МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

**Крунодальные циркулярные кубики на плоскости Минковского**

название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента(ки) 4 курса 4011 группы
направления (специальности) 03.03.01 Прикладные математика и физика
код и наименование направления (специальности)
Институт Физики
наименование факультета, института, колледжа
Монэн Шапо Бланшар
фамилия, имя, отчество

| | | |
|---|---|---|
| Научный руководитель<br>к.ф.-м.н. доцент<br>должность, уч. степень, уч. звание | 02.06.22<br>дата, подпись | Л.Н.Ромакина<br>инициалы, фамилия |
| Заведующий кафедрой<br>д.ф.-м. доцент<br>должность, уч. степень, уч. звание | 02.06.22<br>дата, подпись | Е.Н.Бегинин<br>инициалы, фамилия |

Саратов 2022 г

# ВВЕДЕНИЕ

**1. Актуальность темы исследования**. Понятие псевдоевклидова пространства, называемого также пространством-временем, было введено в работе [1] (см. также [2]) немецким математиком Германом Минковским в 1908 для геометрической интерпретации специальной теории относительности, обобщающей принцип относительности Галилея ньютоновской механики на случай скоростей, не малых по сравнению со скоростью света. На современном этапе для обозначения псевдоевклидова пространства используется также термин "пространство Минковского". Принцип относительности Галилея, утверждающий независимость законов механики от выбора той или иной инерциальной системы отсчёта, основан на представлении об абсолютном времени, которое течёт одинаково во всех таких системах. Уравнения классической электродинамики, называемые уравнениями Максвелла, и релятивистской механики не инвариантны относительно преобразований Галилея, но инвариантны относительно преобразований Лоренца, которые совпадают с преобразованиями Галилея при скоростях, малых по сравнению со скоростью света. В отличие от преобразований Галилея, преобразования Лоренца включают также преобразование времени, поэтому их можно интерпретировать как преобразования перехода от одной инерциальной системы отсчёта к другой, именно это и предлагается в специальной теории относительности. Применение такой математической модели позволяет исследовать процессы, при которых время течет неодинаково в различных инерциальных системах отсчета.

В настоящее время кроме псевдоевклидовой геометрии, или геометрии пространства Минковского, активно развиваются и другие неевклидовы системы, образуя набор языков для описания процессов и явлений окружающего физического пространства, набор средств моделирования таких процессов и явлений.

Одним из направлений в формировании как евклидовой, так и неевклидовых геометрий, является теория кривых. Широкое применение кривых в технике и архитектуре повлияло на подходы к исследованию кривых. Особое внимание в этом направлении уделено задачам построения кривых. В них были реализованы различные идеи. Например, решая ставшие теперь классическими задачи удвоения куба, квадратуры круга и деления угла на три равные части, греческие математики применили идею движения к построению замечательных кривых на евклидовой плоскости. На этом этапе были даны первые конструктивные определения кривых и исследованы основные геометрические и механические свойства некоторых замечательных кривых [3, 4]. Переход на принципиально новый уровень в развитии теории кривых был обеспечен появлением аналитических методов исследования, основанных на трудах Р. Декарта. Именно на этом этапе начинается формирование общей теории кривых.

Отмеченные факты подтверждают актуальность изучения геометрии Минковского, в частности, исследование крунодальных циркулярных кубик, в рамках обучения по направлению "Прикладная физика и математика".

**2. Основной целью работы** является изучение основ геометрии Минковского, основ теории кубических кривых, самостоятельное исследование крунодальных циркулярных кубик с бесконечно удаленной точкой перегиба. Для достижения данной цели были сформулированы и решены следующие задачи.

1. Ознакомление с аксиоматическим подходом к введению различных геометрических систем на основе аксиоматик Д. Вейля и Д. Гильберта по источникам

2. Ознакомление с основными фактами геометрии псевдоевклидовой плоскости и псевдоевклидова пространства, изложенными в векторной аксиоматике Вейля и проективными средствами по источникам.

3. Ознакомление с основами теории кубических кривых, способами

определения и аналитического задания кубической кривой с узловой точкой в проективных координатах по источникам .

4. Самостоятельный вывод аналитического задания циркулярной кривой псевдоевклидовой плоскости в проективных и аффинных координатах.

5. Самостоятельный вывод уравнения циркулярной кубики с конечной узловой точкой и нециклической точкой перегиба на абсолюте плоскости Минковского.

**3. Краткая характеристика и содержание работы.** Работа состоит из введения, трех разделов, списка использованных источников, содержащего 17 наименований, и заключения. Во введении работы обоснована актуальность темы, определены цели и задачи работы, указаны основные используемые методы, кратко описано содержание работы. Объем работы составляет 39 страниц.

Первый раздел работы посвящен аксиоматическому методу. В нем представлены системы аксиом евклидова и псевдоевклидова пространств, построенные на основе векторной аксиоматики Г. Вейля; введены используемые в дальнейшем определения; изложены основные факты геометрии псевдоевклидовой плоскости; рассмотрены плоскости и сферы трехмерного пространства Минковского. Показано, что в зависимости от типа радиуса сфера пространства Минковского может быть отнесена к одному из трех типов.

Во втором разделе описаны основы теории кубических кривых. Подробно обоснован способ задания кубической кривой с узловой точкой в проективных координатах.

Третий раздел посвящен крунодальным циркулярным кубикам на плоскости Минковского. Получено аналитическое задание циркулярной кривой псевдоевклидовой плоскости в проективных и аффинных координатах и уравнение циркулярной кубики с конечной узловой точкой и нециклической точкой перегиба на абсолюте плоскости Минковского.

**4. Методика исследования.** Основным методом в самостоятельном исследовании крунодальных циркулярных кубик является метод проективных координат.

Изложение основ геометрии псевдоевклидовых пространств проведено на основе точечно-векторной аксиоматики Г. Вейля.

# 1 Основы геометрии Минковского

Прежде чем познакомиться с векторной аксиоматикой пространства Минковского, приведем векторную аксиоматику евклидова пространства, придерживаясь последовательности изложения рассматриваемых вопросов в работах [12, 13]. Векторная аксиоматика евклидова пространства была предложена немецким математиком Германом Вейлем [3]. Основными (или неопределяемыми) объектами в аксиоматике Вейля являются точка и вектор, а основными отношениями (или операциями) сложение векторов, умножение вектора на число, откладывание вектора от точки, скалярное перемножение векторов. Свойства каждого из этих отношений описаны в аксиомах. Все аксиомы евклидовой планиметрии заключены в пяти следующих группах.

Условимся рассматривать три различных множества: множество R вещественных чисел, множество E элементов произвольной природы, называемых точками, множество V элементов произвольной природы, называемых векторами.

### 1.1.1 Группа 1. Аксиомы сложения векторов

Основная операция — сложение векторов. Определим её.

Пусть $\vec{a}$и$\vec{b}$ — произвольные элементы множества V, то есть любые два вектора. Суммой векторов $\vec{a}$и$\vec{b}$ назовем новый вектор $\vec{a}+\vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям, или аксиомам.

**Аксиома I$_1$**. Для любых двух векторов $\vec{a}$и$\vec{b}$ справедливо равенство

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}. \tag{1.1}$$

**Аксиома I$_2$.** Для любых трех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ справедливо равенство

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right). \tag{1.2}$$

**Аксиома I₃**. Существует такой вектор $\vec{0}$, что для любого вектора $\vec{a}$ выполняется равенство

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

Вектор $\vec{0}$ назовем *нулевым* вектором, или *нуль-вектором*. Его единственность может быть доказана, т.е. свойство единственности нулевого вектора, в отличие от его существования, не постулируется в аксиомах.

### 1.1.2 Группа 2. Аксиомы умножения вектора на действительное число

Основное отношение в данной группе аксиом — умножение вектора на число задано на множествах $R$ и $V$. Каждому вектору $\vec{a}$ и каждому действительному число $\alpha$ поставим в соответствие новый вектор $\alpha\vec{a}$, который назовем *произведением* вектора $\vec{a}$ на число $\alpha$, таким образом, чтобы выполнялись следующие свойства.

**Аксиома II₁**. Для любого вектора $\vec{a}$ и любых действительных чисел $\alpha$и$\beta$ выполняется равенство

$$\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}. \tag{1.3}$$

**Аксиома II₂**. Для любого вектора $\vec{a}$ и любых двух действительных чисел $\alpha$и$\beta$ справедливо равенство

$$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}. \tag{1.4}$$

**Аксиома II₂**. Для любого вектора $\vec{a}$ и любых двух действительных чисел $\alpha$и$\beta$ справедливо равенство

$$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}. \tag{1.4}$$

.

### 1.1.3 Группа 3. Аксиомы размерности

Систему векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ назовем *линейно зависимой*, если существует такие одновременно не равные нулю числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, при которых выполняется равенство

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}. \qquad (1.7)$$

Если равенство (1.7) выполняется только при нулевых значениях чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то систему векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ назовем *линейно независимой*.

## 1.2 Основные объекты пространства Минковского

Сферой псевдоевклидова пространства называется множество точек этого пространства, удаленных от данной точки на данное расстояние. Выберем в пространстве ортонормированную систему координат с началом в точке *O*. Сфера с центром *O* радиуса *r* имеет уравнение:

$$x^2 + y^2 - z^2 = r^2. \qquad (1.15)$$

Возможны следующие три случая.

1. Если $r$ — ненулевое действительное число, то сфера (1.15) в евклидовом пространстве может быть изображена однополостным гиперболоидом вращения с осью $Oz$ (Рисунок 5, a).

2. При $r = \rho i$ уравнение сферы принимает вид: $x^2 + y^2 - z^2 = -\rho^2$. Значит, изображением сферы мнимого радиуса будет двуполостный гиперболоид вращения с осью *Oz*, на рисунке 5, b он изображен вместе со своим асимптотическим конусом

a b

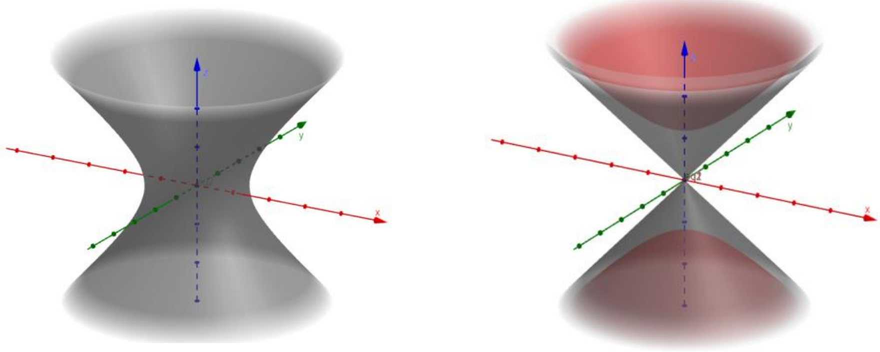


Рисунок 5 – Изображения сфер псевдоевклидова пространства вещественного (a), мнимого и нулевого (b) радиуса в евклидовом пространстве.

3. При $r = 0$ получаем световой конус с уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Таким образом, сфера нулевого радиуса может быть изображена в евклидовом пространстве круговым конусом (см. Рисунок 4 и Рисунок 5, b).

## 2 Общее задание кубической кривой. Классификация Ньютона

Общее уравнение алгебраической кривой третьего прядка в аффинных координатах можно записать в виде:

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 + 3Hx + 3Iy + J = 0, \qquad (2.1)$$

где коэффициенты $A, B, C, D$ не равны нулю одновременно.

Переходя в уравнении (2.1) к проективным однородным координатам по формулам

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3}, \qquad (2.2)$$

получим уравнение кубической кривой в проективных координатах

$$Ax_1^3 + 3Bx_1^2x_2 + 3Cx_1x_2^2 + Dx_2^3 + 3Ex_1^2x_3 + 6Fx_1x_2x_2$$
$$+3Gx_2^2x_3 + 3Hx_1x_3^2 + 3Ix_2x_3^2 + Jx_3^3 = 0. \qquad (2.3)$$

## 2.2 Аналитическое задание крунодальной кубической кривой

Точку самопересечения кривой называют *узловой точкой* или *узлом*. Кубическую кривую с узловой точкой называют *самопересекающейся* или *крунодальной* (от англ. *node* – узел).

**Теорема 5.** *Существует двухпараметрическое семейство проективных реперов проективной плоскости $P_2$, в каждом из которых уравнение крунодальной кубики можно записать в виде*

$$k^2x_1^3 + 2vk(p-q)x_1^2x_2 + (1+2vq)x_1x_2^2 + vk^2x_1^2x_3 - vx_2^2x_3 = 0, \tag{2.4}$$

*где действительные числа* $k, v, p$ *и* $q$ *удовлетворяют условиям:*

$$k \neq 0,\ v \neq 0,\ vp + 1 \neq 0,\ 2vq - vp + 1 \neq 0.$$

**Пример 1**. Прямая строфоида. В этой системе прямая строфоида σ может быть задана уравнение: $x^3 + xy^2 + ax^2 - ay^2 = 0, a \in R_+.$

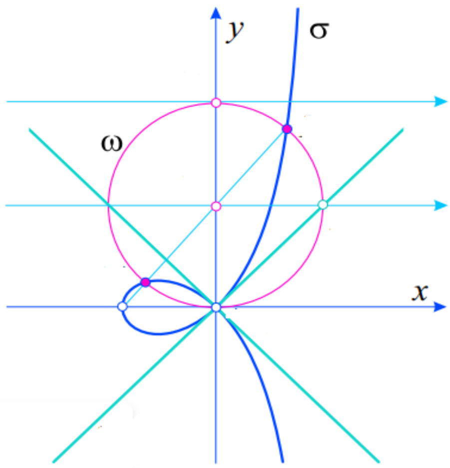



Рисунок 6 – Построение прямой строфоиды

**Пример 2**. Декартов лист.

Декартов лист в системе координат *Oxy*, введенной в предыдущем примере, можно задать следующим уравнением

$$x^3 + 3xy^2 + cx^2 - ay^2 = 0.$$

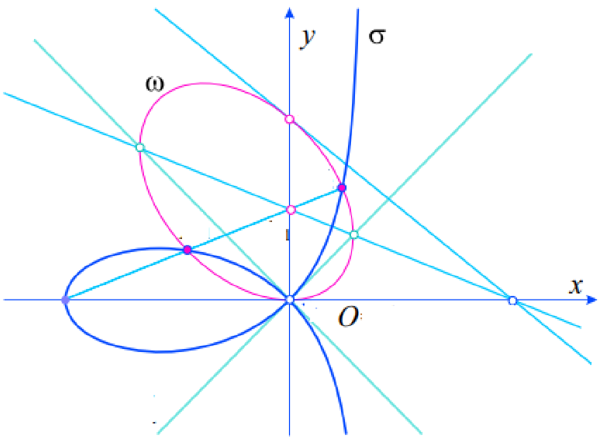



Рисунок 7 – Построение листа Декарта

## 2.1 Циклические точки псевдоевклидовой плоскости

Рассмотрим некоторую окружность $\omega(S(a;b),r)$ с центром в точке $S(a;b)$ радиуса $r$ на евклидовой плоскости. В декартовой системе координат ее уравнение можно задать в виде

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{3.1}$$

Перейдем от декартовых координат $x$, $y$ к проективным координатам $x_1, x_2, x_3$ по следующим формулам:

$$x=\frac{x_1}{x_3}, \quad y=\frac{x_2}{x_3}\,. \tag{3.2}$$

Тогда уравнение (3.1) окружности примет вид

$$(x_1-ax_3)^2+(x_2-bx_3)^2=r^2x_3^2. \tag{3.3}$$

Найдем точки $J_1$. $J_2$ пересечения окружности $\omega$, заданной уравнением (3.3), с бесконечно удаленной прямой $l_\infty(0:0:1)$ евклидовой плоскости, заданной уравнением $x_3 = 0$.

$$\omega \cap l_\infty: \quad \begin{cases}(x_1 - ax_3)^2 + (x_2 - bx_3)^2 = r^2x_3^2,\\ x_3 = 0,\end{cases} \begin{cases}x_1^2 + x_2^2 = 0,\\ x_3 = 0.\end{cases}$$

Найденные точки имеют координаты: $J_1(i:1:0), J_2(-i:1:0)$, где $i^2 = -1$.

Итак, любая окружность евклидовой плоскости пересекает абсолютную прямую в точках $J_1$, $J_2$. Назовем эти точки *циклическими* точками евклидовой плоскости .

Рассмотрим теперь окружность $\omega(S(a;b), r)$ на псевдоевклидовой плоскости. Зададим ее в некоторой ортогональной аффинной системе координат уравнением

$$(x-a)^2 - (y-b)^2 = r^2. \tag{3.4}$$

Переходя по формулам (3.2) к проективным координатам, получим уравнение окружности в виде

$$(x_1 - ax_3)^2 - (x_2 - bx_3)^2 = r^2x_3^2. \tag{3.5}$$

Решая уравнение (3.5) совместно с уравнением $x_3 = 0$ бесконечно удаленной прямой $l_\infty(0:0:1)$ псевдоевклидовой плоскости, найдем координаты бесконечно удаленных точек $J_1$. $J_2$ произвольной окружности плоскости Минковского $J_1(1:1:0)$, $J_2(-1:1:0)$. Как и в случае евклидовой плоскости назовем эти точки *циклическими* точками псевдоевклидовой плоскости [7]. Отметим, что циклические точки на евклидовой плоскости являются мнимо сопряженными, а на псевдоевклидовой — вещественными.

Выделяя из всех проективных преобразований плоскости $P_2$ все автоморфизмы пары точек $J_1(1:1:0)$ и $J_2(-1:1:0)$, получим фундаментальную группу G преобразований псевдоевклидовой плоскости.

В отличие от проективной плоскости, на евклидовой (или псевдоевклидовой) плоскости мы рассматриваем кривую вместе с бесконечно удаленной прямой плоскости, называемой также абсолютной прямой. Далее мы всегда полагаем, что абсолютная прямая $l_\infty$ евклидовой или псевдоевклидовой плоскости совпадает с координатной прямой $A_2A_3$ используемого проективного репера $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, а абсолютные циклические точки $J_1$ и $J_2$ евклидовой плоскости имеют координаты $(\pm i: 1: 0)$, а псевдоевклидовой — $(\pm 1: 1: 0)$. При этом соглашении выполняются соотношения (2.2) и (3.2) между декартовыми координатами $(x, y)$. и проективными координатами $(x_1, x_2, x_3)$ одной и той же точки.

## 2.2 Аналитическое задание циркулярной кубики плоскости Минковского

Кривую евклидовой (или псевдоевклидовой) плоскости называют *циркулярной*, если она содержит циклические точки плоскости (см. [3, 4]).

Из того, что точки $J_1$. $J_2$ принадлежат циркулярной кубике, найдем уравнение любой циркулярной кубики псевдоевклидовой плоскости в проективных координатах.

Общее уравнение алгебраической кривой 3-го порядка в аффинных координатах запишем в виде:

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 + 3Hx + 3Iy + J = 0, \quad (3.6)$$

полагая, что коэффициенты $A$, $B$, $C$, $D$ не равны нулю одновременно.

Требуя, чтобы координаты (1:1:0) и (-1:1:0) циклических точек $J_1$, $J_2$ удовлетворяли уравнению (3.6), получим уравнение произвольной циркулярной кубики плоскости Минковского в проективных координатах

$$3(x_1^2 - x_2^2)(Bx_2 - Cx_1) + 3Ex_1^2x_3 + 6Fx_1x_2x_3$$

$$+3Gx_1x_3^2 + 3Hx_2^2x_3 + 3Jx_2x_3^2 + Ix_3^3 = 0. \quad (3.7)$$

Поделим обе части уравнения (3.7) на $x_3^3$ и перейдем к аффинным координатам по формулам (3.2). Получим аналитическое задание любой циркулярной кубической кривой плоскости Минковского в аффинных координатах

$$3(x^2 - y^2)(By - Cx) + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gx + 3Hy^2 + 3Jy + I = 0. \quad (3.8)$$

## 2.3 Способ аналитического задания циркулярной крунодальной кубики в плоскости Минковского

Согласно теореме 5 произвольную крунодальную кубику σ проективной плоскости $P_2$ можно задать уравнением (2.4) при условиях $k \neq 0, v \neq 0, vp + 1 \neq 0, 2vq - vp + 1 \neq 0$. При таком задании вершина $A_3$ каждого проективного полуканонического репера $R$ кубики σ расположена в узле этой кубики. Поэтому предложенное задание дает возможность получить уравнение кубики с конечной узловой точкой в плоскости Минковского с абсолютной прямой $A_1A_2$. Потребуем, чтобы кубика σ проходила через циклические точки $J_1(1:1:0)$, $J_2(-1:1:0)$ плоскости Минковского.

Подставляя координаты (1:1:0) в уравнение (2.4), получаем

$$k^2 + 2vk(p - q) + 1 + 2vq = 0. \tag{3.9}$$

Подставляя координаты (-1:1:0) в уравнение (2.4), получаем

$$-k^2 + 2vk(p - q) - 1 - 2vq = 0. \tag{3.10}$$

Из выражений (3.9) и (3.10) при условиях $k \neq 0,\ v \neq 0$ находим условия на коэффициенты уравнения (2.4) циркулярной кубики с конечной узловой точкой плоскости Минковского

$$p = q, k^2 = -2vq - 1. \tag{3.11}$$

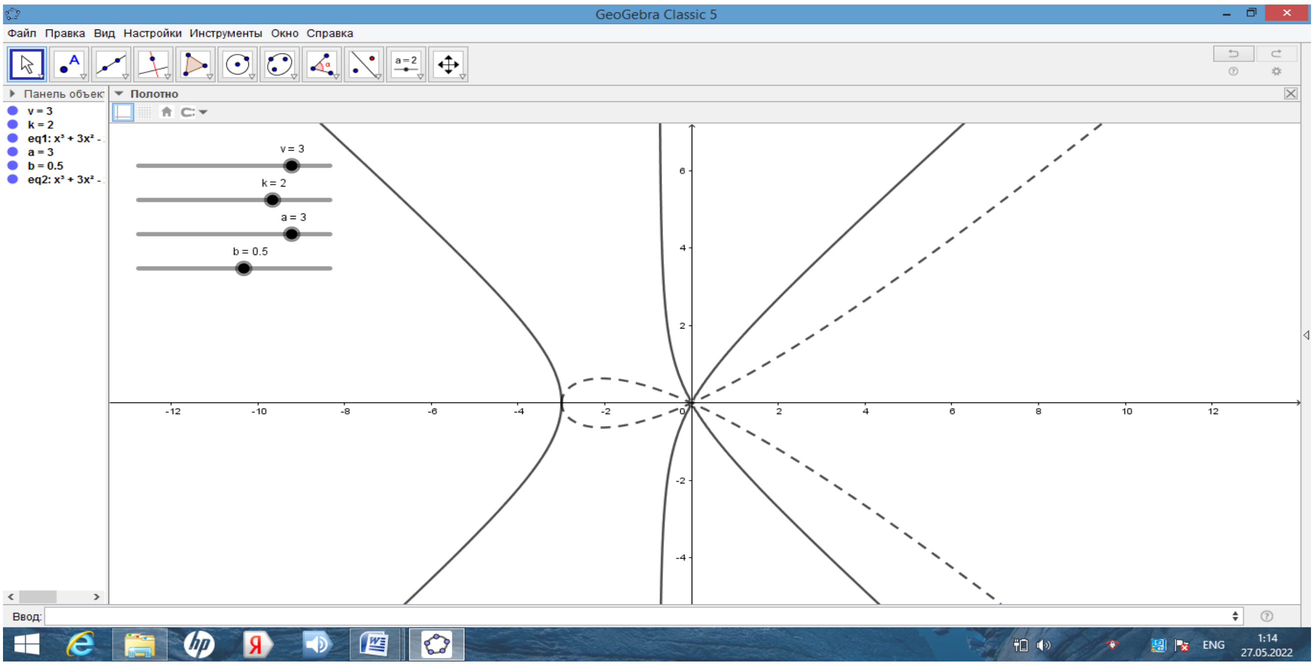
При условиях (3.11) уравнение (2.4) принимает вид

$$x_1^3 - x_1x_2^2 + vx_1^2x_3 - \frac{v}{k^2}x_2^2x_3 = 0,\ k \neq 0,\ k^2 \neq 1,\ v \neq 0, \tag{3.12}$$

или в ортогональных аффинных координатах

$$x^3 - xy^2 + vx^2 - \frac{v}{k^2}y^2 = 0, k \neq 0, k^2 \neq 1, v \neq 0. \tag{3.13}$$

Сплошная линия соответствует кубике с параметрами *v*=3, *k*=2, а пунктирная — кубике с параметрами v=3, k=1/2. Рисунок 9 – Изображения на евклидовой плоскости циркулярных кубик с конечным узлом и нециклической точкой перегиба на абсолюте плоскости Минковского




## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе подготовки работы я познакомился с основами геометрии пространства Минковского, изучил основы аналитической геометрии, типы сфер и касательных плоскостей и аналитическое задание крунодальной циркулярной кубики в проективных координатах; освоил основы тригонометрии на сферах в пространстве Минковского; провел сравнительный анализ фактов псевдоевклидовой и евклидовой геометрий; научился понимать, какие именно геометрические факты относятся к аффинной геометрии, следовательно являются общими для изучаемых геометрий; понял принцип введения метрики в различных геометрических системах. Не все изученные вопросы были непосредственно изложены в тексте работы в связи с ограничениями на ее объем. В дальнейшем я планирую продолжить изучение неевклидовых геометрий и рассмотреть глубже некоторые вопросы кинематики для объектов псевдоевклидовой плоскости, а также продолжить самостоятельное исследование по крунодальным циркулярным кубикам с бесконечно удаленной точкой перегиба.