

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

**«Странные нехаотические аттракторы в двумерных
неавтономных слабодиссипативных отображениях»**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 4011 группы
направления (специальности) 03.03.01 «Прикладная математика и физика»
код и наименование направления (специальности)
Институт физики
наименование факультета, института, колледжа
Балаевой Веры Вячеславовны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

Доцент, к.ф.-м.н.
должность, уч. степень, уч. звание

08.06.22
дата, подпись

А.В. Савин
инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

Доцент, к.ф.-м.н.
должность, уч. степень, уч. звание

08.06.22
дата, подпись

Е.Н. Бегинин
инициалы, фамилия

Саратов 2022 год

Введение. Странный нехаотический аттрактор (СНА) – это объект, который, как правило, возникает в специальном классе диссипативных систем с внешним квазипериодическим воздействием. Квазипериодическое воздействие в диссипативной системе выражается в стабилизации благодаря появлению странных нехаотических аттракторов.

Физически диссипативные и консервативные системы не изолированы, и для большого числа систем может произойти переход от диссипативной к консервативной системе. При непрерывном изменении параметров динамика плавно меняется с диссипативной на консервативную, и "вблизи" консервативного случая происходит "промежуточное" поведение, демонстрирующее как консервативные, так и диссипативные черты.

В статье [1], в частности, на примере отображения Эно исследуются СНА при слабой диссипации. На карте динамических режимов была получена линия, вдоль которой существуют СНА.

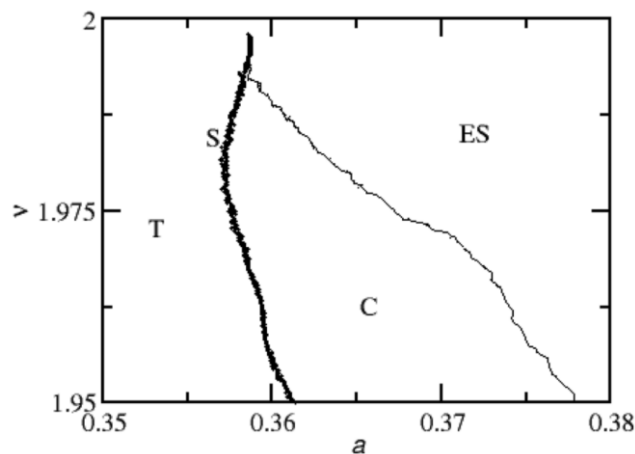


Рис. 1. Схематическая диаграмма, демонстрирующая различные динамические режимы в плоскости $[a, v]$ для отображения Эно при $\epsilon = 0.26$. C – хаос, T – тор, «разбегание» – ES, S – линия, вдоль которой появляются СНА. [1]

Отображение Эно имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - (1 - v)y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (1)$$

Введём внешнее квазипериодическое воздействие в аддитивном виде:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - (1 - v)y_n + \epsilon \cos(2\pi\theta_n) \\ y_{n+1} = x_n \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \omega \pmod{1} \end{cases} \quad (2)$$

Цель данной дипломной работы заключается в локализации СНА на карте динамических режимов в двумерных неавтономных отображениях на примере отображения Эно и исследовании особенностей динамики СНА при

слабой диссипации. Поставлена задача получить области СНА на карте динамических режимов для широкого диапазона параметров, т.е. расширить результаты статьи [1], изучить эволюцию областей СНА и их динамику (используя основные методы теории динамических систем и статистические методы) при варьировании величины параметра диссипации. Особый интерес представляет слабодиссипативный предел, для которого можно приблизительно (с точностью до определения областей СНА используемым методом) оценить минимальное значение диссипации, при котором СНА продолжают существовать.

В данной работе было изучено два метода локализации СНА: первый на основе рациональных аппроксимаций, а второй – на основе локальных ляпуновских показателей. Можно сравнить эффективность методов путём сравнения их реализации с полученным ранее результатом. Целесообразно обратиться к карте режимов для логистического отображения из книги [2], поскольку оно является, по сути, одномерным аналогом отображения Эно. Более точным оказался второй метод, он и будет рассмотрен в основной части.

Логистическое отображение под внешним квазипериодическим воздействием:

$$\begin{cases} x_{n+1} = a - x_n^2 + \epsilon \cos(2\pi\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \omega \pmod{1} \end{cases} \quad (3)$$

Основное содержание работы. В ряде исследований [3, 4, 5] было установлено, что хотя старший показатель Ляпунова отрицателен для СНА, из-за странности аттрактора динамика может быть локально нестабильной.

Рассмотрим характеристики распределений локальных ляпуновских показателей СНА. Чтобы построить функцию плотности распределения $P_M(\sigma_M)$, такую что $P_M(\sigma_M)d\sigma_M$ есть вероятность обнаружить значение локального показателя в интервале от σ_M до $\sigma_M + d\sigma_M$, возьмем достаточно длинную траекторию, разделенную на сегменты длиной M , и будем вычислять значение σ_M на каждом сегменте. Важной характеристикой распределения $P_M(\sigma_M)$ для случая СНА является наличие «хвоста» в области положительных значений показателя. Определим долю положительных значений ляпуновского показателя:

$$F_M^+ = \int_0^{\infty} P_M(\sigma) d\sigma \quad (4)$$

Также можно выразить долю неустойчивых участков траектории F_M^+ как отношение числа неустойчивых участков к общему числу участков длинной траектории:

$$F_+ = \frac{n_{\sigma+}}{n} \quad (5)$$

Однако, не только для СНА, но и для периодических аттракторов траектория приходит на аттрактор не сразу, а спустя некоторое время установления режима τ . Если узнать максимальное значение времени выхода траектории на периодический аттрактор τ_n , то можно использовать величину F_M^+ для отличия СНА от квазипериодики. Если $\Lambda < 0$, но $F_M^+ > 0$, то аттрактор – странный нехаотический. Вычисления показывают, что время выхода на периодический аттрактор τ_n сильно увеличивается по мере приближения к области СНА, поэтому критическое значение τ_n следует вычислять для аттракторов, максимально близких к области СНА. Для этого необходимо найти несколько точек СНА, которые, как правило, располагаются на границе областей квазипериодических режимов.

Ниже приведён алгоритм метода, с помощью которого можно осуществить локализацию СНА при использовании локальных показателей Ляпунова.

1. Сначала требуется найти несколько граничных точек (например, три) перехода от периодики к СНА (максимально близких к СНА, но являющихся квазипериодическими), подтвердив существование СНА вычислением Λ ($\Lambda \leq 0$) и визуальной оценкой наличия «странности» у аттрактора. СНА, как правило, существуют на границах областей периодичности.
2. Для этих граничных точек строится график зависимости доли неустойчивых участков длинной траектории F_M^+ от длины участков M . Среди значений M , при которых траектория приходит в установившийся режим (значение, начиная с которого всегда $F_M^+ = 0$) выбирается максимальное. Это критическое значение τ_n , начиная с которого при ненулевых F_M^+ режим определяется как СНА, т.к. время тогда τ превышает максимальное время для установления квазипериодического режима.
3. Для каждой точки в плоскости параметров вычисляется ляпуновский показатель. $\Lambda > 0$ соответствует хаосу, а $\Lambda \leq 0$ – нехаотическому режиму. Если в точке «разбегание» значений переменной, то вычисления заканчиваются.

4. В каждой точке вычисляется доля неустойчивых участков длинной траектории F_M^+ . Число таких траекторий n можно выбрать произвольно, например, 50-200, но если τ_n достигает больших значений, то для уменьшения времени вычислений n можно ещё уменьшить.
5. Если $F_M^+ = 0$, то режим квазипериодический, в обратном случае – СНА.

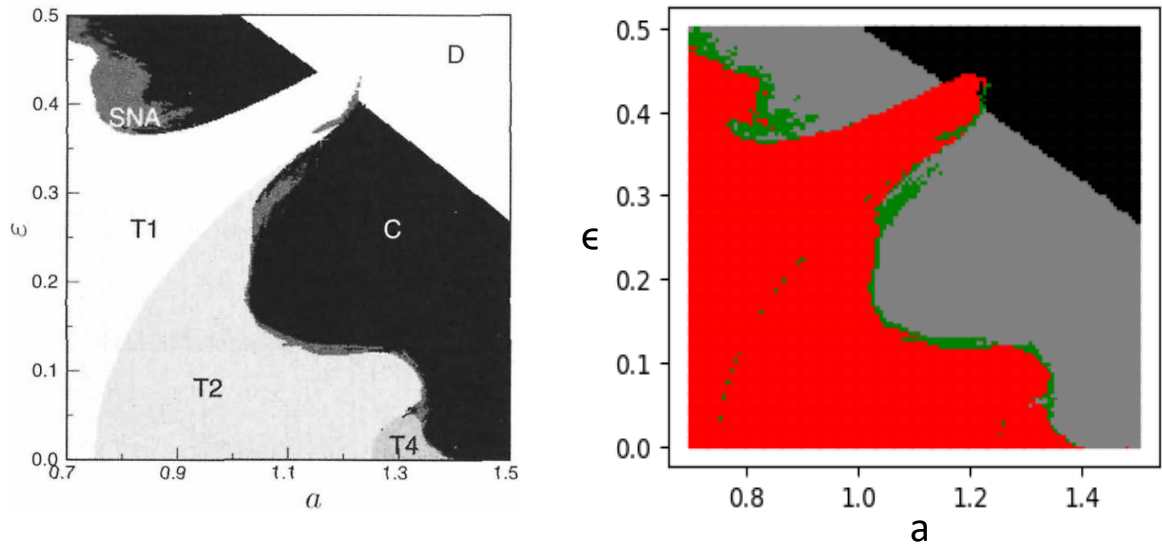


Рис. 2. Сравнение ранее полученного результата [2] для локализации СНА на плоскости параметров $[a, \epsilon]$ в логистическом отображении (3) и реализации метода с использованием локальных показателей Ляпунова.

Метод даёт достаточно точный результат, чтобы его можно было применять для исследования СНА в других отображениях, например, отображении Эно.

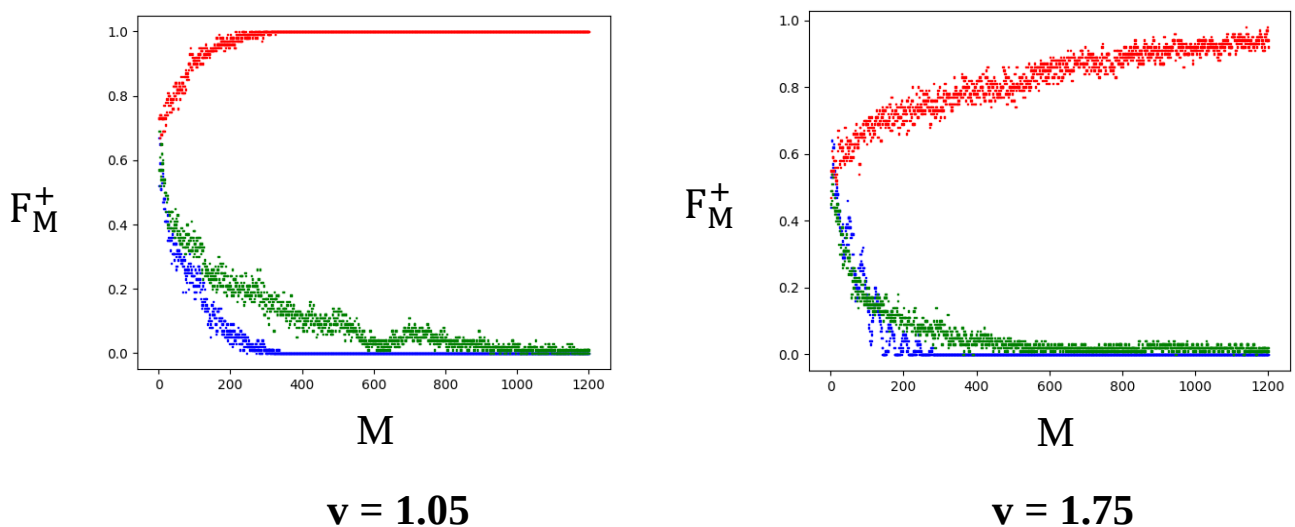
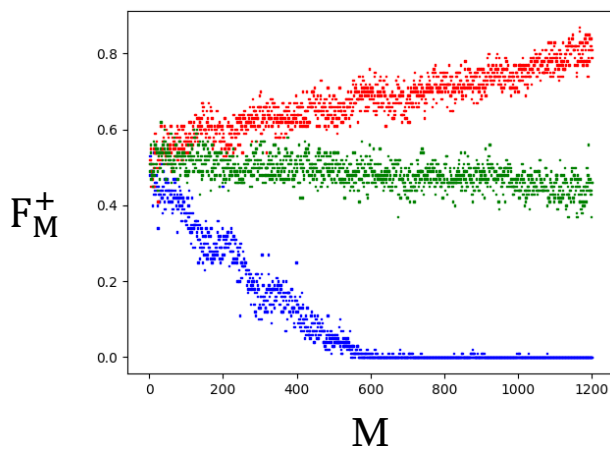
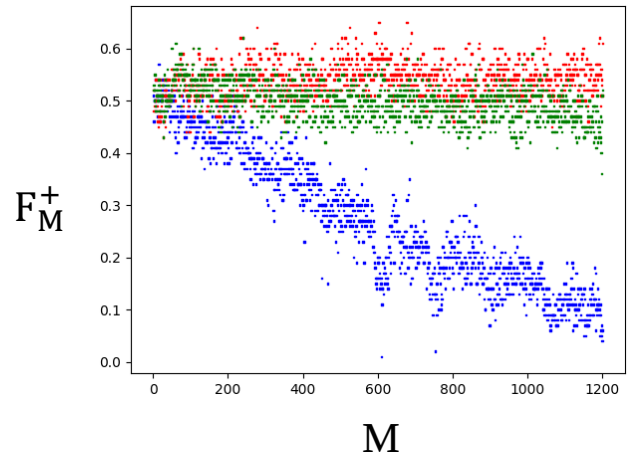


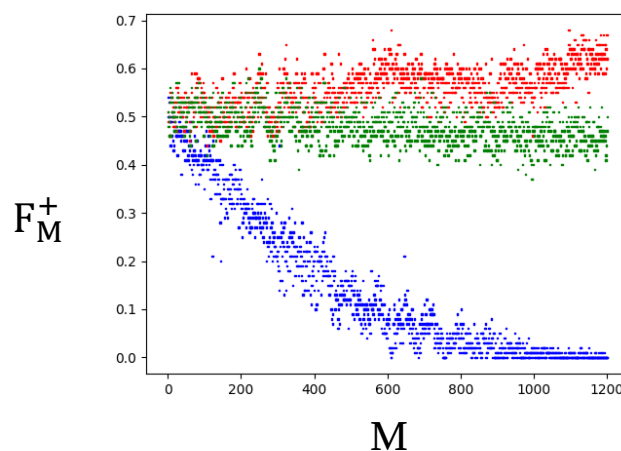
Рис. 3. Графики зависимости доли неустойчивых участков траектории F_M^+ от длины участков траектории M для аттракторов в отображении Эно (2) при различных значениях параметра диссипации. Цветовые обозначения: **синий** – периодическая динамика, **зелёный** – СНА, **красный** – хаос.



$\nu = 1.98$



$\nu = 1.995$



$\nu = 1.997$

Рис. 3 (продолжение). Графики зависимости доли неустойчивых участков траектории F_M^+ от длины участков траектории M для аттракторов в отображении Эно (2) при различных значениях параметра диссипации. Цветовые обозначения: **синий** – периодическая динамика, **зелёный** – СНА, **красный** – хаос.

Известно, что при приближении к гамильтонову пределу области в плоскости параметров и бассейны притяжения хаотических аттракторов экспоненциально уменьшаются. Из графиков статистических характеристик на рис. 3 видно, что при уменьшении диссипации хаотические аттракторы приобретают большую устойчивость, в то время как для СНА становится больше неустойчивых участков. Быстрая скорость изменения характеристик хаоса и СНА приводит к тому, что динамика их статистических характеристик устойчивости становится похожей и сильно отличается от квазипериодической. Можно предположить, что области и бассейны СНА тоже будут уменьшаться экспоненциально, как и для хаоса.

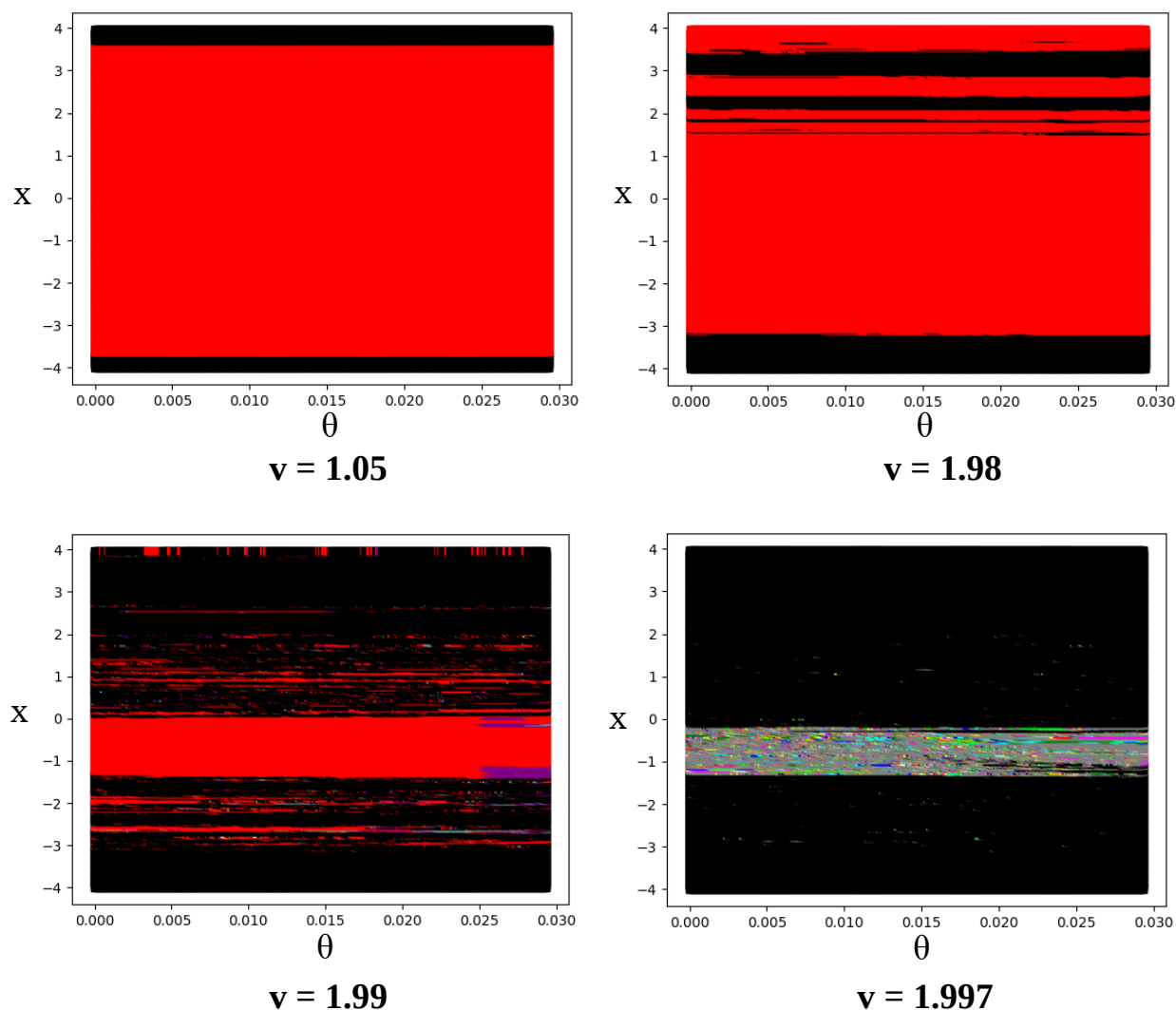
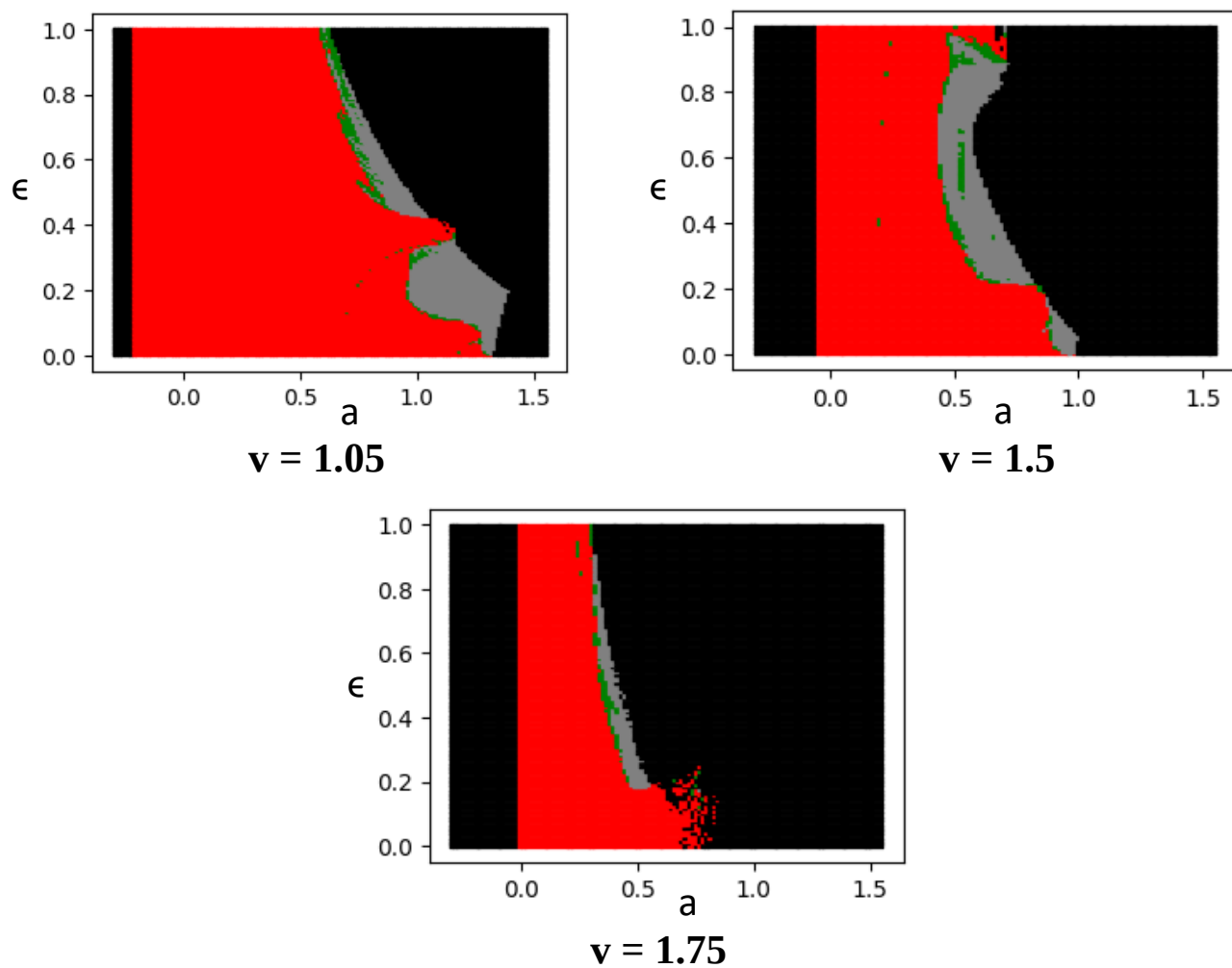


Рис. 4. Бассейны притяжения для аппроксимации СНА $\omega = 21/34$ в отображении Эно (2) в плоскости $[\theta, x]$ по мере уменьшения диссипации. Цветовые обозначения: **красный** – 1-цикл, **фиолетовый** – 2-цикл и т.д., серый – хаос, чёрный – «разбегание».

Действительно, бассейны притяжения СНА значительно уменьшаются при убывании диссипации, как и для хаотических аттракторов. Чем меньше диссипация, тем сильнее уменьшаются бассейны при дальнейшем её убывании.

Проиллюстрируем эволюцию областей СНА на карте динамических режимов в отображении Эно (2) по мере уменьшения диссипации. Карты режимов на рис. 5 сначала представлены в исходном размере, а затем часть из них дублируется в увеличенном масштабе для более наглядного сравнения областей в слабодиссипативном случае, поскольку при убывании диссипации области «разбегания» занимают всё большее место на плоскости параметров.



Увеличенный масштаб:

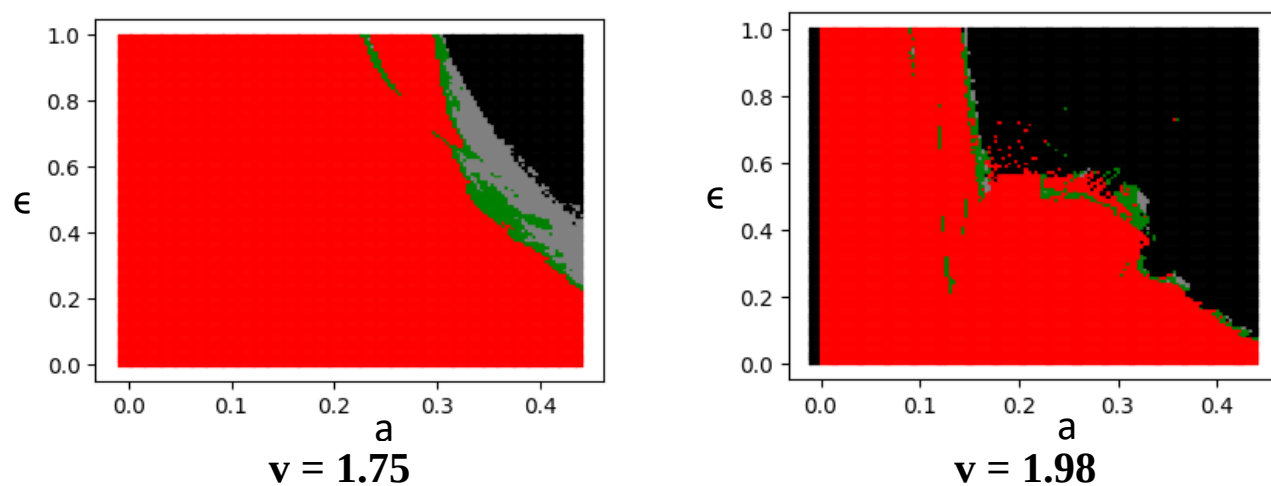


Рис. 5. Карты динамических режимов с локализацией СНА для отображения Эно (2) при различных параметрах диссипации ν . Цветовые обозначения: **красный** – периодический режим, **зелёный** – СНА, серый – хаос, чёрный – «разбегание».

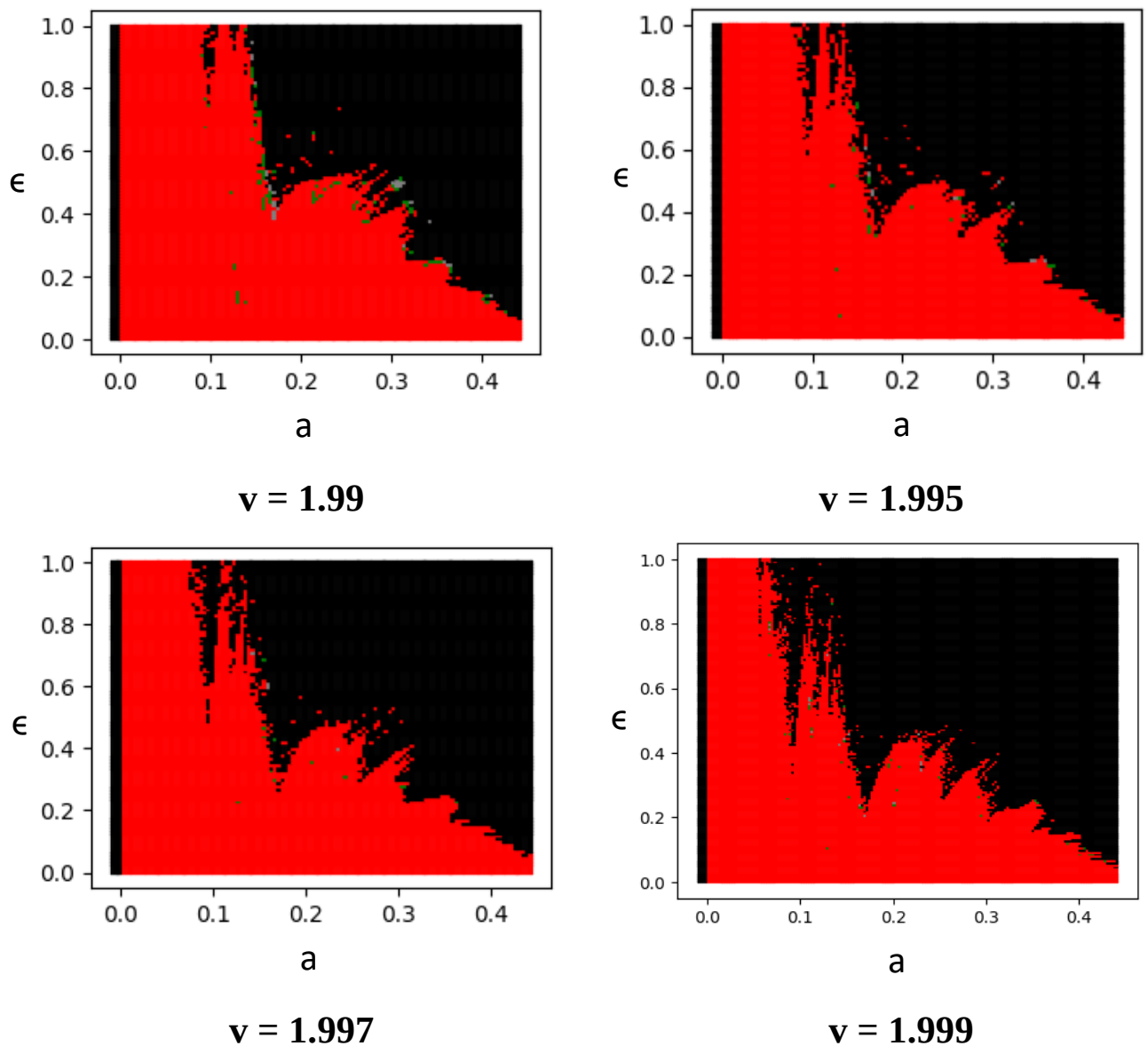
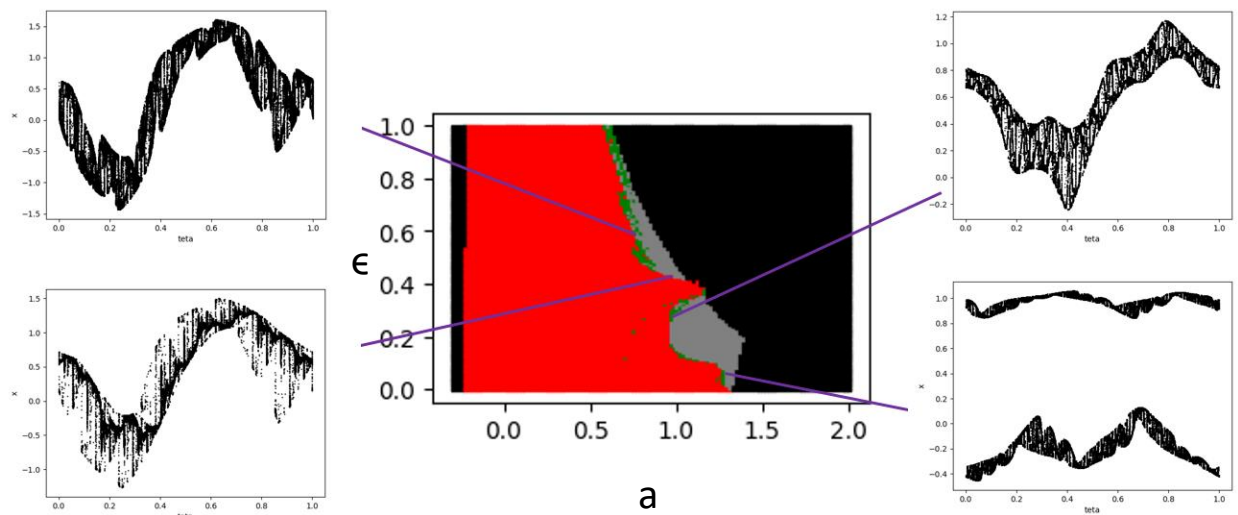


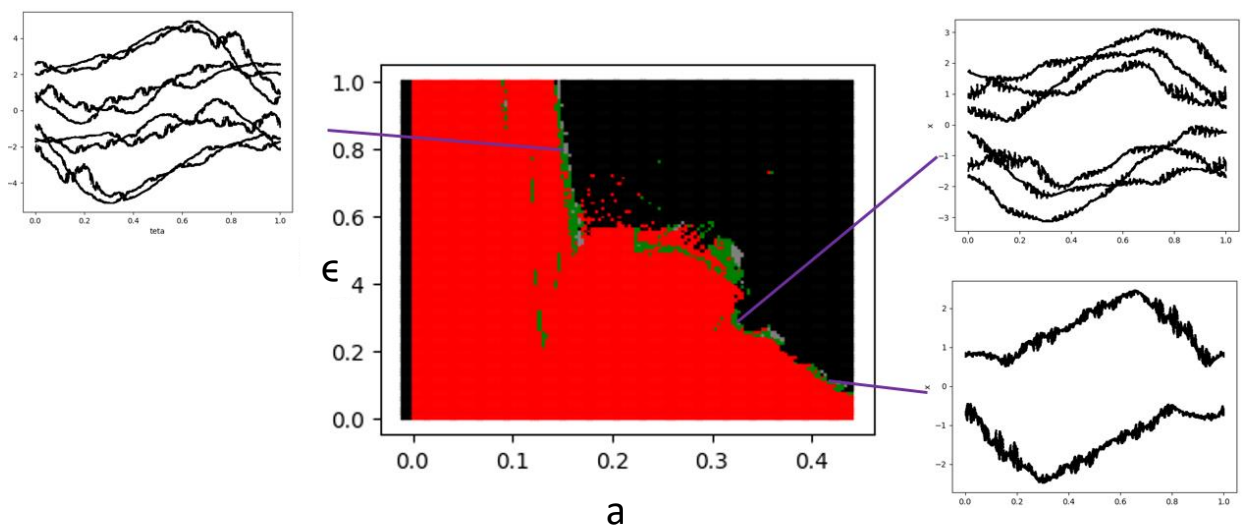
Рис. 5 (продолжение). Карты динамических режимов с локализацией СНА для отображения Эно (2) при различных параметрах диссипации ν . Цветовые обозначения: **красный** – периодический режим, **зелёный** – СНА, серый – хаос, чёрный – «разбегание».

Области СНА так же, как и бассейны притяжения, уменьшаются по мере убывания диссипации, и чем слабее диссипация, тем быстрее уменьшаются области.

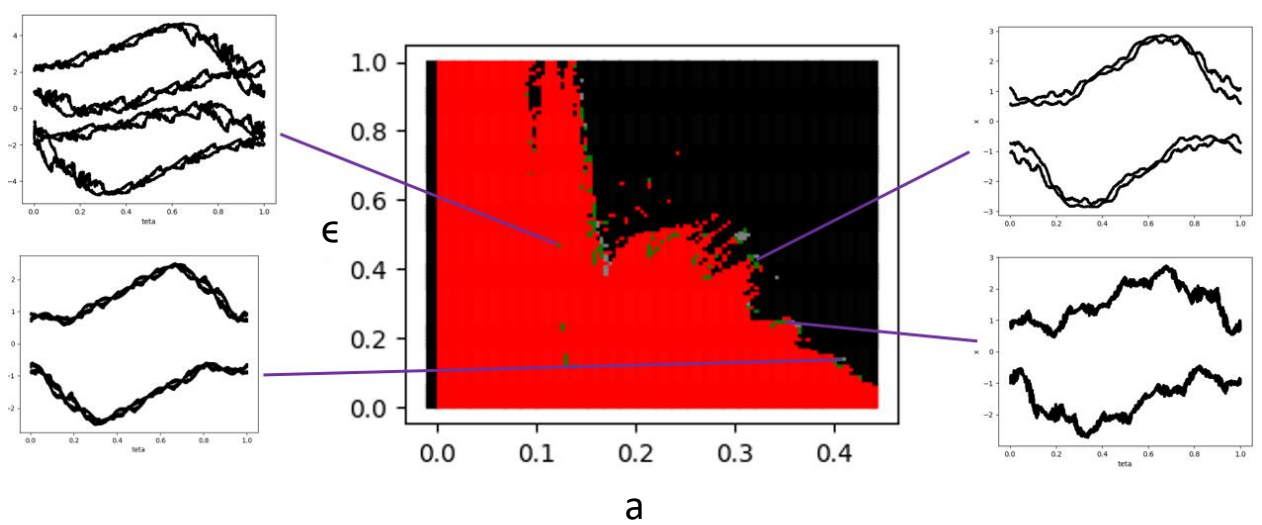
Приведём иллюстрации СНА, возникающих в отображении Эно, в плоскости $[\theta, x]$ и укажем их расположение на карте динамических режимов при разных значениях параметра диссипации (начиная с сильной диссипации и по мере её уменьшения).



$\nu = 1.05$



$\nu = 1.98$



$\nu = 1.99$

Рис. 6. Карты динамических режимов с локализацией СНА для отображения Эно (2) при различных параметрах диссипации ν и соответствующие им СНА в плоскости $[\theta, x]$.

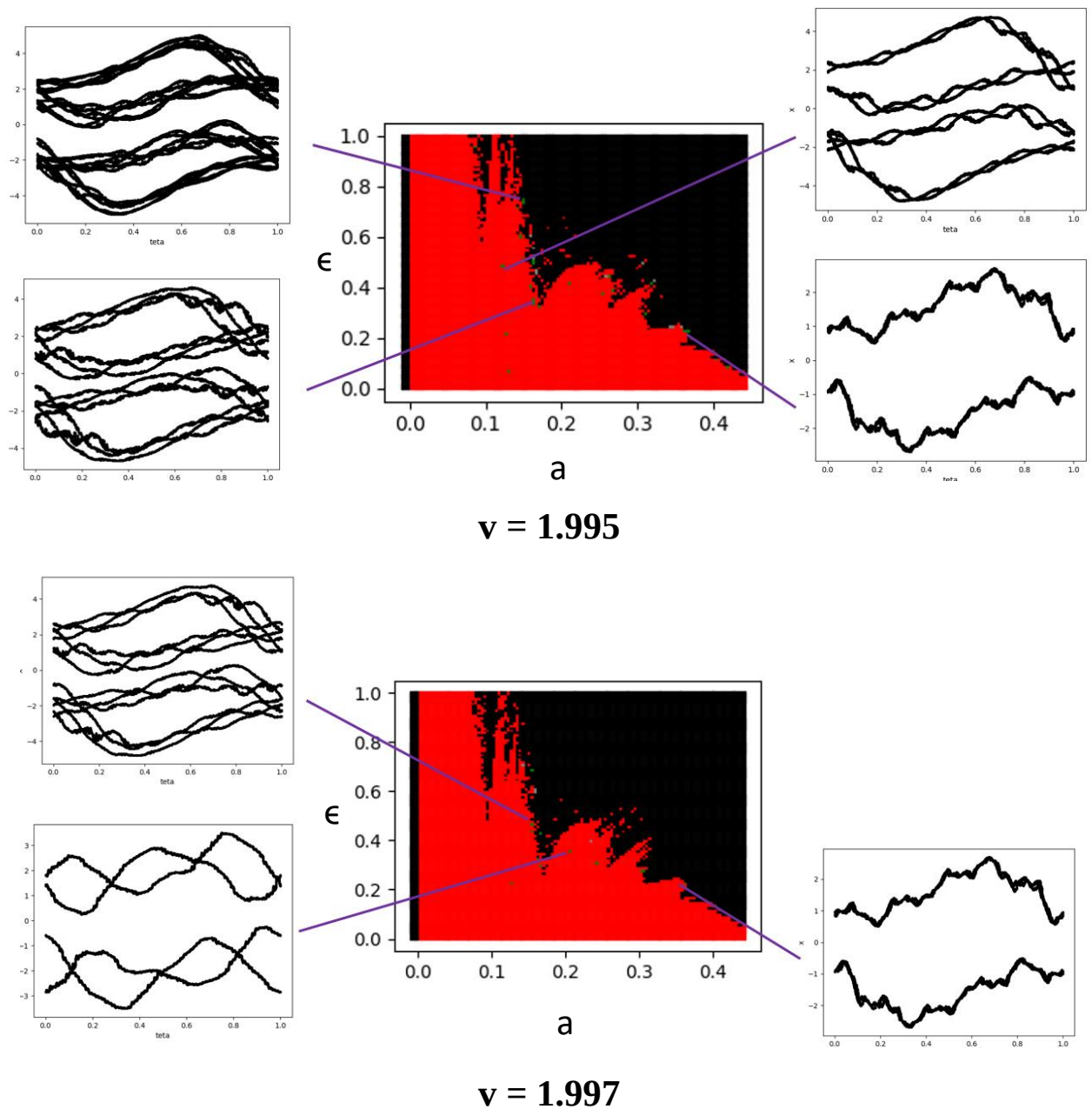


Рис. 6 (продолжение). Карты динамических режимов с локализацией СНА для отображения Эно (2) при различных параметрах диссипации ν и соответствующие им СНА в плоскости $[\theta, x]$.

Исходя из результатов применения метода локализации СНА с помощью локальных показателей Ляпунова и других вычислений, приведённых в данной работе, можно сделать следующие выводы:

1. Статистические характеристики устойчивости локальных ляпуновских показателей для СНА при сильной диссипации ведут себя подобно квазипериодическим (с разницей лишь во времени установления) — значения $F_M^+(M)$ убывают экспоненциально.

2. При уменьшении диссипации коэффициент наклона графиков $F_M^+(M)$ как для квазипериодических аттракторов, так и для СНА уменьшается, но для СНА изменения происходят значительно быстрее. Следовательно, время установления на устойчивый аттрактор для режимов СНА и квазипериодики растёт.
3. Для хаотических аттракторов тоже при уменьшении диссипации коэффициент наклона графиков $F_M^+(M)$ уменьшается, но они, напротив, приобретают больше устойчивости, и увеличивается время установления на неустойчивый аттрактор.
4. Самое быстрое изменение статистической характеристики по мере уменьшения диссипации происходит для СНА: при сильной диссипации характеристика вела себя подобно квазипериодической, а при слабой диссипации стала подобна хаотической (при соответствующем изменении для хаотической характеристики). По мере уменьшения диссипации характеристика СНА «догоняет» хаотическую по времени установления на аттрактор, и их статистическая динамика становится похожей (углы наклона графиков к горизонтальной оси M примерно равны), но с той разницей, что СНА устанавливаются на устойчивость, а хаос – на неустойчивость (графики направлены противоположно друг другу относительно вертикальной оси $F_M^+(M)$).
5. Увеличение времени установления режима для СНА и для хаоса по мере уменьшения диссипации происходит экспоненциально: при сильной диссипации шаг изменения параметра выбран большой, т.к. изменения статистических характеристик происходят плавно, однако, при слабой диссипации изменения в динамике характеристик происходят значительно быстрее, и чтобы их зафиксировать, следует уменьшать шаг по параметру диссипации по мере приближения к слабодиссипативному пределу.
6. Было доказано, что сходство в динамике статистических характеристик устойчивости для случаев СНА и хаоса связано со схожими изменениями размеров их областей и бассейнов. Было получено, что для СНА, как и для хаоса, при уменьшении диссипации области на карте динамических режимов и бассейны притяжения экспоненциально уменьшаются.

Заключение. В данной дипломной работе была изучена динамика странных нехаотических аттракторов в двумерном неавтономном

отображении Эно в слабодиссипативном случае. Локализация СНА на карте динамических режимов была реализована методом с использованием локальных ляпуновских показателей. Результаты показали, что статистическая характеристика устойчивости старших ляпуновских показателей, а именно зависимость доли неустойчивых участков длинной траектории от длины участков, для СНА и хаотических аттракторов оказалась похожей с той лишь разницей, что СНА устанавливается на устойчивый аттрактор, а хаос – на неустойчивый. С помощью карт динамических режимов и бассейнов притяжения было показано, что сходство в динамике статистических характеристик устойчивости для случаев СНА и хаоса связано со схожими изменениями размеров их областей и бассейнов. Для СНА, как и для хаоса, при уменьшении диссипации области на карте динамических режимов и бассейны притяжения экспоненциально уменьшаются.

Приблизительное предельное (минимальное) значение параметра диссипации, при котором удалось обнаружить СНА, составило $\nu = 1.997$. Скорость изменения статистической характеристики устойчивости для СНА оказалась значительно выше, чем для квазипериодики и хаоса, и если при сильной диссипации график $F_M^+(M)$ для СНА был ближе к квазипериодическому, то по мере уменьшения диссипации СНА стал «догонять» хаотический аттрактор по неустойчивости, и в слабодиссипативном пределе наклоны графиков $F_M^+(M)$ стали примерно равны. Таким образом, при уменьшении диссипации доля неустойчивых участков для СНА экспоненциально увеличивалась, при этом области на карте режимов и бассейны притяжения, напротив, экспоненциально уменьшались.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Bilal and R. Ramaswamy, Phys. Rev. E 87, 034901 (2013)
2. U. Feudel, S. Kuznetsov, A. Pikovsky, «Strange nonchaotic attractors», World Scientific Series of Nonlinear Science, Series editor: Leon O. Chua, Series A, Vol. 56 (2006)
3. T. C. Bountis, Physica D 3, 577 (1981)
4. S. Kraut and U. Feudel, Phys. Rev. E 66, 015207 (2002)
5. B. K. Goswami, Phys. Rev. E 78, 066208 (2008)