13[in]^4*de1[in]^2*a23[outr]*a11[outr]^2*a33[outr]*de1[outr]- \\
& 2*de2[outr]*a23[in]^2*de2[in]^2*a11[in]^2*a23[outr]*a11[outr]^2*a33[outr]*de1[outr]- \\
& 4*a13[in]*a12[in]*de2[in]*b33[in]*b33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[in]*a11[in]*B0New[outr] \\
& *epsilon^2*w- \\
& 4*B0New[in]*epsilon^2*w^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[in]^2*a11[in]*b33[outr]^2*a13[in]^2+2*a13[in] \\
& ^3*de1[in]*a12[in]*de2[in]*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2- \\
& 4*a33[in]*de1[in]^2*a11[in]^2*b33[in]*b33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]^2*B0New[outr]*epsilon^2*w- \\
& 2*de2[outr]*a13[outr]^2*a13[in]^4*de1[in]^2*a23[outr]*a11[outr]*de1[outr]+2*de2[outr]*a12[outr] \\
& *a13[outr]^3*a33[in]^2*de1[in]^2*a11[in]^2*de1[outr]+2*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]^3*a13[in]^4*de1[in] \\
& ^2*de1[outr]- \\
& 8*B0New[in]*epsilon^4*w^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[in]*a11[in]*B0New[outr]*a33[outr]*a13[in] \\
& *a12[in]*de2[in]+b33[in]^2*de1[in]^2*a11[in]^2*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+2*a33[in]*de1[in] \\
& *a11[in]*a13[in]*a12[in]*de2[in]*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2- \\
& 2*a33[in]*de1[in]*a11[in]^2*a23[in]*de2[in]*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+2*a33[in]*de1[in] \\
& ^2*a11[in]*a13[in]^2*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+4*B0New[in]^2*epsilon^4*w^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2 \\
& *de1[in]^2*a11[in]^2*b33[outr]^2- \\
& 8*B0New[in]*epsilon^4*w^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[in]^2*a11[in]*B0New[outr]*a33[outr]*a13[in]^2- \\
& 4*b33[in]^2*de1[in]^2*a11[in]^2*a11[outr]^2*B0New[outr]*epsilon^2*w^2*de1[outr]^2*a33[outr]- \\
& 4*b33[in]*de1[in]^2*a11[in]^2*B0New[in]*epsilon^2*w^2*a11[outr]^2*b33[outr]*de1[outr]^2*a33[outr]+2*a33[in] \\
& *de1[in]*a11[in]*a13[in]*a12[in]*de2[in]*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2- \\
& 4*B0New[in]*epsilon^2*w^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[in]*a11[in]*b33[outr]^2*a13[in]*a12[in]*de2[in] \\
& +a33[in]^2*de1[in]^2*a11[in]^2*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2- \\
& 4*a13[in]^2*de1[in]^2*b33[in]*b33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]^2*a11[in]*B0New[outr]*epsilon^2*w- \\
& 2*a33[in]*de1[in]*a11[in]^2*a23[in]*de2[in]*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+2*a13[in]^2*de1[in] \\
& ^2*b33[in]*b33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]^2*a11[in]*a33[outr]+a12[in]^2*de2[in]^2*a13[in]^2*b33[outr]^2 \\
& *de1[outr]^2*a11[outr]^2+4*b33[in]*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[in]*a11[in]^2*b33[outr]*B0New[outr] \\
& *epsilon^2*w^2*a23[in]*de2[in]+2*a13[in]*a12[in]*de2[in]*b33[in]*b33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[in] \\
& *a11[in]*a33[outr]- \\
& 2*a13[in]*a12[in]*de2[in]^2*a23[in]*a11[in]*a33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+2*a33[in]*de1[in] \\
& ^2*a11[in]*a13[in]^2*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2- \\
& 4*a33[in]*de1[in]^2*a11[in]^2*B0New[in]*epsilon^2*w^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2*b33[outr]^2- \\
& 8*a33[in]*de1[in]^2*a11[in]^2*B0New[in]*epsilon^4*w^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2*B0New[outr]*a33[outr]- \\
& 2*b33[in]*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[in]*a11[in]^2*b33[outr]*a23[in]*de2[in]*a33[outr]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4*B0New[inn]*epsilon^2*w*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[inn]*a11[inn]^2*b33[outr]^2*a23[inn] \\
&]*de2[inn]+16*B0New[inn]^2*epsilon^8*w^4*de1[outr]^2*a11[outr]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*B \\
& 0New[outr]^2+8*b33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]^2*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*a11[outr]^2*b33[\\
& outr]*de1[outr]^2*B0New[outr]+a13[inn]^4*de1[inn]^2*b33[outr]^2*de1[outr]^2*a11[outr]^2+de \\
& 2[outr]^2*a12[outr]^2*a13[outr]^2*a12[inn]^2*de2[inn]^2*a13[inn]^2+de2[outr]^2*a12[outr]^2*a \\
& 13[outr]^2*b33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2+de2[outr]^2*a12[outr]^2*a13[outr]^2*a33[inn]^2* \\
& de1[inn]^2*a11[inn]^2+de2[outr]^2*a12[outr]^2*a13[outr]^2*a23[inn]^2*de2[inn]^2*a11[inn]^2- \\
& 2*a13[outr]^4*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]^2*a23[inn]*de2[inn]*de1[outr]^2- \\
& 2*a13[outr]^4*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]^2*a23[inn]*a11[inn]*de1[outr]^2+2*a13[outr]^4*a33[i \\
& nn]*de1[inn]^2*a11[inn]*a13[inn]^2*de1[outr]^2- \\
& 2*a13[outr]^4*a13[inn]^2*de1[inn]*a23[inn]*de2[inn]*a11[inn]*de1[outr]^2+a13[outr]^4*a23[inn] \\
&]^2*de2[inn]^2*a11[inn]^2*de1[outr]^2+4*a13[outr]^2*a13[inn]^3*de1[inn]*a12[inn]*de2[inn]*d \\
& e1[outr]^2*a33[outr]*a11[outr]+2*a13[outr]^2*a13[inn]^4*de1[inn]^2*a33[outr]*de1[outr]^2*a11 \\
& [outr]- \\
& 4*a13[outr]^2*b33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]^2*B0New[inn]*epsilon^2*w*a11[outr]*b33[outr]*d \\
& e1[outr]^2+8*a13[outr]^2*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*de1[outr]^2*a11[outr]*de1[inn]*a11[inn]^2 \\
& *B0New[outr]*a23[inn]*de2[inn]+2*a13[outr]^2*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]^2*b33[inn]*b33 \\
& [outr]*de1[outr]^2*a11[outr]+4*a13[outr]^2*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]*a13[inn]^2*a33[outr]* \\
& de1[outr]^2*a11[outr]+2*a13[outr]^2*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]*b33[inn]*b33[outr]*de1[outr]^2 \\
& *a11[outr]*de1[inn]*a11[inn]- \\
& 4*a13[outr]^2*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]^2*a23[inn]*de2[inn]*a33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]- \\
& 4*a13[outr]^2*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]^2*a23[inn]*a11[inn]*a33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]- \\
& 8*a13[outr]^2*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*de1[outr]^2*a11[outr]*de1[inn]^2*a11[inn]*B0New[ou \\
& tr]*a13[inn]^2+2*a13[outr]^2*a13[inn]^2*de1[inn]^2*b33[inn]*b33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr] \\
&]*a11[inn]+2*a13[outr]^2*b33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*de1[outr]^2*a33[outr]*a11[outr]- \\
& 4*a13[outr]^2*b33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*a11[outr]*B0New[outr]*epsilon^2*w*de1[outr] \\
&]^2+2*a13[outr]^2*a33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*a33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]+2*a13[ou \\
& tr]^2*a12[inn]^2*de2[inn]^2*a13[inn]^2*de1[outr]^2*a33[outr]*a11[outr]+2*a13[outr]^2*a23[inn] \\
&]^2*de2[inn]^2*a11[inn]^2*a33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]+4*a13[outr]^2*a33[inn]*de1[inn]*a1 \\
& 1[inn]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]*a33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr]- \\
& 8*a13[outr]^2*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*de1[outr]^2*a11[outr]*de1[inn]*a11[inn]*B0New[ou \\
& tr]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]- \\
& 2*a13[outr]^2*b33[inn]*de1[outr]^2*a11[outr]*de1[inn]*a11[inn]^2*b33[outr]*a23[inn]*de2[inn] \\
& - \\
& 8*a13[outr]^2*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]^2*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*de1[outr]^2*a11[ou \\
& tr]*B0New[outr]- \\
& 4*a13[outr]^2*a13[inn]^2*de1[inn]*a23[inn]*de2[inn]*a11[inn]*a33[outr]*de1[outr]^2*a11[outr] \\
& +2*a13[outr]^4*a13[inn]^3*de1[inn]*a12[inn]*de2[inn]*de1[outr]^2+2*a13[outr]^4*a33[inn]*de1 \\
& [inn]*a11[inn]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]*de1[outr]^2+de2[outr]^2*a23[inn]^2*de2[inn]^2*a11[\\
& inn]^2*a23[outr]^2*a11[outr]^2+2*de2[outr]^2*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]*a13[inn]*a12[inn]*de \\
& 2[inn]*a23[outr]^2*a11[outr]^2+de2[outr]^2*b33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*a23[outr]^2*a11 \\
& [outr]^2+2*de2[outr]^2*a13[inn]^3*de1[inn]*a12[inn]*de2[inn]*a23[outr]^2*a11[outr]^2- \\
& 2*de2[outr]^2*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]^2*a23[inn]*a11[inn]*a23[outr]^2*a11[outr]^2- \\
& 2*de2[outr]^2*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]^2*a23[inn]*de2[inn]*a23[outr]^2*a11[outr]^2- \\
& 2*de2[outr]^2*a13[inn]^2*de1[inn]*a23[inn]*de2[inn]*a11[inn]*a23[outr]^2*a11[outr]^2- \\
& 2*de2[outr]^2*a12[outr]^2*a13[outr]^2*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]^2*a23[inn]*a11[inn]- \\
& 2*de2[outr]^2*a12[outr]^2*a13[outr]^2*a13[inn]^2*de1[inn]*a23[inn]*de2[inn]*a11[inn]+2*de2[\\
& outr]^2*a12[outr]^2*a13[outr]^2*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]- \\
& 2*de2[outr]^2*a12[outr]^2*a13[outr]^2*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]^2*a23[inn]*de2[inn]- \\
& 2*de2[outr]^2*a12[outr]*a13[outr]*a12[inn]^2*de2[inn]^2*a13[inn]^2*a23[outr]*a11[outr]- \\
& 2*de2[outr]^2*a12[outr]*a13[outr]*a33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*a23[outr]*a11[outr]- \\
& 4*de2[outr]^2*a12[outr]*a13[outr]*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]*a13[inn]^2*a23[outr]*a11[outr]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2*de2[outr]^2*a12[outr]*a13[outr]*a23[inn]^2*de2[inn]^2*a11[inn]^2*a23[outr]*a11[outr]- \\
& 4*de2[outr]^2*a12[outr]*a13[outr]*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]*a23[outr]*a11[outr]- \\
& 2*de2[outr]^2*a12[outr]*a13[outr]*b33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*a23[outr]*a11[outr]- \\
& 4*de2[outr]^2*a12[outr]*a13[outr]*a13[inn]^3*de1[inn]*a12[inn]*de2[inn]*a23[outr]*a11[outr]+ \\
& 4*de2[outr]^2*a12[outr]*a13[outr]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]^2*a23[inn]*a11[inn]*a23[outr]*a11[outr]+ \\
& 4*de2[outr]^2*a12[outr]*a13[outr]*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]^2*a23[inn]*de2[inn]*a23[outr]*a11[outr]+ \\
& 4*de2[outr]^2*a12[outr]*a13[outr]*a13[inn]^2*de1[inn]*a23[inn]*de2[inn]*a11[inn]*a23[outr]*a11[outr]- \\
& 4*de2[outr]*a13[inn]^3*de1[inn]*a12[inn]*de2[inn]*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]^2*a23[outr]- \\
& 2*de2[outr]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]*b33[inn]*b33[outr]*de1[outr]*a11[outr]^2*de1[inn]*a11[inn]*a23[outr]+ \\
& 4*de2[outr]*b33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*a11[outr]^2*B0New[outr]*epsilon^2*w^2*de1[outr]*a11[outr]*de1[inn]*a11[inn]^2* \\
& B0New[outr]*a23[inn]*de2[inn]+2*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*a33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]- \\
& 8*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*de1[outr]*a11[outr]*de1[inn]^2*a11[inn]*B0New[outr]*a13[inn]^2- \\
& 2*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*b33[inn]*de1[outr]*a11[outr]*de1[inn]*a11[inn]^2*b33[outr]*a23[inn]*de2[inn]+ \\
& 2*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]^2*b33[inn]*b33[outr]*de1[outr]*a11[outr]+ \\
& 2*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*b33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]+ \\
& 4*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]*a13[inn]^2*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]+ \\
& 2*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*a12[inn]^2*de2[inn]^2*a13[inn]^2*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]- \\
& 8*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]^2*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*de1[outr]*a11[outr]*B0New[outr]- \\
& 4*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]^2*a23[inn]*de2[inn]*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]+ \\
& 4*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*a13[inn]^3*de1[inn]*a12[inn]*de2[inn]*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]+ \\
& 2*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*a23[inn]^2*de2[inn]^2*a11[inn]^2*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]+ \\
& 4*de2[outr]*b33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]^2*B0New[inn]*epsilon^2*w^2*a11[outr]^2*b33[outr]*de1[outr]*a23[outr]- \\
& 2*de2[outr]*a13[inn]^2*de1[inn]^2*b33[inn]*b33[outr]*de1[outr]*a11[outr]^2*a11[inn]*a23[outr]- \\
& 2*de2[outr]*a33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*a23[outr]*a11[outr]^2*a33[outr]*de1[outr]+4*de2[outr]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]^2* \\
& a23[inn]*a11[inn]*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]^2*a23[outr]+2*de2[outr]*b33[inn]*de1[outr]*a11[outr]^2*de1[inn]*a11[inn]^2* \\
& b33[outr]*a23[inn]*de2[inn]*a23[outr]+8*de2[outr]*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*de1[outr]*a11[outr]^2*de1[inn]*a11[inn]*B0New[outr]*a23[outr]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]- \\
& 2*de2[outr]*b33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*a23[outr]*a11[outr]^2*a33[outr]*de1[outr]- \\
& 2*de2[outr]*a12[inn]^2*de2[inn]^2*a13[inn]^2*a23[outr]*a11[outr]^2*a33[outr]*de1[outr]+8*de2[outr]*a33[inn]*de1[inn]^2* \\
& a11[inn]^2*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*de1[outr]*a11[outr]^2*B0New[outr]*a23[outr]+4*de2[outr]*a13[inn]^2*de1[inn]*a23[inn]*de2[inn]*a11[inn]*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]^2* \\
& a23[outr]- \\
& 4*de2[outr]*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]*a13[inn]^2*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]^2*a23[outr]+4*de2[outr]*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]^2* \\
& a23[inn]*de2[inn]*a23[outr]*a11[outr]^2*a33[outr]*de1[outr]- \\
& 8*de2[outr]*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*de1[outr]*a11[outr]^2*de1[inn]*a11[inn]^2*B0New[outr]*a23[outr]*a23[inn]*de2[inn]- \\
& 2*de2[outr]*a13[outr]^2*b33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*de1[outr]*a23[outr]*a11[outr]- \\
& 4*de2[outr]*a13[outr]^2*a13[inn]^3*de1[inn]*a12[inn]*de2[inn]*de1[outr]*a23[outr]*a11[outr]+ \\
& 4*de2[outr]*a13[outr]^2*a13[inn]^2*de1[inn]*a23[inn]*de2[inn]*a11[inn]*de1[outr]*a23[outr]*a11[outr]+ \\
& 4*de2[outr]*a13[outr]^2*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]^2*a23[inn]*de2[inn]*de1[outr]*a23[outr]*a11[outr]-
\end{aligned}$$

```

2*de2[outr]*a13[outr]^2*a12[inn]^2*de2[inn]^2*a13[inn]^2*a23[outr]*a11[outr]*de1[outr]-
4*de2[outr]*a13[outr]^2*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]*a13[inn]^2*a23[outr]*a11[outr]*de1[outr]-
-2*de2[outr]*a13[outr]^2*a33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*de1[outr]*a23[outr]*a11[outr]-
4*de2[outr]*a13[outr]^2*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]*de1[outr]*a23[
outr]*a11[outr]-
2*de2[outr]*a13[outr]^2*a23[inn]^2*de2[inn]^2*a11[inn]^2*de1[outr]*a23[outr]*a11[outr]+4*de2
[outr]*a13[outr]^2*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]^2*a23[inn]*a11[inn]*de1[outr]*a23[outr]*a11[ou
tr]+2*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*a13[inn]^4*de1[inn]^2*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]+4*de2[
outr]*a12[outr]*a13[outr]^3*a13[inn]^3*de1[inn]*a12[inn]*de2[inn]*de1[outr]+4*de2[outr]*a12[
outr]*a13[outr]^3*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]*a13[inn]^2*de1[outr]+4*de2[outr]*a12[outr]*a1
3[outr]^3*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]*de1[outr]-
4*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]^3*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]^2*a23[inn]*a11[inn]*de1[outr]-
4*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]^3*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]^2*a23[inn]*de2[inn]*de1[outr]-
4*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]^3*a13[inn]^2*de1[inn]*a23[inn]*de2[inn]*a11[inn]*de1[outr]+2
*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]*b33[inn]*b33[outr]*de1[outr]*a11[ou
tr]*de1[inn]*a11[inn]-
4*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*b33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]^2*B0New[inn]*epsilon^2*w*a11
[outr]*b33[outr]*de1[outr]-
4*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*b33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[inn]^2*a11[outr]*B0New[outr]*epsi
lon^2*w*de1[outr]-
4*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*a13[inn]^2*de1[inn]*a23[inn]*de2[inn]*a11[inn]*a33[outr]*de1[
outr]*a11[outr]+4*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*a33[inn]*de1[inn]*a11[inn]*a13[inn]*a12[inn]*
de2[inn]*a33[outr]*de1[outr]*a11[outr]-
4*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]^2*a23[inn]*a11[inn]*a33[outr]*de1[
outr]*a11[outr]+2*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*a13[inn]^2*de1[inn]^2*b33[inn]*b33[outr]*de1[
outr]*a11[outr]*a11[inn]-
8*de2[outr]*a12[outr]*a13[outr]*B0New[inn]*epsilon^4*w^2*de1[outr]*a11[outr]*de1[inn]*a11[i
nn]*B0New[outr]*a13[inn]*a12[inn]*de2[inn]+2*de2[outr]^2*a12[outr]^2*a13[outr]^2*a13[inn]^
3*de1[inn]*a12[inn]*de2[inn]+2*de2[outr]^2*a12[outr]^2*a13[outr]^2*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[i
nn]*a13[inn]^2-
2*de2[outr]^2*a12[outr]*a13[outr]*a13[inn]^4*de1[inn]^2*a23[outr]*a11[outr]+de2[outr]^2*a12[i
nn]^2*de2[inn]^2*a13[inn]^2*a23[outr]^2*a11[outr]^2+de2[outr]^2*a33[inn]^2*de1[inn]^2*a11[i
nn]^2*a23[outr]^2*a11[outr]^2+2*de2[outr]^2*a33[inn]*de1[inn]^2*a11[inn]*a13[inn]^2*a23[ou
tr]^2*a11[outr]^2):

```

```

RETURN(eval([sqrt(abs(ACH1[inn])),sqrt(abs(ACH1[outr])),epsilon]));

```

```

end:

```

```

fprintf(OutputFile,"                Variant %-1.0f \n\n",NumberVariant );
if TypeCurrent=1
then fprintf(OutputFile," Free current of a liquid in end faces.\n");
else if TypeCurrent=2
then fprintf(OutputFile," The closed end faces.\n");
fi:
fi:

fprintf(OutputFile,"\n\nR2=%+7.6e l2=%+7.6e delta=%+7.6e rho=%+7.6e
\n\n",RR[2],l2,delta,rho);
fprintf(OutputFile," nu=%+7.6e \n\n",nu);

```

```

fprintf(OutputFile,"h0[outr]=%+7.6e E[outr]=%+7.6e mu0[outr]=%+7.6e rho0[outr]=%+7.6e
\n\n",h0[outr],E[outr],mu0[outr],rho0[outr]);
fprintf(OutputFile,"h0[inn]=%+7.6e E[inn]=%+7.6e mu0[inn]=%+7.6e rho0[inn]=%+7.6e
\n\n",h0[inn],E[inn],mu0[inn],rho0[inn]);
fprintf(OutputFile,"LowBound=%+7.6e HighBound=%+7.6e NumberSteps=%+7.6e
\n\n",LowBound,HighBound,NumberSteps);

```

```

fprintf(OutputFile,"*   omega   *   ACH[inn]   *   ACH[outr]   *   \n");
fprintf(OutputFile,"*****
*\n");

```

```

RezDat:=RevoltingMoment(aomega,TypeCurrent):

```

```

GrantOmega:=solve(RezDat[3]=4,aomega):
aRenolds:=delta^2*aomega/nu:
aepsilon:=sqrt(aRenolds/2):
eee[1][1]:=simplify(diff(simplify(subs(vvv=1,subs(www=1.2,RezDat[1])),aomega)):
eee[2][1]:=simplify(diff(simplify(subs({ www=1.2,vvv=1 },RezDat[2])),aomega)):
eee[1][2]:=simplify(diff(simplify(subs({ www=1,vvv=aeppilon/6 },RezDat[1])),aomega)):
eee[2][2]:=simplify(diff(simplify(subs({ www=1,vvv=aeppilon/6 },RezDat[2])),aomega)):

```

```

print(0);
tmp[1][1]:=solve( numer(simplify(expand(eee[1][1])),aomega):
print(1);
tmp[2][1]:=solve( numer(simplify(expand(eee[2][1])),aomega):
print(2);
tmp[1][2]:=solve( numer(simplify(expand(eee[1][2])),aomega):
print(3);
tmp[2][2]:=solve( numer(simplify(expand(eee[2][2])),aomega):
print(4);

```

```

for j1 from 1 to 2 do
kk:=1:
for j2 from 1 to 2 do
for i from 1 to nops([tmp[j1][j2]]) do
if (whattype(tmp[j1][j2][i])='float') and (tmp[j1][j2][i]>0)
then
if (tmp[j1][j2][i]<GrantOmega) and (j2=1)
then
RootN[j1][kk]:=tmp[j1][j2][i]:
kk:=kk+1:
else
if (tmp[j1][j2][i]>GrantOmega) and (j2=2)
then
RootN[j1][kk]:=tmp[j1][j2][i]:
kk:=kk+1:
fi:
fi:
od:
od:

```

```

od:

for j1 from 1 to 2 do
kk:=1:
kk1:=1:
for i from 1 to nops(op(op([eval(RootN[j1]))))) do
if RootN[j1][i]<GrantOmega
then Teee:=eee[j1][1]:
else Teee:=eee[j1][2]:
fi:
if eval(subs(aomega=RootN[j1][i],diff(Teee,aomega)))<0
then
MaxRoot[j1][kk]:=RootN[j1][i]:
kk:=kk+1:
fi:

if (eval(subs(aomega=RootN[j1][i],diff(Teee,aomega)))<0) or
(eval(subs(aomega=RootN[j1][i],diff(Teee,aomega)))>0)
then
MaxRoot1[j1][kk1]:=RootN[j1][i]:
kk1:=kk1+1:
fi:

od;
od:

fprintf(OutputFile," max \n");

for j1 from 1 to 2 do
if j1=1 then fprintf(OutputFile," \n\n A[inn] \n"); Tee:=RezDat[1]: fi:
if j1=2 then fprintf(OutputFile," \n\n A[outr] \n"); Tee:=RezDat[2]: fi:
for i from 1 to nops(op(op([eval(MaxRoot[j1]))))) do
if MaxRoot[j1][i]<GrantOmega
then Teee:=subs({www=1.2,vvv=1},Tee):
else Teee:=subs({www=1,vvv=aepsilon/6},Tee):
fi:
fprintf(OutputFile," %+7.6e %+7.6e %+7.6e \n",
MaxRoot[j1][i],eval(subs(aomega=MaxRoot[j1][i],Tee)),eval(subs(aomega=MaxRoot[j1][i],Tee)
)/eval(subs(aomega=1,Tee)));
od:
od:

fprintf(OutputFile,"\n\n maxmin \n");

for j1 from 1 to 2 do
if j1=1 then fprintf(OutputFile," \n\n A[inn] \n"); Tee:=RezDat[1]: fi:
if j1=2 then fprintf(OutputFile," \n\n A[outr] \n"); Tee:=RezDat[2]: fi:
for i from 1 to nops(op(op([eval(MaxRoot1[j1]))))) do
if MaxRoot1[j1][i]<GrantOmega
then Teee:=subs({www=1.2,vvv=1},Tee):

```

```

else Tee:=subs({www=1,vvv=aepsilon/6},Tee):
fi:
fprintf(OutputFile," %+7.6e %+7.6e %+7.6e \n",
MaxRoot1[j1][i],eval(subs(aomega=MaxRoot1[j1][i],Tee)),eval(subs(aomega=MaxRoot1[j1][i],T
eee))/eval(subs(aomega=0.000001,Tee)));
od:
od:

fprintf(OutputFile,"*****
*\n\n\n"):
od;
close(OutputFile):
close(InputFile):
end:

```

Приложение С. Проблемно-ориентированный комплекс с использованием параллельных вычислений

```

restart:
restart:
restart:

```

```

u[outr10]:=applyrule([u[moutr]*a[s10outr]*sin(phi[outru1])=s10outrSin,u[moutr]*a[s10outr]*cos(p
hi[outru1])=s10outrCos,v[moutr]*a[s20outr]*sin(phi[outru2])=s20outrSin,v[moutr]*a[s20outr]*cos
(phi[outru2])=s20outrCos,w[moutr]*a[s30outr]*sin(phi[outru3])=s30outrSin,w[moutr]*a[s30outr]*
cos(phi[outru3])=s30outrCos,u[moutr]*a[c10outr]*sin(phi[outru1])=c10outrSin,u[moutr]*a[c10outr
]*cos(phi[outru1])=c10outrCos,v[moutr]*a[c20outr]*sin(phi[outru2])=c20outrSin,v[moutr]*a[c20o
utr]*cos(phi[outru2])=c20outrCos,w[moutr]*a[c30outr]*sin(phi[outru3])=c30outrSin,w[moutr]*a[c
30outr]*cos(phi[outru3])=c30outrCos,u[moutr]*a[o10outr]=o10outr,v[moutr]*a[o20outr]=o20outr,
w[moutr]*a[o30outr]=o30outr],expand(u[moutr]*(a[c10outr]*zeta*(1-
zeta^2)*cos(theta+phi)+a[s10outr]*zeta*(1-
zeta^2)*sin(theta+phi))*sin(tau+phi[outru1])+u[moutr]*a[o10outr]*zeta*(1-zeta^2)));

```

```

u[inn10]:=applyrule([u[minn]*a[s10inn]*sin(phi[innu1])=s10innSin,u[minn]*a[s10inn]*cos(phi[inn
u1])=s10innCos,v[minn]*a[s20inn]*sin(phi[innu2])=s20innSin,v[minn]*a[s20inn]*cos(phi[innu2])
=s20innCos,w[minn]*a[s30inn]*sin(phi[innu3])=s30innSin,w[minn]*a[s30inn]*cos(phi[innu3])=s3
0innCos,u[minn]*a[c10inn]*sin(phi[innu1])=c10innSin,u[minn]*a[c10inn]*cos(phi[innu1])=c10inn
Cos,v[minn]*a[c20inn]*sin(phi[innu2])=c20innSin,v[minn]*a[c20inn]*cos(phi[innu2])=c20innCos,
w[minn]*a[c30inn]*sin(phi[innu3])=c30innSin,w[minn]*a[c30inn]*cos(phi[innu3])=c30innCos,u[
minn]*a[o10inn]=o10inn,v[minn]*a[o20inn]=o20inn,w[minn]*a[o30inn]=o30inn],expand(u[minn]
*(a[c10inn]*zeta*(1-zeta^2)*cos(theta+phi)+a[s10inn]*zeta*(1-
zeta^2)*sin(theta+phi))*sin(tau+phi[innu1])+u[minn]*a[o10inn]*zeta*(1-zeta^2)));

```

```

u[outr20]:=applyrule([u[moutr]*a[s10outr]*sin(phi[outru1])=s10outrSin,u[moutr]*a[s10outr]*cos(p
hi[outru1])=s10outrCos,v[moutr]*a[s20outr]*sin(phi[outru2])=s20outrSin,v[moutr]*a[s20outr]*cos
(phi[outru2])=s20outrCos,w[moutr]*a[s30outr]*sin(phi[outru3])=s30outrSin,w[moutr]*a[s30outr]*
cos(phi[outru3])=s30outrCos,u[moutr]*a[c10outr]*sin(phi[outru1])=c10outrSin,u[moutr]*a[c10outr
]*cos(phi[outru1])=c10outrCos,v[moutr]*a[c20outr]*sin(phi[outru2])=c20outrSin,v[moutr]*a[c20o
utr]*cos(phi[outru2])=c20outrCos,w[moutr]*a[c30outr]*sin(phi[outru3])=c30outrSin,w[moutr]*a[c
30outr]*cos(phi[outru3])=c30outrCos,u[moutr]*a[o10outr]=o10outr,v[moutr]*a[o20outr]=o20outr,

```

$w[moutr]*a[o30outr]=o30outr, \text{expand}(v[moutr]*(a[s20outr]*(1-\text{zeta}^2)*\cos(\theta+\phi)+a[c20outr]*(1-\text{zeta}^2)*\sin(\theta+\phi)+a[o20outr]*(1-\text{zeta}^2))*\sin(\tau+\phi[outru2]))):$

$u[inn20]:= \text{applyrule}([u[minn]*a[s10inn]*\sin(\phi[innu1])=s10inn\text{Sin}, u[minn]*a[s10inn]*\cos(\phi[innu1])=s10inn\text{Cos}, v[minn]*a[s20inn]*\sin(\phi[innu2])=s20inn\text{Sin}, v[minn]*a[s20inn]*\cos(\phi[innu2])=s20inn\text{Cos}, w[minn]*a[s30inn]*\sin(\phi[innu3])=s30inn\text{Sin}, w[minn]*a[s30inn]*\cos(\phi[innu3])=s30inn\text{Cos}, u[minn]*a[c10inn]*\sin(\phi[innu1])=c10inn\text{Sin}, u[minn]*a[c10inn]*\cos(\phi[innu1])=c10inn\text{Cos}, v[minn]*a[c20inn]*\sin(\phi[innu2])=c20inn\text{Sin}, v[minn]*a[c20inn]*\cos(\phi[innu2])=c20inn\text{Cos}, w[minn]*a[c30inn]*\sin(\phi[innu3])=c30inn\text{Sin}, w[minn]*a[c30inn]*\cos(\phi[innu3])=c30inn\text{Cos}, u[minn]*a[o10inn]=o10inn, v[minn]*a[o20inn]=o20inn, w[minn]*a[o30inn]=o30inn, \text{expand}(v[minn]*(a[s20inn]*(1-\text{zeta}^2)*\cos(\theta+\phi)+a[c20inn]*(1-\text{zeta}^2)*\sin(\theta+\phi)+a[o20inn]*(1-\text{zeta}^2))*\sin(\tau+\phi[innu2]))):$

$u[outr30]:= \text{applyrule}([u[moutr]*a[s10outr]*\sin(\phi[outru1])=s10outr\text{Sin}, u[moutr]*a[s10outr]*\cos(\phi[outru1])=s10outr\text{Cos}, v[moutr]*a[s20outr]*\sin(\phi[outru2])=s20outr\text{Sin}, v[moutr]*a[s20outr]*\cos(\phi[outru2])=s20outr\text{Cos}, w[moutr]*a[s30outr]*\sin(\phi[outru3])=s30outr\text{Sin}, w[moutr]*a[s30outr]*\cos(\phi[outru3])=s30outr\text{Cos}, u[moutr]*a[c10outr]*\sin(\phi[outru1])=c10outr\text{Sin}, u[moutr]*a[c10outr]*\cos(\phi[outru1])=c10outr\text{Cos}, v[moutr]*a[c20outr]*\sin(\phi[outru2])=c20outr\text{Sin}, v[moutr]*a[c20outr]*\cos(\phi[outru2])=c20outr\text{Cos}, w[moutr]*a[c30outr]*\sin(\phi[outru3])=c30outr\text{Sin}, w[moutr]*a[c30outr]*\cos(\phi[outru3])=c30outr\text{Cos}, u[moutr]*a[o10outr]=o10outr, v[moutr]*a[o20outr]=o20outr, w[moutr]*a[o30outr]=o30outr, \text{expand}(w[moutr]*(a[c30outr]*(1-\text{zeta}^2)^2*\cos(\theta+\phi)+a[s30outr]*(1-\text{zeta}^2)^2*\sin(\theta+\phi))*\sin(\tau+\phi[outru3])+w[moutr]*a[o30outr]*(1-\text{zeta}^2)^2)):$

$u[inn30]:= \text{applyrule}([u[minn]*a[s10inn]*\sin(\phi[innu1])=s10inn\text{Sin}, u[minn]*a[s10inn]*\cos(\phi[innu1])=s10inn\text{Cos}, v[minn]*a[s20inn]*\sin(\phi[innu2])=s20inn\text{Sin}, v[minn]*a[s20inn]*\cos(\phi[innu2])=s20inn\text{Cos}, w[minn]*a[s30inn]*\sin(\phi[innu3])=s30inn\text{Sin}, w[minn]*a[s30inn]*\cos(\phi[innu3])=s30inn\text{Cos}, u[minn]*a[c10inn]*\sin(\phi[innu1])=c10inn\text{Sin}, u[minn]*a[c10inn]*\cos(\phi[innu1])=c10inn\text{Cos}, v[minn]*a[c20inn]*\sin(\phi[innu2])=c20inn\text{Sin}, v[minn]*a[c20inn]*\cos(\phi[innu2])=c20inn\text{Cos}, w[minn]*a[c30inn]*\sin(\phi[innu3])=c30inn\text{Sin}, w[minn]*a[c30inn]*\cos(\phi[innu3])=c30inn\text{Cos}, u[minn]*a[o10inn]=o10inn, v[minn]*a[o20inn]=o20inn, w[minn]*a[o30inn]=o30inn, \text{expand}(w[minn]*(a[c30inn]*(1-\text{zeta}^2)^2*\cos(\theta+\phi)+a[s30inn]*(1-\text{zeta}^2)^2*\sin(\theta+\phi))*\sin(\tau+\phi[innu3])+w[minn]*a[o30inn]*(1-\text{zeta}^2)^2)):$

$U[outr10] := u[outr10]/u[moutr]:$

$U[inn10] := u[inn10]/u[minn]:$

$U[outr20] := u[outr20]/v[moutr]:$

$U[inn20] := u[inn20]/v[minn]:$

$U[outr30] := u[outr30]/w[moutr]:$

$U[inn30] := u[inn30]/w[minn]:$

$o20outr := 0:$

$o20inn := 0:$

$u1[inn30]:= \text{applyrule}([1-2*\text{zeta}^2+\text{zeta}^4=\text{coeffzeta}], \text{collect}(\text{simplify}(\text{expand}(\text{applyrule}([\theta+\phi=\text{ThetaPhi}], \text{combine}(u[inn30], \text{trig})))), [s30inn\text{Sin}, \cos(\text{ThetaPhi}), \sin(\tau), \sin(\text{ThetaPhi}), \cos(\tau), c30inn\text{Sin}, c30inn\text{Cos}, s30inn\text{Cos}, o30inn], \text{distributed})):$

$u1[outr30]:= \text{applyrule}([1-2*\text{zeta}^2+\text{zeta}^4=\text{coeffzeta}], \text{collect}(\text{simplify}(\text{expand}(\text{applyrule}([\theta+\phi=\text{ThetaPhi}], \text{combine}(u[outr30], \text{trig})))), [s30outr\text{Sin}, \cos(\text{ThetaPhi}), \sin(\tau), \sin(\text{ThetaPhi}), \cos(\tau), c30outr\text{Sin}, c30outr\text{Cos}, s30outr\text{Cos}, o30outr], \text{distributed})):$

```
P0[open]:=sigma/e*int(sinh(sigma*(qwerty-zeta))*(12*v*(diff(u[outr30],tau)-
diff(u[inn30],tau))+2*epsilon^2*w*(diff(u[outr30],tau$2)-diff(u[inn30],tau$2))),zeta=-1..q)-
sigma/(2*e)*(cosh(sigma*zeta)/cosh(sigma)+sinh(sigma*zeta)/sinh(sigma))*int(sinh(sigma*(1-
zeta))*(12*v*(diff(u[outr30],tau)-diff(u[inn30],tau))+2*epsilon^2*w*(diff(u[outr30],tau$2)-
diff(u[inn30],tau$2))),zeta=-1..1):
```

```
P0[open]:=applyrule([qwerty=zeta,q=zeta],P0[open]):
P0[open]:=simplify(P0[open]):
```

```
P0:=P0[open]:
```

```
W[x1outr]:=-Ex*omega^2*sin(tau+phix0):
```

```
W[z1outr]:=-Ez*omega^2*sin(tau+phiz0):
```

```
W[x1inn]:=-Ex*omega^2*sin(tau+phix0):
```

```
W[z1inn]:=-Ez*omega^2*sin(tau+phiz0):
```

```
Proc_tau:=proc(EQ_local, multi_coeff,a_1,b_1)
```

```
local EQ_local_1, tmp1, tmp2, tmp3, tmp11, tmp21, tmp111, tmp211, tmp112, tmp212,tmp31:
EQ_local_1:=collect(expand(EQ_local),[cos(tau),sin(tau)],distributed):
```

```
tmp1:=coeff(EQ_local_1,sin(tau)):
tmp2:=coeff(EQ_local_1,cos(tau)):
tmp3:=(EQ_local_1-tmp1*sin(tau)-tmp2*cos(tau)):
tmp1:=expand(applyrule([theta+phi=ThetaPhi,-theta-phi=-ThetaPhi],combine(tmp1,trig))):
tmp2:=expand(applyrule([theta+phi=ThetaPhi,-theta-phi=-ThetaPhi],combine(tmp2,trig))):
tmp11:=convert(int(multi_coeff*tmp1,zeta=a_1..b_1),trig):
tmp21:=convert(int(multi_coeff*tmp2,zeta=a_1..b_1),trig):
tmp31:=convert(int(multi_coeff*tmp3,zeta=a_1..b_1),trig):
tmp111:=coeff(tmp11,sin(ThetaPhi)):
tmp112:=coeff(tmp11,cos(ThetaPhi)):
tmp211:=coeff(tmp21,sin(ThetaPhi)):
tmp212:=coeff(tmp21,cos(ThetaPhi)):
RETURN(tmp111,tmp112, tmp211, tmp212, tmp31):
end:
with(Threads);
```

Внешняя оболочка

```
EQOutr1:=1/((RR[outr])^2*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr)*rho0[outr]*h0[outr]*((2*RR[outr]/12
)^2*u[moutr]*diff(U[outr10],zeta$2)+(1-mu0[outr])/2*u[moutr]*diff(U[outr10],theta$2)-
(1+mu0[outr])/2*(2*RR[outr]/12)*v[moutr]*diff(diff(U[outr20],theta),zeta)-
(2*RR[outr]/12)*mu0[outr]*w[moutr]*diff(U[outr30],zeta))-
rho0[outr]*h0[outr]*u[moutr]*diff(U[outr10],tau$2):
EQOutr2:=1/((RR[outr])^2*omega^2*SonicSpeedMSqrOutr)*rho0[outr]*h0[outr]*(-
(1+mu0[outr])/2*2*RR[outr]/12*u[moutr]*diff(diff(U[outr10],theta),zeta)+(1-
mu0[outr])/2*(2*RR[outr]/12)^2*v[moutr]*diff(U[outr20],`$(zeta,2))+v[moutr]*diff(U[outr20],`$
(theta,2)))+(a0[outr])^2*v[moutr]*(2*(1-
mu0[outr])*(2*RR[outr]/12)^2*diff(U[outr20],`$(zeta,2))+diff(U[outr20],`$(theta,2)))+w[moutr]*
diff(U[outr30],theta)-(a0[outr])^2*w[moutr]*((2-
mu0[outr])*(2*RR[outr]/12)^2*diff(diff(U[outr30],`$(zeta,2)),theta)+diff(U[outr30],`$(theta,3))))-
rho0[outr]*h0[outr]*v[moutr]*diff(U[outr20],tau$2)-
(rho0[outr]*h0[outr]*(W[x1outr]/omega^2*cos(theta+phi)-W[z1outr]/omega^2*sin(theta+phi))):
EQOutr3:=1/(SonicSpeedMSqrOutr*(RR[outr])^2*omega^2)*rho0[outr]*h0[outr]*(-
mu0[outr]*2*RR[outr]/12*u[moutr]*diff(U[outr10],zeta)+v[moutr]*diff(U[outr20],theta)-
(a0[outr])^2*v[moutr]*((2-
```

$$\begin{aligned} & \mu_0[\text{outr}])*(2*RR[\text{outr}]/l_2)^2*\text{diff}(\text{diff}(U[\text{outr}20], \text{'\$(zeta,2)}), \text{theta}) + \text{diff}(U[\text{outr}20], \text{'\$(theta,3)})) + \\ & w[\text{moutr}]*U[\text{outr}30] + (a_0[\text{outr}])^2*w[\text{moutr}]*((2*RR[\text{outr}]/l_2)^4*\text{diff}(U[\text{outr}30], \text{zeta\$4}) + 2*(2*RR[\text{outr}]/l_2)^2*\text{diff}(\text{diff}(U[\text{outr}30], \text{zeta\$2}), \text{theta\$2}) + \text{diff}(U[\text{outr}30], \text{theta\$4}))) + \rho_0[\text{outr}]*h_0[\text{outr}]*w[\text{moutr}]*\text{diff}(U[\text{outr}30], \text{tau\$2}) - \\ & (\rho_0*RR[2] + \rho_0[\text{outr}]*h_0[\text{outr}])*(W[x1\text{outr}]/\omega^2*\sin(\text{theta} + \text{phi}) + W[z1\text{outr}]/\omega^2*\cos(\text{theta} + \text{phi})) + \rho_0*RR[2]/(\psi*Renolds)*e*(\psi*Renolds/(\rho_0*RR[2]*e*\omega^2)*p[0] + P_0)): \end{aligned}$$

Внутренняя оболочка

$$\begin{aligned} \text{EQInn1} &:= 1/((RR[\text{inn}])^2*\omega^2*\text{SonicSpeedMSqrInn}*\rho_0[\text{inn}]*h_0[\text{inn}]*((2*RR[\text{inn}]/l_2)^2*u[\text{minn}]*\text{diff}(U[\text{inn}10], \text{zeta\$2}) + (1-\mu_0[\text{inn}])/2*u[\text{minn}]*\text{diff}(U[\text{inn}10], \text{theta\$2}) - \\ & (1+\mu_0[\text{inn}])/2*(2*RR[\text{inn}]/l_2)*v[\text{minn}]*\text{diff}(\text{diff}(U[\text{inn}20], \text{theta}), \text{zeta}) - \\ & (2*RR[\text{inn}]/l_2)*\mu_0[\text{inn}]*w[\text{minn}]*\text{diff}(U[\text{inn}30], \text{zeta})) - \\ & \rho_0[\text{inn}]*h_0[\text{inn}]*u[\text{minn}]*\text{diff}(U[\text{inn}10], \text{tau\$2})): \\ \text{EQInn2} &:= 1/((RR[\text{inn}])^2*\omega^2*\text{SonicSpeedMSqrInn}*\rho_0[\text{inn}]*h_0[\text{inn}]*(- \\ & (1+\mu_0[\text{inn}])/2*2*RR[\text{inn}]/l_2*u[\text{minn}]*\text{diff}(\text{diff}(U[\text{inn}10], \text{theta}), \text{zeta}) + (1-\mu_0[\text{inn}])/2*(2*RR[\text{inn}]/l_2)^2*v[\text{minn}]*\text{diff}(U[\text{inn}20], \text{'\$(zeta,2)})) + v[\text{minn}]*\text{diff}(U[\text{inn}20], \text{'\$(theta,2)})) + (a_0[\text{inn}])^2*v[\text{minn}]* \\ & (2*(1-\mu_0[\text{inn}])*(2*RR[\text{inn}]/l_2)^2*\text{diff}(U[\text{inn}20], \text{'\$(zeta,2)})) + \text{diff}(U[\text{inn}20], \text{'\$(theta,2)})) + w[\text{minn}]*\text{diff}(U[\text{inn}30], \text{theta}) - \\ & (a_0[\text{inn}])^2*w[\text{minn}]*((2-\mu_0[\text{inn}])*(2*RR[\text{inn}]/l_2)^2*\text{diff}(\text{diff}(U[\text{inn}30], \text{'\$(zeta,2)}), \text{theta}) + \text{diff}(U[\text{inn}30], \text{'\$(theta,3)}))) - \\ & \rho_0[\text{inn}]*h_0[\text{inn}]*v[\text{minn}]*\text{diff}(U[\text{inn}20], \text{tau\$2}) - \\ & (\rho_0[\text{inn}]*h_0[\text{inn}])*(W[x1\text{inn}]/\omega^2*\cos(\text{theta} + \text{phi}) - W[z1\text{inn}]/\omega^2*\sin(\text{theta} + \text{phi}))) : \\ \text{EQInn3} &:= \rho_0[\text{inn}]*h_0[\text{inn}]*(-2*\mu_0[\text{inn}]*RR[\text{inn}]*u[\text{minn}]*(\text{diff}(U[\text{inn}10], \text{zeta}))/l_2 + v[\text{minn}]*(\text{diff}(U[\text{inn}20], \text{theta}) - a_0[\text{inn}])^2*v[\text{minn}]*((2-\mu_0[\text{inn}])*(2*RR[\text{inn}]/l_2)^2*(\text{diff}(\text{diff}(U[\text{inn}20], \text{'\$(zeta,2)}), \text{theta})) + \text{diff}(U[\text{inn}20], \text{'\$(theta,3)})) + w[\text{minn}]*U[\text{inn}30] + a_0[\text{inn}])^2*w[\text{minn}]*((2*RR[\text{inn}]/l_2)^4*(\text{diff}(U[\text{inn}30], \text{'\$(zeta,4)})) + 2*(2*RR[\text{inn}]/l_2)^2*(\text{diff}(\text{diff}(U[\text{inn}30], \text{'\$(zeta,2)}), \text{'\$(theta,2)})) + \text{diff}(U[\text{inn}30], \text{'\$(theta,4)})))/(\text{SonicSpeedMSqrInn}*RR[\text{inn}])^2*\omega^2) + \rho_0[\text{inn}]*h_0[\text{inn}]*w[\text{minn}]*(\text{diff}(U[\text{inn}30], \text{'\$(tau,2)})) - (\rho_0*RR[2] - h_0[\text{inn}]*\rho_0[\text{inn}])*(W[x1\text{inn}]*\sin(\text{theta} + \text{phi})/\omega^2 + W[z1\text{inn}]*\cos(\text{theta} + \text{phi})/\omega^2) + \rho_0*RR[2]*e*(\psi*Renolds)*p[0]/(\rho_0*RR[2]*e*\omega^2) + P_0)/(\psi*Renolds): \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{TRTR} &:= \text{Threads:-Task:-Start}(\text{passed}, \text{Task} = [\text{Proc_tau}(\text{EQOutr1}, \text{zeta}*(1-\text{zeta}^2), -1, 1)], \text{Task} = \\ & [\text{Proc_tau}(\text{EQOutr2}, (1-\text{zeta}^2), -1, 1)], \text{Task} = [\text{Proc_tau}(\text{EQOutr3}, (1-\text{zeta}^2)^2, -1, 1)], \text{Task} = \\ & [\text{Proc_tau}(\text{EQInn1}, \text{zeta}*(1-\text{zeta}^2), -1, 1)], \text{Task} = [\text{Proc_tau}(\text{EQInn2}, (1-\text{zeta}^2), -1, 1)], \text{Task} = \\ & [\text{Proc_tau}(\text{EQInn3}, (1-\text{zeta}^2)^2, -1, 1)]): \\ k &:= 1: \\ \text{for } i &\text{ from } 1 \text{ to } 6 \text{ do} \\ & \text{for } j \text{ from } 1 \text{ to } 5 \text{ do} \\ & \text{ttmp} := \text{op}(2, \text{op}(i, \text{TRTR}))[j]; \\ & \text{if } \text{ttmp} < 0 \\ & \text{then } A[k] := \text{collect}(\text{ttmp}, [s10\text{outrCos}, s10\text{outrSin}, c10\text{outrCos}, c10\text{outrSin}, s20\text{outrSin}, \\ & s20\text{outrCos}, c20\text{outrSin}, c20\text{outrCos}, s30\text{outrSin}, s30\text{outrCos}, c30\text{outrSin}, s10\text{innSin}, s10\text{innCos}, \\ & c10\text{innSin}, c10\text{innCos}, s20\text{innSin}, s20\text{innCos}, c20\text{innSin}, c20\text{innCos}, s30\text{innSin}, s30\text{innCos}, \\ & c30\text{innSin}, c30\text{innCos}, c30\text{outrCos}, o10\text{outr}, o30\text{outr}, o10\text{inn}, o30\text{inn}], \text{distributed}): \\ & k := k + 1: \\ \text{fi:} \\ \text{od:} \\ \text{od:} \end{aligned}$$

```

FD := [s10outrCos, c10outrCos, s10outrSin, c10outrSin, o30outr, c20outrCos, s20outrCos,
c20outrSin, s20outrSin, s30outrCos, c30outrSin, s30outrSin, c30outrCos, o10outr, s10innCos,
c10innCos, s10innSin, c10innSin, o30inn, c20innCos, s20innCos, c20innSin, s20innSin,
s30innSin, c30innSin, s30innCos, c30innCos, o10inn]:
nn:=nops(FD):
nn1:=k-1:
ca:= Matrix(k-1,nn):
cb:= Vector(k-1):
n_ca:= Matrix(k-1,nn+1):
for i from 1 to k-1 do
for j from 1 to nn do
ca[i,j]:=coeff(A[i],FD[j]):
n_ca[i,j]:=coeff(A[i],FD[j]):
if ca[i,j]=0 then cca[i,j][i]:=0: fi:
od:
cb[i]:=subs([s10innSin=0, s10innCos=0, c10innSin=0, c10innCos=0, s20innSin=0, s20innCos=0,
c20innSin=0, c20innCos=0, s30innSin=0, s30innCos=0, c30innSin=0, c30innCos=0, s10outrSin=0,
s10outrCos=0, c10outrSin=0, c10outrCos=0, s20outrSin=0, s20outrCos=0, c20outrSin=0,
c20outrCos=0, s30outrSin=0, s30outrCos=0, c30outrSin=0, c30outrCos=0, o10outr=0, o30outr=0,
o10inn=0, o30inn=0],A[i]):
if cb[i]=0 then ccb[i]:=0: fi:

n_ca[i,nn+1]:=cb[i]:

od:

gauss_fisrt := proc (ii, nnn)
local j, r; for j from ii+1 to nnn do
for r from ii+1 to nnn do
ca[j, r] := ca[j, r]-ca[ii, r]*ca[j, ii]/ca[ii, ii]:
end do;
cb[j] := cb[j]-cb[ii]*ca[j, ii]/ca[ii, ii]:
end do:
end proc:

for i from 0 to 3 do
TRTR1[i] := Threads:-Task:-Start(passed, Task = [gauss_fisrt(7*i+1,nn1)], Task =
[gauss_fisrt(7*i+2,nn1)], Task = [gauss_fisrt(7*i+3,nn1)], Task = [gauss_fisrt(7*i+4,nn1)], Task =
[gauss_fisrt(7*i+5,nn1)], Task = [gauss_fisrt(7*i+6,nn1)], Task = [gauss_fisrt(7*i+7,nn1)]):
end do:

for i from nn1 by -1 to 1 do
s := 0;
for j from i+1 to nn1 do
s := ca[i, j]*x[j]+s;
end do;
x[i] := (cb[i]-s)/ca[i,i];
end do:

for i from 0 to 3 do TRTR4[i] := Threads:-Task:-Start(passed, Task = [simplify(expand(x[7*i+1]))],
Task = [simplify(expand(x[7*i+2]))], Task = [simplify(expand(x[7*i+3]))], Task =

```

```
[simplify(expand(x[7*i+4]))], Task = [simplify(expand(x[7*i+5]))], Task =
[simplify(expand(x[7*i+6]))], Task = [simplify(expand(x[7*i+7]))]; simplify(expand(x[i])) end do;
for i to nn1 do FD[i] := x[i] end do;
```

```
u1[outr30]:=collect(simplify(expand(applyrule([phix0-tau=-Minusx,-
phix0+tau=Minusx,phix0+tau=Plusx,-phix0-tau=-Plusx,phiz0-tau=-Minusx,-
phiz0+tau=Minusx,phiz0+tau=Plusx,-phiz0-tau=-
Plusx],combine(simplify(u1[outr30]),trig))),[sin(Plusx),cos(Plusx),sin(Minusx),cos(Minusx),sin(Plu
sz),cos(Plusx),sin(Minusx),cos(Minusx),sin(ThetaPhi),cos(ThetaPhi),Ex,Ez],distributed);
nops(u1[outr30]);
u1[inn30]:=collect(simplify(expand(applyrule([phix0-tau=-Minusx,-
phix0+tau=Minusx,phix0+tau=Plusx,-phix0-tau=-Plusx,phiz0-tau=-Minusx,-
phiz0+tau=Minusx,phiz0+tau=Plusx,-phiz0-tau=-
Plusx],combine(simplify(u1[inn30]),trig))),[sin(Plusx),cos(Plusx),sin(Minusx),cos(Minusx),sin(Plu
sz),cos(Plusx),sin(Minusx),cos(Minusx),sin(ThetaPhi),cos(ThetaPhi),Ex,Ez],distributed);
```

```
aaa1:=collect(factor(expand(eval(subs(Ez=0,combine(simplify(u1[inn30]),trig))))/(coeffzeta*omeg
a^2*Ex*sin(ThetaPhi)),[sin(Plusx),cos(Plusx)],distributed):
```

```
aaa3:=collect(factor(expand(eval(subs(Ez=0,combine(simplify(u1[outr30]),trig))))/(coeffzeta*ome
ga^2*Ex*sin(ThetaPhi)),[sin(Plusx),cos(Plusx)],distributed):
```

```
FCH1[outr]:=simplify(factor(coeff(aaa3,cos(Plusx)))/factor(coeff(aaa3,sin(Plusx))));
```

```
FCH1[inn]:=simplify(factor(coeff(aaa1,cos(Plusx)))/factor(coeff(aaa1,sin(Plusx))));
```

```
ACH1[outr]:=simplify((coeff(aaa3,sin(Plusx)))^2+(coeff(aaa3,cos(Plusx)))^2);
```

```
ACH1[inn]:=simplify((coeff(aaa1,sin(Plusx)))^2+(coeff(aaa1,cos(Plusx)))^2);
```

```
currentdir('h:\\small\\test');
```

```
InputFile:=open('InputData.dat',READ):
```

```
OutputFile:=open('OutputData.dat',WRITE):
```

```
DataPMA:=readdata(InputFile,float,5):
```

```
nnn:=nops(DataPMA)/6:
```

```
for i from 1 to nnn do
```

```
NumberVariant:=DataPMA[1+(i-1)*6][1]:
```

```
RR[2] :=DataPMA[2+(i-1)*6][1]:
```

```
l2 :=DataPMA[2+(i-1)*6][2]:
```

```
delta :=DataPMA[2+(i-1)*6][3]:
```

```
rho :=DataPMA[2+(i-1)*6][4]:
```

```
nu :=DataPMA[3+(i-1)*6][1]:
```

```
RR1 :=DataPMA[3+(i-1)*6][2]:
```

```
h0[outr] :=DataPMA[4+(i-1)*6][1]:
```

```
E[outr] :=DataPMA[4+(i-1)*6][2]:
```

```
mu0[outr] :=DataPMA[4+(i-1)*6][3]:
```

```
rho0[outr] :=DataPMA[4+(i-1)*6][4]:
```

```
h0[inn] :=DataPMA[5+(i-1)*6][1]:
```

```
E[inn] :=DataPMA[5+(i-1)*6][2]:
```

```
mu0[inn] :=DataPMA[5+(i-1)*6][3]:
```

```
rho0[inn] :=DataPMA[5+(i-1)*6][4]:
```

```
LowBound :=DataPMA[6+(i-1)*6][1]:
```

```
HighBound :=DataPMA[6+(i-1)*6][2]:
```

```
NumberSteps:=DataPMA[6+(i-1)*6][3]:
```

```
step:=(HighBound-LowBound)/NumberSteps:
```

```
g:=9.81:
```

```

sigma:=l2/(2*RR[2]):
psi:=delta/RR[2]:
Renolds:=delta^2*omega/nu:
epsilon:=sqrt(Renolds/2):

a0[outr]:=sqrt(h0[outr]^2/(12*RR[outr]^2));
a0[inn]:=sqrt(h0[inn]^2/(12*RR[inn]^2));

RR[outr]:=RR1+h0[outr]/2;
RR[inn]:=RR[2]-h0[inn]/2;

SonicSpeedMSqrOutr:=(rho0[outr]*(1-mu0[outr]^2))/E[outr];
SonicSpeedMSqrInn:=(rho0[inn]*(1-mu0[inn]^2))/E[inn];

c1:=-sinh(epsilon)/(cos(epsilon)+cosh(epsilon)):
c2:= sin(epsilon)/(cos(epsilon)+cosh(epsilon)):
d:=simplify(expand(1+(c1-c2)/epsilon)):
f:=simplify(expand(1/epsilon*(c1+c2))):
w:=d/(d^2+f^2):
v:=-epsilon^2/6*f/(d^2+f^2):

v2:=epsilon*(cos(epsilon)*sin(epsilon)+cosh(epsilon)*sinh(epsilon))/((sin(epsilon))^2+(sinh(epsilon))^2):
w2:=1/epsilon*(cosh(epsilon)*sinh(epsilon)-cos(epsilon)*sin(epsilon))/((sin(epsilon))^2+(sinh(epsilon))^2):

v1:=epsilon*(cosh(epsilon)*sin(epsilon)+cos(epsilon)*sinh(epsilon))/((sin(epsilon))^2+(sinh(epsilon))^2):
w1:=1/epsilon*(cosh(epsilon)*sin(epsilon)-cos(epsilon)*sinh(epsilon))/((sin(epsilon))^2+(sinh(epsilon))^2):
v12:=v1-v2:
w12:=w1+w2:
wMinus1:=w-1:
ve:=v1*v+1/6*epsilon^4*w1*(w-1):
fprintf(OutputFile,"          Variant %-1.0f \n\n",NumberVariant );
if TypeCurrent=1
then fprintf(OutputFile," Free current of a liquid in end faces.\n"):
else if TypeCurrent=2
then fprintf(OutputFile," The closed end faces.\n"):
fi:
fi:

fprintf(OutputFile,"\n\nR2=%+7.6e l2=%+7.6e delta=%+7.6e rho=%+7.6e
\n\n",RR[2],l2,delta,rho);
fprintf(OutputFile," nu=%+7.6e \n\n",nu);
fprintf(OutputFile,"h0[outr]=%+7.6e E[outr]=%+7.6e mu0[outr]=%+7.6e rho0[outr]=%+7.6e
\n\n",h0[outr],E[outr],mu0[outr],rho0[outr]);
fprintf(OutputFile,"h0[inn]=%+7.6e E[inn]=%+7.6e mu0[inn]=%+7.6e rho0[inn]=%+7.6e
\n\n",h0[inn],E[inn],mu0[inn],rho0[inn]);

```

```
fprintf(OutputFile,"LowBound=%+7.6e HighBound=%+7.6e NumberSteps=%+7.6e
\n\n",LowBound,HighBound,NumberSteps);
```

```
fprintf(OutputFile,"*   omega   *   ACH[inn]   *   ACH[outr]   *   \n");
```

```
fprintf(OutputFile,"*****
*\n");
```

```
RezDat:=RevoltingMoment(aomega,TypeCurrent):
GrantOmega:=solve(RezDat[3]=4,aomega):
aRenolds:=delta^2*aomega/nu:
aepsilon:=sqrt(aRenolds/2):
eee[1][1]:=simplify(diff(simplify(subs(vvv=1,subs(www=1.2,RezDat[1])),aomega)):
eee[2][1]:=simplify(diff(simplify(subs({ www=1.2,vvv=1 },RezDat[2])),aomega)):
eee[1][2]:=simplify(diff(simplify(subs({ www=1,vvv=aepsilon/6 },RezDat[1])),aomega)):
eee[2][2]:=simplify(diff(simplify(subs({ www=1,vvv=aepsilon/6 },RezDat[2])),aomega)):
```

```
tmp[1][1]:=solve(numer(simplify(expand(eee[1][1])),aomega):
print(1);
tmp[2][1]:=solve(numer(simplify(expand(eee[2][1])),aomega):
print(2);
tmp[1][2]:=solve(numer(simplify(expand(eee[1][2])),aomega):
print(3);
tmp[2][2]:=solve(numer(simplify(expand(eee[2][2])),aomega):
print(4);
```

```
for j1 from 1 to 2 do
kk:=1:
for j2 from 1 to 2 do
for i from 1 to nops([tmp[j1][j2]]) do
if (whattype(tmp[j1][j2][i])='float') and (tmp[j1][j2][i]0)
then
if (tmp[j1][j2][i]<GrantOmega) and (j2=1)
then
RootN[j1][kk]:=tmp[j1][j2][i]:
kk:=kk+1:
else
if (tmp[j1][j2][i]>GrantOmega) and (j2=2)
then
RootN[j1][kk]:=tmp[j1][j2][i]:
kk:=kk+1:
fi:
fi:
fi:
od:
od:
od:
```

```
for j1 from 1 to 2 do
kk:=1:
```

```

kk1:=1:
for i from 1 to nops(op(op([eval(RootN[j1]))])) do
if RootN[j1][i]<GrantOmega
then Teee:=eee[j1][1]:
else Teee:=eee[j1][2]:
fi:
if eval(subs(aomega=RootN[j1][i],diff(Teee,aomega)))<0
then
MaxRoot[j1][kk]:=RootN[j1][i]:
kk:=kk+1:
fi:

if (eval(subs(aomega=RootN[j1][i],diff(Teee,aomega)))<0) or
(eval(subs(aomega=RootN[j1][i],diff(Teee,aomega)))0)
then
MaxRoot1[j1][kk1]:=RootN[j1][i]:
kk1:=kk1+1:
fi:

od;
od:

fprintf(OutputFile," max \n");

for j1 from 1 to 2 do
if j1=1 then fprintf(OutputFile," \n\n A[inn] \n"); Tee:=RezDat[1]: fi:
if j1=2 then fprintf(OutputFile," \n\n A[outr] \n"); Tee:=RezDat[2]: fi:
for i from 1 to nops(op(op([eval(MaxRoot[j1]))])) do
if MaxRoot[j1][i]<GrantOmega
then Teee:=subs({www=1.2,vvv=1},Tee):
else Teee:=subs({www=1,vvv=aepsilon/6},Tee):
fi:
fprintf(OutputFile," %+7.6e %+7.6e %+7.6e \n",
MaxRoot[j1][i],eval(subs(aomega=MaxRoot[j1][i],Tee)),eval(subs(aomega=MaxRoot[j1][i],Tee)
)/eval(subs(aomega=1,Tee)));
od:
od:

fprintf(OutputFile,"\n\n maxmin \n");

for j1 from 1 to 2 do
if j1=1 then fprintf(OutputFile," \n\n A[inn] \n"); Tee:=RezDat[1]: fi:
if j1=2 then fprintf(OutputFile," \n\n A[outr] \n"); Tee:=RezDat[2]: fi:
for i from 1 to nops(op(op([eval(MaxRoot1[j1]))])) do
if MaxRoot1[j1][i]<GrantOmega
then Teee:=subs({www=1.2,vvv=1},Tee):
else Teee:=subs({www=1,vvv=aepsilon/6},Tee):
fi:

```

```

    fprintf(OutputFile," %+7.6e  %+7.6e  %+7.6e  \n",
MaxRoot1[j1][i],eval(subs(aomega=MaxRoot1[j1][i],Teee)),eval(subs(aomega=MaxRoot1[j1][i],T
eee))/eval(subs(aomega=0.000001,Teee)));
    od:
    od:

fprintf(OutputFile,"*****
*\n\n\n"):
    od;
    close(OutputFile):
    close(InputFile):

end:

```